Paritats

1. Paritat no coberta d'interessos

La paritat no coberta d'interessos és una relació entre quatre variables:

- la taxa de canvi e (expressada en \$/€);
- la taxa d'interès domèstica i;
- la taxa d'interès estrangera i*;
- l'expectativa e^e sobre la taxa de canvi futura.

La relació presumeixen un seguit de condicions relativament restrictives:

- per a cada economia, es pot definir una taxa d'interès representativa del conjunt de taxes de l'economia (per exemple, la taxa d'interès d'un dipòsit d'estalvi o a termini);
- les taxes d'interès no es veuen significativament afectades per les compres o vendes de monedes i és l'únic que interessa els inversors;
- no hi ha risc canviari;
- no hi ha risc en el cobrament d'interessos;
- no hi ha costs de transaccions significatius;
- les dues taxes representatives es refereixen al mateix interval temporal, entre els moments t i $t + 1$;
- existeix una expectativa generalitzadament acceptada sobre la taxa de canvi futura (t + 1), de manera que no hi ha incertesa sobre el valor futur de la taxa de canvi;
- els inversors financers només tenen dues opcions d'inversió (comprar un actiu financer amb rendibilitat igual a la taxa d'interès domèstica i o comprar un actiu financer amb rendibilitat igual a la taxa d'interès estrangera i*).

La paritat no coberta d'interessos és la condició segons la qual les dues opcions d'inversió (la domèstica i l'estrangera) proporcionen el mateix rendiment expectat, mesurat en la mateixa moneda. Mesurant els rendiments en euros, cada opció tendria el següent rendiment per euro.

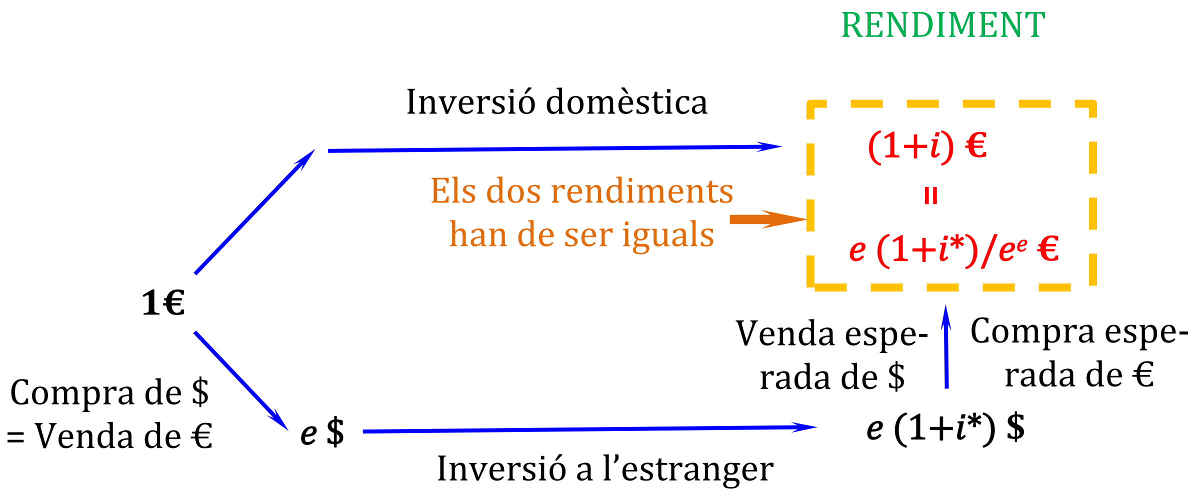
- Opció 1: invertir en l'actiu domèstic. Cada euro invertit en t en l'actiu financer domèstic proporcionaria (1 + i) € en t + 1.

- Opció 2: invertir en l'actiu estranger. Donada la taxa de canvi d'e \$/€, en t, cada euro es podria convertir en e \$. Si aquest import s'inverteix, també en t, en l'actiu financer estranger, es rebria e(1 + i*) \$ en t + 1. Per a expresar aquest rendiment en euros, cal dividir per la taxa de canvi e^e que en t es creu que hi haurà en t + 1. Així, l'opció 2 proporciona e(1 + i*)/e^e € per cada euro esmerçat.

