

# Imposts

## 1. Descripció de l'economia

---

- Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular.
- Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb  $n$  membres.
- Hom viu dos períodes consecutius.
- Tot consumidor jove té la funció d'utilitat  $u = c \cdot c'$ , on és  $c$  el consum del bé de jove i  $c'$  el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat  $u' = c'$ .
- La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran.
- Hom accepta l'obligació de pagar impostos de jove (imposts de quantia fixa, impostos sobre les dotacions o impostos sobre el consum) a canvi de rebre transferències (una pensió) de gran.

## 2. Opció 1: impost de quantia fixa

---

- **Impost de quantia fixa.** Cada jove paga una quantitat fixa  $\tau$  del bé. La quantitat total recaptada entre els joves es distribueix igualitàriament entre els grans del període, de manera que cada gran rep la quantitat  $\tau'$  del bé.
- **Decisió de prestar/manllevar dels membres de G1.** Tot jove del grup G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' \\ \text{sotmès a} & c_1 + l_1 + \tau = 1 \\ & c_1' = R \cdot l_1 + \tau' \end{array}$$

on

$c_1$  és el consum present de l'individu (de jove),

$c_1'$  és el consum del període següent (de gran),

$l_1$  és el volum de préstecs demandats,

$\tau$  és l'impost que es paga de jove,

$\tau'$  és la transferència (pensió) que es rep de gran i

$R$  és la taxa d'interès bruta.

Tant  $\tau$  com  $\tau'$  són paràmetres sobre els quals els individus consideren que no tenen cap control. Aïllant el consum en les dues restriccions i inserint el resultat en la funció objectiu, el problema es redueix a

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_1 = (1 - l_1 - \tau) \cdot (R \cdot l_1 + \tau') \\ \text{respecte d}'l_1 & \end{array}$$

La solució:

$$l_1 = \frac{1 - \tau}{2} - \frac{\tau'}{2R}.$$

• **Decisió de prestar/manllevar dels membres de G2.** Tot jove del grup G2 s'enfronta al problema de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_2 = c_2 \cdot c_2' \\ \text{sotmès a} \quad & c_2 + l_2 + \tau = 2 \\ & c_2' = 2 + R \cdot l_2 + \tau \end{aligned}$$

d'on es conclou que

$$l_2 = 1 - \frac{\tau}{2} - \frac{\tau' + 2}{2R}.$$

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** En l'equilibri del mercat de préstecs  $n \cdot l_1 = |n \cdot l_2|$ . Un cop cancel·lat  $n$ ,

$$l_1 + l_2 = 0.$$

Per tant, la taxa d'interès  $R$  d'equilibri satisfà

$$\left( \frac{1 - \tau}{2} - \frac{\tau'}{2R} \right) + \left( 1 - \frac{\tau}{2} - \frac{\tau' + 2}{2R} \right) = 0.$$

Com a resultat,

$$R = \frac{2 + 2\tau'}{3 - 2\tau}.$$

Si  $\tau = \tau' = 0$ , s'obté la taxa d'interès  $R = 2/3$  del cas sense impostos ni transferències. A més, la taxa d'interès depèn positivament tant de l'impost  $\tau$  com de la transferència  $\tau'$ . Això fa que ara la taxa d'interès sigui superior a quan  $\tau = \tau' = 0$ . Les dues explicacions a priori són que l'estructura fiscal fa pujar la demanda de préstecs i/o reduir-ne l'oferta. En aquest cas, sembla que l'explicació és d'oferta, atès que, respecte del cas sense impostos ni transferències:

- (i) disposar de la transferència de gran redueix la necessitat dels joves de G1 d'oferir préstecs;
- (ii) haver de pagar l'impost de jove redueix.

En concret, en l'equilibri,

$$l_1 = \frac{1}{2} - \left( \frac{\tau}{2} + \frac{\tau'(3 - 2\tau)}{4(1 + \tau')} \right) = \frac{1}{2} - \frac{2\tau + 3\tau'}{4(1 + \tau')}$$

que és una oferta de préstecs inferior a quan no hi havia impostos ni transferències ( $l_1 = 1/2$ ).

L'anàlisi anterior resta incompleta perquè s'ha d'afegir la condició de distribució igualitària de la recaptació (que es podria interpretar com la conjunció de dos requeriments: factibilitat de les

transferències i no malbaratament dels impostos). Això és, la quantitat recaptada  $2n\tau$  de bé ha de coincidir amb la quantitat distribuïda  $2n\tau'$ . D'aquest requeriment es dedueix

$$\tau = \tau'.$$

En conseqüència, la taxa d'interès d'equilibri seria

$$R = \frac{2 + 2\tau}{3 - 2\tau}.$$

Es deixa com a exercici determinar els losts de consum i la utilitat de joves i grans, i comparar els resultats amb els del cas sense impostos ni transferències.

