

# 1. Un exemple amb dos béns

## 1. Descripció de l'economia

---

- Hi ha dos béns, B1 i B2. Cap dels dos no es pot produir ni acumular.
- Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb  $n$  membres.
- Hom viu dos períodes consecutius.
- Els consumidors joves només obtenen utilitat de B1. Tot consumidor jove té la funció d'utilitat  $u = c \cdot c'$ , on  $c$  és el consum del bé B1 de jove i  $c'$  el consum de B1 de gran.
- Els consumidors grans obtenen utilitat dels dos béns. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat  $u' = c' \cdot d'$ , on  $c'$  és el consum del bé B1 de gran i  $d'$  el consum de B2 de gran.
- Cada jove de G1 té com a dotació només una unitat de B1. Cada jove de G2 té com a dotació només dues unitats de B1.
- Cada gran de G1 té com a dotació només una unitat de B2. Cada gran de G2 té com a dotació només dues unitats de B1.

## 2. Anàlisi

---

L'anàlisi procedeix per inducció cap enrere: primer es resol el problema de decisió dels grans i, donada aquesta solució, es resol a continuació el problema dels joves. El motiu és que els joves (a diferència de l'exemple anterior) no poden establir el consum dels grans del bé B2 (per contra, en l'exemple anterior, l'única variable que afectava la utilitat dels grans —el consum del bé B1— quedava completament determinada per la decisió dels joves).

Sigui  $p$  el preu de B2 en termes de B1: quantes unitats de B1 cal lliurar per unitat de B2.

- **Decisió de prestar/manllevar dels membres grans de G1.** Tot gran del grup G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_1' = c_1' \cdot d_1' \\ \text{sotmès a} & c_1' = R \cdot l_1 + (1 - d_1') \cdot p' \end{array}$$

on

$c_1'$  és el consum de B1,

$d_1'$  és el consum de B2,

$l_1$  és el volum de préstecs de jove

$R$  és la taxa d'interès bruta del període anterior i

$p'$  és el preu de B2 (en unitats de B1), de manera que

$(1 - d_1') \cdot p'$  és l'ingrés de B1 per la venda de la dotació de B2 no consumida.

Inserint la restricció en la funció objectiu, es tracta de maximitzar

$$u_1' = (R \cdot l_1 + (1 - d_1') \cdot p') \cdot d_1'$$

respecte de  $d_1'$ . La solució:

$$d_1' = \frac{R \cdot l_1 + p'}{2p'}$$

• **Decisió de prestar/manllevar dels membres grans de G2.** Tot gran del grup G2 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_2' = c_2' \cdot d_2' \\ \text{sotmès a} & c_2' + d_2' \cdot p' = 2 + R \cdot l_2 \end{array}$$

on

$c_2'$  és el consum de B1,

$d_2'$  és el consum de B2,

$l_2$  és el volum de préstecs de jove

$R$  és la taxa d'interès bruta del període anterior i

$p'$  és el preu de B2 (en unitats de B1), de manera que

$d_2' \cdot p'$  és la despesa de bé B1 per la compra del bé B2.

Inserint la restricció en la funció objectiu, es tracta de maximitzar

$$u_2' = (2 + R \cdot l_2 - d_2' \cdot p') \cdot d_2'$$

respecte de  $d_2'$ . La solució:

$$d_2' = \frac{R \cdot l_2 + 2}{2p'}$$

• **Equilibri en el mercat del bé B2.** Com que els joves no valoren B2, només participen els grans en el mercat de B2. Assumint-lo competitiu, el preu  $p'$  de B2 s'obté d'igualar oferta i demanda de B2. La quantitat total oferta és

$$n \cdot (1 - d_1')$$

i la quantitat total demandada

$$n \cdot d_2'$$

Per tant,  $p'$  satisfà

$$1 - d_1' = d_2'$$

o

$$1 - \frac{R \cdot l_1 + p'}{2p'} = \frac{R \cdot l_2 + 2}{2p'}$$

o

$$R \cdot (l_1 + l_2) = p' - 2.$$

La condició d'equilibri en el mercat de préstecs es redueix a

$$l_1 + l_2 = 0$$

i, en conseqüència,

$$p' = 2 \frac{\text{unitats B1}}{\text{unitat B2}}.$$

Això fa que

$$d_1' = \frac{R \cdot l_1 + 2}{4}$$

i

$$d_2' = \frac{R \cdot l_2 + 2}{4}.$$

• **Decisió de prestar/manllevar dels membres joves de G1.** Tot jove del grup G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_1 = c_1 \cdot c_1' \\ \text{sotmès a} \quad & c_1 + l_1 = 1 \\ & c_1' = R \cdot l_1 + (1 - d_1') \cdot p' \end{aligned}$$

on

$c_1$  és el consum de jove de B1,  
 $c_1'$  és el consum de gran de B1,  
 $d_1'$  és el consum de gran de B2,  
 $p'$  és el preu de B2 (en unitats de B1),  
 $l_1$  és el volum de préstecs i  
 $R$  és la taxa d'interès bruta.