La condició de la paritat no coberta se satisfà quan el rendiment segur 1 + i de l'opció 1 coincideix amb el rendiment expectat e(1 + i*)/e^e de l'opció 2. Per tant:

$$1 + i = \frac{e(1 + i^*)}{e^e}. \tag{1}$$

El següent esquema resumeix la construcció de la paritat no coberta.

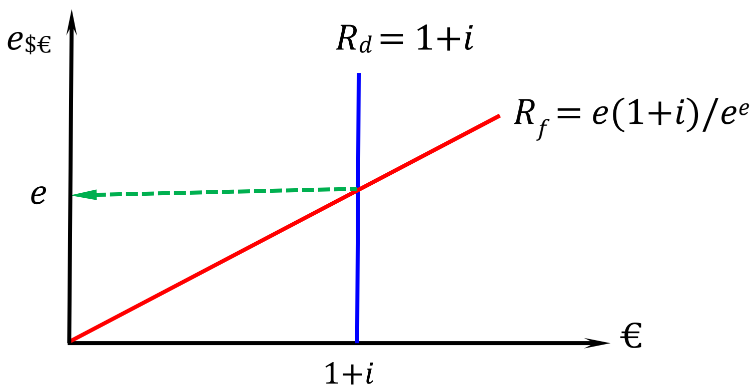


La paritat no coberta permet de construir un model, de molt curt termini, de la taxa de canvi. La condició (1) expressa la igualtat entre dues funcions de rendiment:

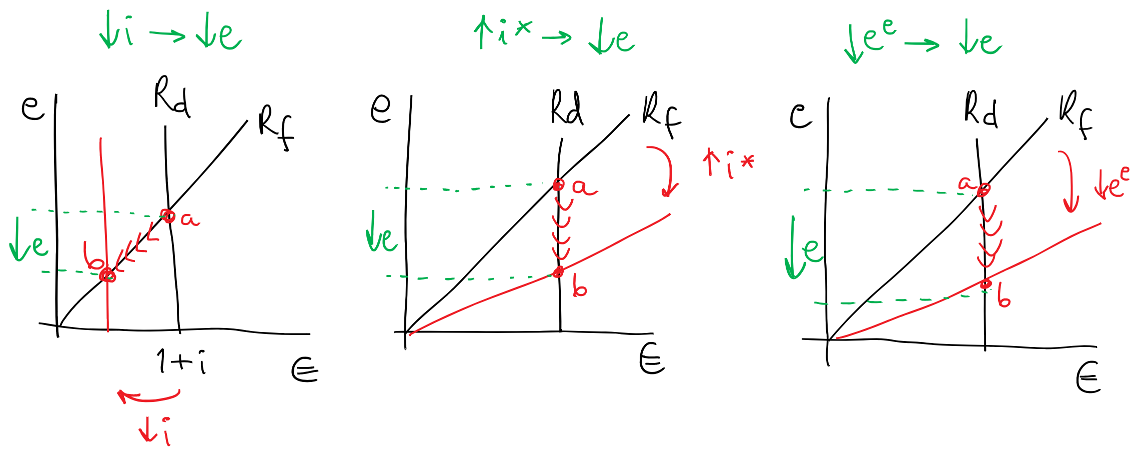
- la funció de rendiment domèstic $R_d = 1 + i$; i
- la funció de rendiment forani $R_f = e\frac{1+i^*}{e^e}$.

La funció R_d no depèn de la taxa de canvi. La funció R_f en depèn linealment, prenent el terme $\frac{1+i^*}{e^e}$ com a un paràmetre (una constant).

La gràfica a continuació mostra una representació gràfica de les dues funcions, en l'espai on es mesura la taxa de canvi e en l'eix vertical i es mesura el rendiment expectat en euros en l'eix horitzontal.



