Fills

1. Descripció de l'economia (fills de jove)

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular espontàniament. Inicialment hi ha dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. A efectes pràctics, hom viu dos períodes.
• Tot jove decideix quants fills tenir. Els fills són infants quan el pare és jove i esdevenen joves el període següent, quan el pare és gran. Cada jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c' \cdot n^{\delta}$, on és c el consum del bé de jove, c' el consum de gran, n és el nombre de fills que el jove decideix tenir i δ és un paràmetre positiu. Tot individu gran té la funció d'utilitat $u' = c'$. Els infants són econòmicament inactius i no tenen funció d'utilitat (es poden considerar 'agents immadurs').
• El cost de tenir un fill és $\gamma > 0$ unitats de bé per fill.
• La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran.

2. Anàlisi

• **Préstecs i acumulació.** Els individus poden dedicar el bé a tres usos: consumir-lo, prestar-lo i esmerçar-lo en tenir fills.

• **Decisions dels joves.** Tot jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \cdot n^{\delta} & \\ \text{sotmès a} & c + l + \gamma \cdot n = w & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c' = w' + R \cdot l & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c és el consum present (de jove), c' és el consum del període següent (de gran), n és el nombre de fills que es decideix tenir, l és el volum de préstecs, w és la dotació de jove, w' és la dotació de gran i R és la taxa d'interès bruta.

Les dues restriccions poden integrar-se en una de sola:

$$c + \frac{c'}{R} + \gamma \cdot n = w + \frac{w'}{R}.$$

El lagrangià és

$$L = c \cdot c' \cdot n^{\delta} + \lambda \cdot \left(w + \frac{w'}{R} - c - \frac{c'}{R} - \gamma \cdot n \right).$$

Les condición de primer ordre són:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial c} = c' \cdot n^{\delta} - \lambda$$

$$0=\frac{\partial L}{\partial c'}=c\cdot n^{\delta}-\frac{\lambda}{R}$$

$$0=\frac{\partial L}{\partial n}=\delta\cdot n^{\delta-1}\cdot c\cdot c'-\lambda\cdot\gamma.$$

Se segueix de les dues primeres que

$$c=\frac{c'}{R}.$$

Combinant la primera i la tercera

$$n=\frac{\delta}{\gamma}\cdot c.$$

Introduint les darreres dues equacions en la restricció conjunta,

$$c+c+\delta\cdot c=\ w+\frac{w'}{R}.$$

Per tant,

$$c=\frac{w+w'/R}{2+\delta}$$
$$c'=R\cdot c=\frac{R\cdot w+w'}{2+\delta}$$
$$n=\frac{\delta}{\gamma}\cdot c=\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{w+w'/R}{2+\delta}.$$

Per la restricció de jove,

$$l=w-c-\gamma\cdot n=w-c-\delta\cdot c=\frac{w}{2+\delta}-\frac{1+\delta}{2+\delta}\cdot\frac{w'}{R}.$$

En conseqüència, els préstecs dels joves de G1 i G2 són

$$l_1=\frac{1}{2+\delta}$$

$$l_2=\frac{2}{2+\delta}-\frac{1+\delta}{2+\delta}\cdot\frac{2}{R}.$$

• **Taxa d'interès d'equilibri.** Si hi ha m_1 joves de G1 i m_2 joves de G2, la condició d'equilibri en el mercat de préstecs estableix

$$m_1\cdot l_1+\ m_2\cdot l_2=0.$$

Així doncs, la taxa d'interès d'equilibri del període considerat satisfà

$$m_1 \cdot \frac{1}{2+\delta} + m_2 \cdot \left(\frac{2}{2+\delta} - \frac{1+\delta}{2+\delta} \cdot \frac{2}{R}\right) = 0.$$

En definitiva,

$$\boxed{R = \frac{2 \cdot m_2 \cdot (1+\delta)}{m_1 + 2 \cdot m_2}.}$$

En concret, en el primer període on hi ha mercat de préstecs,

$$R = \frac{2 \cdot n \cdot (1+\delta)}{n + 2 \cdot n} = \frac{2}{3} \cdot (1+\delta).$$

Els valors m_1 i m_2 de l'equació que determina la taxa d'interès d'equilibri es van determinar en el període anterior, de manera que l'equació indica com el mercat de préstecs s'ajusta a canvis demogràfics.