Atès que el jove anticipa la solució

$$d_1' = \frac{R \cdot l_1 + p'}{2p'} = \frac{R \cdot l_1 + 2}{4}$$

al seu problema de gran, la segona restricció esdevé

$$c_1' = R \cdot l_1 + \left(1 - \frac{R \cdot l_1 + 2}{4}\right) \cdot 2$$

o

$$c_1' = \frac{R \cdot l_1 + 2}{2}.$$

Després d'introduir les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de maximitzar

$$u_1 = (1 - l_1) \cdot \left( \frac{R \cdot l_1 + 2}{2} \right)$$

respecte d' $l_1$ .

La solució:

$$l_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{R}.$$

• **Decisió de prestar/manllevar dels membres de G2.** Tot jove del grup G2 s'enfronta al problema de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_2 = c_2 \cdot c_2' \\ \text{sotmès a} \quad & c_2 + l_2 = 2 \\ & c_2' + d_2' \cdot p' = 2 + R \cdot l_2 \end{aligned}$$

Emprant les solucions prèviament obtingudes, al segona restricció és

$$c_2' + \left( \frac{R \cdot l_2 + 2}{4} \right) \cdot 2 = 2 + R \cdot l_2$$

o

$$c_2' = 1 + \frac{R \cdot l_2}{2}.$$

Després d'introduir les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de maximitzar

$$u_2 = (2 - l_2) \cdot \left( 1 + \frac{R \cdot l_2}{2} \right)$$

respecte d' $l_2$ .

La solució:

$$l_2 = 1 - \frac{1}{R}.$$

• **Equilibri en el mercat de préstecs.** Només participen els joves en el mercat de préstecs. Assumint-lo competitiu, la taxa d'interès  $R$  dels préstecs s'obté (un cop cancel·lat  $n$ ) de la condició

$$l_1 + l_2 = 0;$$

això és,

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{R} \right) + \left( 1 - \frac{1}{R} \right) = 0.$$

La solució:

$$R = \frac{4}{3}.$$

Els préstecs són

$$l_1 = -\frac{1}{4}$$
$$l_2 = \frac{1}{4}.$$

Si es comparen aquests resultats amb els de l'exemple anterior, es conclou que la introducció del segon bé fa intercanviar les posicions dels participants en el mercat de préstecs: abans, els joves de G1 eren prestadors i ara esdevenen prestataris; abans, els joves de G2 eren prestataris i ara són prestadors.

El consum de B1 entre els joves es distribueix així:

$$c_1 = 1 - l_1 = \frac{5}{4}$$
$$c_2 = 2 - l_2 = \frac{7}{4}.$$

En comparació amb la situació anterior, els joves de G1 en consumeixen més ( $\frac{1}{2}$  s'incrementa a  $\frac{5}{4}$ ) i els joves de G2 en consumeixen menys ( $\frac{5}{2}$  cau fins a  $\frac{7}{4}$ ).

El consum de B1 entre els grans es distribueix d'aquesta manera:

$$c_1' = \frac{R \cdot l_1 + 2}{2} = \frac{5}{6}$$
$$c_2' = 1 + \frac{R \cdot l_2}{2} = \frac{7}{6}.$$

En comparació amb la situació anterior, els grans de G1 en consumeixen més ( $\frac{1}{3}$  puja a a  $\frac{5}{6}$ ) i els grans de G2 en consumeixen menys ( $\frac{5}{3}$  cau fins a  $\frac{7}{6}$ ).

És destacable que la distribució del consum de B1 entre joves i grans es manté constant: els joves fan el 60% del consum ( $3n$  sobre la dotació total  $5n$  de B1) i els grans el 40% restant.

El consum de B2 dels grans és:

$$d_1' = \frac{R \cdot l_1 + 2}{4} = \frac{5}{12}$$
$$d_2' = \frac{R \cdot l_2 + 2}{4} = \frac{7}{12}.$$