La intersecció de les dues rectes identifica el valor de la taxa de canvi que iguala els rendiments i, per tant, satisfà la paritat (no coberta). Es representa a continuació l'efecte sobre la taxa de canvi (consistent amb la paritat) de canvis en els paràmetres. En particular, s'analitza l'efecte d'una reducció de la taxa d'interès domèstica i; d'un augment de la taxa d'interès estrangera i^*; i d'una disminució en la taxa de canvi expectada e^e (de creure que l'euro es depreciarà respecte del dòlar). Totes tres alteracions provoquen una depreciació de l'euro en relació amb el dòlar.



És més comú de presentar la condició de la paritat no coberta en una versió aproximada de l'equació (1). Sigui

$$E^e = \frac{e^e - e}{e}$$

la taxa expectada d'apreciació de la taxa de canvi (expressada en tant per u; per a obtenir un percentatge es multiplica la fórmula per 100). Per exemple, si $e^e = 3$ \$/€ i $e = 2$ \$/€, aleshores l'expectativa és que l'euro s'apreciï d'un

$$E^e = \frac{e^e - e}{e} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

respecte del dòlar. Si $e^e < e$, llavors es tractaria d'una taxa expectada de depreciació. Per exemple, si $e^e = 3$ \$/€ i $e = 4$ \$/€,

$$E^e = \frac{e^e - e}{e} = \frac{3-4}{4} = \frac{-1}{4} = -0{,}25 = -25\%$$

significa que es creu que l'euro es depreciarà d'un 25% amb relació al dòlar.

Partint d'(1), s'obté

$$\frac{e^e}{e}(1+i) = 1 + i^*$$

i d'aquí

$$\left(\frac{e^e}{e} - 1 + 1\right)(1+i) = 1 + i^*$$

$$(E^e + 1)(1+i) = 1 + i^*$$

$$1 + i + E^e + E^e i = 1 + i^*$$

i

$$E^e + E^e i = i^* - i.$$

Quan els valors d'i i E^e són prou petits, el seu producte pren un valor gairebé negligible. Tot plegat justifica la versió aproximada de la paritat no coberta, segons la qual

$$E^e \approx i^* - i. \tag{2}$$

Segons la versió aproximada de la paritat no coberta, la taxa expectada d'apreciació de l'euro respecte del dòlar és aproximadament igual a la taxa d'interès estrangera (la del dòlar) menys la taxa d'interès domèstica (la de l'euro). En la fórmula (2) les tres variables poden expressar-se en percentatges.

Com a il·lustració, si i^* = 5% i i = 3%, aleshores la paritat no coberta exigeix una apreciació de l'euro en relació amb el dòlar d'aproximadament un 2%. Com que la fórmula exacta és

$$E^e + E^e i = i^* - i$$

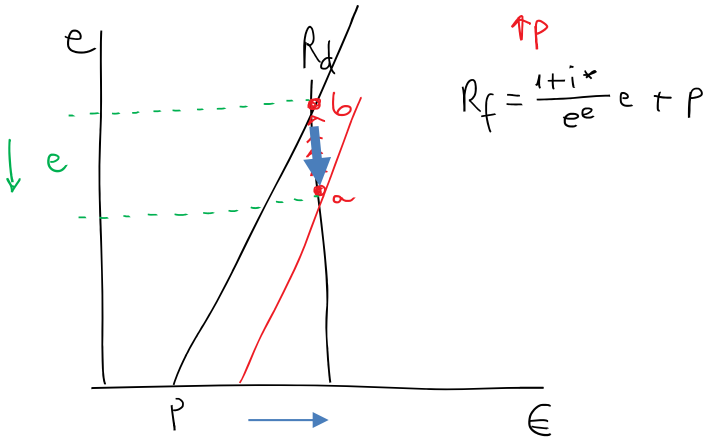
es comet un error igual a $E^e i$. Per exemple, si $e = 2$ $/€, per (1), cal que $e^e = \frac{e(1+i^*)}{1+i} = \frac{2(1+0{,}05)}{1+0{,}03} = \frac{210}{103} = 2{,}03883$ $/€. El pas d'$e = 2$ $/€ a $e^e = 2{,}03883$ $/€ representa un canvi del 1,9417%, prou proper al valor aproximat del 2%.