• **Demografia.** Els resultats anteriors impliquen que els joves de G1 trien tenir el nombre de fills

$$n_1 = \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{1}{2+\delta}$$

i que els joves de G2 trien tenir el nombre de fills

$$n_2 = \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{2 + 2/R}{2+\delta} = \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{2 + \frac{m_1 + 2 \cdot m_2}{m_2 \cdot (1+\delta)}}{2+\delta} = \frac{\delta \cdot (m_1 + 2 \cdot m_2 \cdot (2+\delta))}{\gamma \cdot m_2 \cdot (1+\delta) \cdot (2+\delta)}$$

on m_1 és el total de joves de G1 del període corresponent i m_2 és el total de joves de G2 del mateix període. Específicament, si $t = 0$ és el període inicial, en el període $t = 1$ hi ha $n \cdot n_1$ joves de G1; $n \cdot (n_1)^2$ en $t = 2$; $n \cdot (n_1)^3$ en $t = 3$… de manera que en el període τ n'hi ha

$$n \cdot (n_1)^\tau = n \cdot \left(\frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{1}{2+\delta}\right)^\tau.$$

Similarment, de joves de G2, en el període τ n'hi ha n multiplicat pel nombre de fills en $t = 1$, pel nombre de fills en $t = 2$, pel nombre de fills en $t = 3$ … fins al nombre de fills en $t = \tau$.

Una pregunta que es deixa oberta és determinar la població de quin grup creix més o creix més ràpidament. Com a il·lustració, en $t = 1$,

$$n_1 = \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{1}{2+\delta}$$

$$n_2 = \frac{\delta \cdot (n + 2 \cdot n \cdot (2+\delta))}{\gamma \cdot n \cdot (1+\delta) \cdot (2+\delta)} = \frac{\delta \cdot (5 + 2 \cdot \delta)}{\gamma \cdot (2 + 3 \cdot \delta + \delta^2)}$$

de manera que $n_2 > n_1$ si i només si

$$\frac{\delta \cdot (5 + 2 \cdot \delta)}{\gamma \cdot (1 + \delta) \cdot (2 + \delta)} > \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{1}{2 + \delta}$$

o

$$5 + 2 \cdot \delta > 1 + \delta$$

o

$$4 + \delta > 0,$$

que és el cas. Per tant, els joves del grup més ric tenen inicialment més fills que els joves del grup més pobre.

Es deixa com a exercici determinar també el valor de la taxa d'interès en la resta de períodes i establir si aquest valor convergeix (si és cert que $n_2 > n_1$ cada període, aleshores hi haurà més demandants de préstecs en comparació amb els oferents).

[És correcta la següent expressió sobre la dinàmica de la taxa d'interès:

$$R_{t+1} = \frac{4 \cdot (1 + \delta) \cdot (1 + R_t)}{4 + 5 \cdot R_t} \;.]$$

3. Descripció de l'economia (fills de gran)

L'economia és la mateixa de les seccions anteriors però ara tant els joves com els grans poden tenir fills. La funció d'utilitat de tot individu gran és $u' = c' \cdot n'^{\delta}$, on δ és el mateix paràmetre que apareix en la funció d'utilitat de tot jove.

4. Anàlisi

• **Decisions dels grans.** Tot gran s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u' = c' \cdot n'^{\delta} \\ \text{sotmès a} & c' + \gamma \cdot n' = w' + R \cdot l\,. \end{array}$$

Les solucions:

$$n' = \frac{\delta \cdot (w' + R \cdot l)}{\gamma \cdot (1 + \delta)}$$

$$c = \frac{c'}{R}$$

$$c' = \frac{w' + R \cdot l}{1 + \delta}.$$

• **Decisions dels joves.** Tot gran s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{rl} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \cdot n^{\delta} \\ \text{sotmès a} & c + l + \gamma \cdot n = w \\ & c' + \gamma \cdot n' = w' + R \cdot l \end{array}$$

on caldria fer la substitució $n' = \frac{\delta \cdot (w' + R \cdot l)}{\gamma \cdot (1+\delta)}$.

Si les dues restriccions s'introdueixen en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u = (w - l - \gamma \cdot n) \cdot \frac{1}{1+\delta} \cdot (w' + R \cdot l) \cdot n^{\delta}$$

respecte d' l i n.

$$n' = \frac{\delta \cdot (w' + R \cdot l)}{\gamma \cdot (1 + \delta)}$$

$$c = \frac{c'}{R}$$

$$c' = \frac{w' + R \cdot l}{1 + \delta}.$$

El problema anterior té la mateixa solució que el de

$$\text{maximitzar} \quad u = (w - l - \gamma \cdot n) \cdot (w' + R \cdot l) \cdot n^{\delta}.$$

Es deixa com a exercici completa l'anàlisi.