### 3. Opció 2: impost proporcional sobre la dotació

• **Impost sobre la dotació.** Cada jove paga una quantitat proporció fixa  $0 < \tau < 1$  de la seva dotació. La quantitat total recaptada entre els joves es distribueix igualitàriament entre els grans del període, de manera que cada gran rep la quantitat  $\tau'$  del bé. Dels joves de G1 es recaptaria  $n \cdot 1 \cdot \tau$ ; dels joves de G2,  $n \cdot 2 \cdot \tau$ . En total,  $3n\tau$ . Amb  $2n$  grans, cada gran rebria la transferència

$$\tau' = \frac{3}{2}\tau.$$

• **Decisió de prestar/manllevar dels membres de G1.** Tot jove del grup G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_1 = c_1 \cdot c_1' \\ \text{sotmès a} \quad & c_1 + l_1 + \tau \cdot 1 = 1 \\ & c_1' = R \cdot l_1 + \frac{3}{2}\tau \end{aligned}$$

on

$c_1$  és el consum present de l'individu (de jove),

$c_1'$  és el consum del període següent (de gran),

$l_1$  és el volum de préstecs demandats,

$\tau$  és la taxa impositiva sobre la dotació que es paga de jove i

$R$  és la taxa d'interès bruta.

Aïllant el consum en les dues restriccions i inserint el resultat en la funció objectiu, el problema es redueix a

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_1 = (1 - l_1 - \tau) \cdot \left( R \cdot l_1 + \frac{3}{2}\tau \right) \\ \text{respecte d}'l_1 \end{aligned}$$

La solució:

$$l_1 = \frac{1 - \tau}{2} - \frac{3\tau}{4R}.$$

• **Decisió de prestar/manllevar dels membres de G2.** Tot jove del grup G2 s'enfronta al problema de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_2 = c_2 \cdot c_2' \\ \text{sotmès a} \quad & c_2 + l_2 + \tau \cdot 2 = 2 \\ & c_2' = 2 + R \cdot l_2 + \frac{3}{2} \tau \end{aligned}$$

d'on es conclou que

$$l_2 = 1 - \tau - \frac{1}{R} - \frac{3\tau}{4R}.$$

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** En l'equilibri del mercat de préstecs  $n \cdot l_1 = |n \cdot l_2|$ . Un cop cancel·lat  $n$ ,

$$l_1 + l_2 = 0.$$

Per tant, la taxa d'interès  $R$  d'equilibri satisfà

$$\left(\frac{1-\tau}{2} - \frac{3\tau}{4R}\right) + \left(1 - \tau - \frac{1}{R} - \frac{3\tau}{4R}\right) = 0.$$

Així doncs,

$$R = \frac{2 + 3\tau}{3 - 3\tau}.$$

De manera anàloga a l'opció 1, la taxa d'interès depèn positivament de la taxa impositiva  $\tau$ . En l'equilibri,

$$l_1 = \frac{1}{2} - \left(\frac{\tau}{2} + \frac{3\tau}{4R}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\tau(13 - 3\tau)}{8 + 12\tau}$$

que és una oferta de préstecs inferior a quan no hi havia impostos ni transferències ( $l_1 = 1/2$ ).

Es deixa com a exercici determinar els losts de consum i la utilitat de joves i grans, i comparar els resultats amb els del cas sense impostos ni transferències.

#### 4. Opció 3: impost proporcional sobre el consum

---

• **Impost sobre el consum.** Cada jove paga una quantitat proporció fixa  $0 < \tau < 1$  del seu consum. La quantitat total recaptada entre els joves es distribueix igualitàriament entre els grans del període, de manera que cada gran rep la quantitat  $\tau'$  del bé. Dels joves de G1 es recaptaria  $n \cdot c_1 \cdot \tau$ ; dels joves de G2,  $n \cdot c_2 \cdot \tau$ . En total,  $n\tau(c_1 + c_2)$ . Amb  $2n$  grans, cada gran rebria la transferència

$$\tau' = \frac{c_1 + c_2}{2} \tau.$$

S'assumeix que els joves ignoren aquesta relació i, per tant, tracten  $\tau'$  com un paràmetre.