En ocasions, és raonable suposar que les dues inversions, la domèstica i la forània, no són substitutives perfectes. Una raó és que una de les dues es considera més arriscada; per exemple, perquè es coneixen pitjor les característiques d'un país que de l'altre o, senzillament, perquè la inversió a un d'ells està subjecta a més incertesa.

La inclusió d'aquesta asimetria porta a una generalització de la condició de paritat (1) aplicant-t'hi una prima de risc p a una de les dues inversions. En particular, (1) prendria la forma

$$1 + i = \frac{e(1+i^*)}{e^e} + p. \tag{3}$$

La prima p (que pot ser positiva o negativa, en funció d'on hi hagi el cost superior de la inversió, real o percebut) serviria per a compensar els possibles costs, inconvenients, riscs i incerteses de la inversió a un dels països. Sobre la base de (3), es pot desenvolupar un model sobre la determinació de la taxa de canvi una mica més general. La gràfica següent mostraria l'efecte sobre la taxa de canvi de l'euro amb relació amb el dòlar d'un increment de la prima p.



2. Paritat coberta d'interessos

La paritat coberta d'interessos és una relació entre quatre variables:

- la taxa de canvi (taxa de canvi a la vista) e (expressada en \$/€);
- la taxa d'interès domèstica i;
- la taxa d'interès estrangera i^*;
- la taxa de canvi a termini e^F.

La taxa a termini e^F va associada amb un contracte de futurs, on les parts es comprometen a comprar/vendre una moneda a canvi d'una altra en un moment futur segons el preu que estableix e^F.

La paritat coberta és anàloga a la no coberta. L'única diferència és que la taxa de canvi del futur no és una expectativa sinó un valor cert, conegut. Com en el cas de la paritat no coberta, la paritat coberta d'interessos és la condició segons la qual les dues opcions d'inversió (la domèstica i l'estrangera) proporcionen el mateix rendiment cert, mesurat en la mateixa moneda. Mesurant els rendiments en euros, cada opció tendria el següent rendiment per euro.

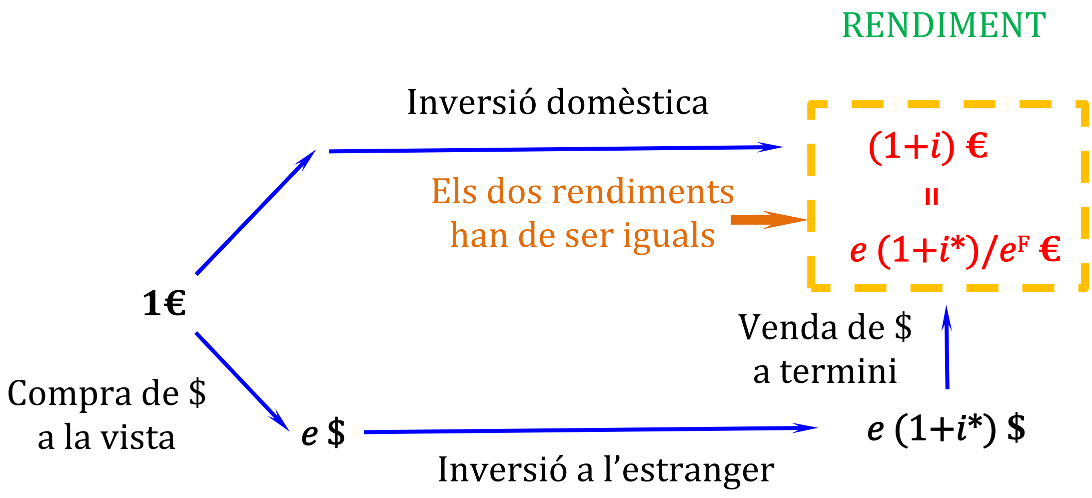
- Opció 1: invertir en l'actiu domèstic. Cada euro invertit en t en l'actiu financer domèstic proporcionaria $(1 + i)$ € en $t + 1$.

- Opció 2: invertir en l'actiu estranger. Donada la taxa de canvi d'e \$/€, en t, cada euro es podria convertir en e \$. Si aquest import s'inverteix, també en t, en l'actiu financer estranger, es rebria $e(1 + i^*)$ \$ en $t + 1$. La taxa a termini e^F permet vendre aquests euros en $t + 1$ i obtenir-ne $e(1 + i^*)/e^F$ € per cada euro esmerçat.

La condició de la paritat coberta se satisfà quan el rendiment segur $1 + i$ de l'opció 1 coincideix amb el rendiment, també segur, $e(1 + i^*)/e^F$ de l'opció 2. Per tant:

$$1 + i = \frac{e(1 + i^*)}{e^F}. \tag{4}$$

El següent esquema resumeix la construcció de la paritat coberta.

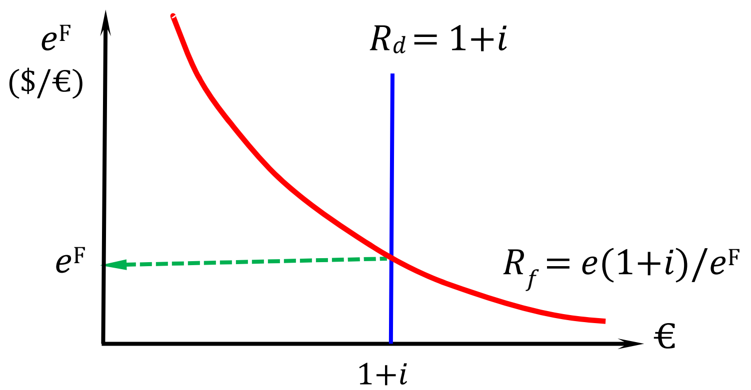


De la paritat coberta se'n deriva un model de la taxa de canvi a termini. La condició (4) expressa la igualtat entre dues funcions de rendiment:

- la funció de rendiment domèstic $R_d = 1 + i$; i
- la funció de rendiment forani $R_f = e\frac{1+i^*}{e^F}$.

La funció R_d no depèn de la taxa de canvi a termini e^F. La funció R_f en depèn parabòlicament, atès que e^F apareix en el denominador (el terme $e(1 + i^*)$ és considera ara un paràmetre).

La gràfica a continuació mostra una representació gràfica de les dues funcions, en l'espai on es mesura la taxa de canvi e en l'eix vertical i es mesura el rendiment expectat en euros en l'eix horitzontal.



En el model basat en la paritat no coberta, la taxa de canvi e estava determinada per tres altres variables: i, i^* i e^e. Ara, la taxa de canvi a termini e^F queda determinada per la taxa a la vista e i les taxes d'interès i i i^*.

L'expressió (4) pot manipular-se per a obtenir una condició anàloga a (2), això és, una versió aproximada de la paritat coberta:

$$E^F \approx i^* - i \tag{5}$$

on

$$E^F = \frac{e^F - e}{e}$$

representa la prima a termini: l'excés de la taxa a termini respecte de la taxa a la vista, en relació amb la taxa a la vista (en quin percentatge la taxa a termini se separa de la taxa a la vista). Si $e^F - e$, aleshores la prima és negativa: l'euro es deprecia a termini amb relació al seu valor a la vista (valor en el present).

La igualtat $1 + i = \frac{e(1+i^*)}{e^F}$ que caracteritza la paritat coberta pot justificar-se de la següent manera. Suposem que la igualtat no es compleix: sigui $1 + i > \frac{e(1+i^*)}{e^F}$. Es deixa com a exercici reproduir el següent argument quan $1 + i < \frac{e(1+i^*)}{e^F}$. Es tracta de demostrar que, quan no es produeix la igualtat de rendiments:

- hi ha oportunitats d'arbitratge (es poden aconseguir beneficis segurs); i
- l'aprofitament d'aquestes oportunitats redueix la desigualtat de rendiments.

Si l'anterior es produeix, aleshores que hi ha hagi desigualtat de rendiments no és una situació estable i, a més, l'arbitratge tendiria a eliminar la desigualtat. La conclusió seria que només amb igualtat de rendiments la situació resultant seria estable (no hi hauria oportunitats d'arbitratge).