• **Decisió de prestar/manllevar dels membres de G1.** Tot jove del grup G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_1 = c_1 \cdot c_1' \\ \text{sotmès a} \quad & c_1 + l_1 + \tau \cdot c_1 = 1 \\ & c_1' = R \cdot l_1 + \tau' \end{aligned}$$

on

$c_1$  és el consum present de l'individu (de jove),  
 $c_1'$  és el consum del període següent (de gran),  
 $l_1$  és el volum de préstecs demandats,  
 $\tau$  és la taxa impositiva sobre el consum que es paga de jove  
 $\tau'$  és la transferència (pensió) que es rep de gran i  
 $R$  és la taxa d'interès bruta.

Aïllant el consum en les dues restriccions i inserint el resultat en la funció objectiu, el problema es redueix a

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_1 = \left(\frac{1-l_1}{1+\tau}\right) \cdot (R \cdot l_1 + \tau') \\ \text{respecte d}'l_1 \end{aligned}$$

Com que  $\tau$  és un paràmetre, aquest problema és equivalent a

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_1 = (1 - l_1) \cdot (R \cdot l_1 + \tau') \\ \text{respecte d}'l_1 \end{aligned}$$

La solució:

$$l_1 = \frac{1}{2} - \frac{\tau'}{2R}.$$

• **Decisió de prestar/manllevar dels membres de G2.** Tot jove del grup G2 s'enfronta al problema de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_2 = c_2 \cdot c_2' \\ \text{sotmès a} \quad & c_2 + l_2 + \tau \cdot c_2 = 2 \\ & c_2' = 2 + R \cdot l_2 + \tau' \end{aligned}$$

d'on es conclou que

$$l_2 = 1 - \frac{1}{R} - \frac{\tau'}{2R}.$$

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** En l'equilibri del mercat de préstecs  $n \cdot l_1 = |n \cdot l_2|$ . Un cop cancel·lat  $n$ ,

$$l_1 + l_2 = 0.$$

Per consegüent, la taxa d'interès  $R$  d'equilibri satisfà

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau'}{2R}\right) + \left(1 - \frac{1}{R} - \frac{\tau'}{2R}\right) = 0.$$

D'aquí que

$$R = \frac{2(1 + \tau')}{3}.$$

Com que

$$l_1 = \frac{1}{2} - \frac{\tau'}{2R} = \frac{1}{2} - \frac{3\tau'}{4 + 4\tau'}$$

i

$$l_2 = 1 - \frac{1}{R} - \frac{\tau'}{2R} = 1 - \frac{6 + 3\tau'}{4 + 4\tau'}$$

els consums de joves són

$$c_1 = \frac{1 - l_1}{1 + \tau} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3\tau'}{4 + 4\tau'}}{1 + \tau} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \tau} + \frac{3\tau'}{(1 + \tau)(4 + 4\tau')}$$

i

$$c_2 = \frac{2 - l_2}{1 + \tau} = \frac{1 + \frac{6 + 3\tau'}{4 + 4\tau'}}{1 + \tau} = \frac{1}{1 + \tau} + \frac{6 + 3\tau'}{(1 + \tau)(4 + 4\tau')}.$$

Tot sabent que

$$\tau' = (c_1 + c_2) \frac{\tau}{2}$$

es conclou que

$$\tau' = \left( \frac{\frac{1}{2}}{1 + \tau} + \frac{6 + 6\tau'}{(1 + \tau)(4 + 4\tau')} \right) \frac{\tau}{2} = \left( \frac{\frac{1}{2}}{1 + \tau} + \frac{3}{2(1 + \tau)} \right) \frac{\tau}{2} = \left( \frac{2}{1 + \tau} \right) \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{1 + \tau}.$$

En resum,

$$R = \frac{2}{3} (1 + \tau') = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{\tau}{1 + \tau} \right) = \frac{2 + 4\tau}{3 + 3\tau}.$$

Atès que  $\frac{dR}{d\tau} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1 + \tau)^2} > 0$ , es manté el resultat que la taxa d'interès depèn positivament dels impostos (en aquest cas, de la taxa impositiva sobre el consum).

Es deixa com a exercici determinar els losts de consum i la utilitat de joves i grans, i comparar els resultats amb els del cas sense impostos ni transferències.

## 5. Suggestiments

1. Analitza l'opció 3 si hom sap que la transferència depèn del propi consum.
2. Analitza cada opció si els grans paguen els impostos i els joves reben les transferències.
3. Analitza cada opció si els joves saben que han de pagar l'impost però ignoren que rebran una transferència de grans.
4. Compara la utilitat de joves i grans en cadascuna de les tres opcions i amb el cas sense estructura fiscal.