L'explotació de tota oportunitat d'arbitratge passa per comprar el que és barat i vendre el que és car. Tenir $1 + i > \frac{e(1+i^*)}{e^F}$ equival a $e^F > \frac{e(1+i^*)}{1+i}$. Això suggereix que l'euro té més valor a termini que a la vista, la qual cosa suggereix comprar euros a la vista i vendre'ls a termini. El següent conjunt d'operacions pretén comprovar si aquesta estratègia funciona, tot assumint-se que no es tenen recursos per a fer l'arbitratge. Per a facilitar l'exposició, suposem que:

$$e^F = 3\ \$/€$$
$$e = 2\ \$/€$$
$$i = 10\%$$
$$i^* = 20\%.$$

- Pas 0: vendre euros a termini. D'entrada es venen a termini 55 €, que s'hauran de vendre a canvi de dòlars en el futur al preu que marca la taxa a termini, $e^F = 3$ $/€. Els següents passos deixaran clar el motiu d'aquesta operació.
- Pas 1: demanar un préstec de dòlars. En concret, es manlleven 100 $. Això implica haver de pagar en el futur 100 $ més un 20%, això és, 120 $.
- Pas 2: es venen els dòlars a canvi d'euros en el mercat a la vista. Per tant, se n'obtenen 50 € de la venta dels 100 $.
- Pas 3: s'inverteixen els euros. Atès que la taxa domèstica és del 10%, el préstec dels 50 € generaria un rendiment brut de 50 euros més un 10%: 55 €.

- Pas 4: s'executa la venda d'euros a termini acordada inicialment. El pas 3 ha generat els 55 € que, per contracte en el pas 0, s'havien de lliurar ara. Al preu e^F = 3 $/€, es reben 165 $ a canvi dels 55 €.
- Pas 5: pagament del deute en dòlars. El pas 1 va generar l'obligació de pagar ara 120 $. En tenim 165 del pas 4.
- Pas 6: embutxacar-se els beneficis. Descomptats els 120 $ a pagar en concepte de retorn del préstec del pas 1, en queden 45 dels 165 aconseguits en el pas 5. En resum, s'ha aconseguit 45 $ del no-res. De fet, multiplicant l'escala de les operacions, s'obtindrien 45 $ per cada 100 $ de manllevats en el pas 1 (caldria determinar el volum corresponent d'euros a vendre a termini en el pas 0). Si interessés tenir euros en comptes de dòlars, es podrien canviar els 45 $ en el mercat de divises a la vista del moment.

La seqüència d'operacions anterior mostra com aprofitar les oportunitats d'arbitratge quan $e^F > \frac{e(1+i^*)}{1+i}$. Però quins efectes sobre aquestes variables tindrien les operacions?

- En primer lloc, la venda d'euros a termini del pas 0 tendiria a rebaixar el valor de l'euro a termini. Per consegüent, e^F tendiria a caure i, d'aquesta manera, la desigualtat $e^F > \frac{e(1+i^*)}{1+i}$ tendiria a reduir-se.
- El pas 1 contribueix a incrementar la demanda de préstecs en dòlars, la qual cosa posaria pressió a l'alça sobre i^*. Això contribuiria a què el valor més petit $\frac{e(1+i^*)}{1+i}$ de la desigualtat $e^F > \frac{e(1+i^*)}{1+i}$ tendís a pujar.
- La compra d'euros en el mercat a la vista en el pas 2 representa un augment de la demanda d'euros i, d'aquí, l'euro tendiria a apreciar-se respecte del dòlar. Com a conseqüència, e s'incrementaria i novament hi hauria pressió per a què el terme més petit $\frac{e(1+i^*)}{1+i}$ de la desigualtat $e^F > \frac{e(1+i^*)}{1+i}$ augmentés de valor.
- Finalment, el préstec d'euros del pas 3 equival a un increment de l'oferta de liquiditat en el mercat domèstic de liquiditat, per la qual cosa la taxa domèstica i tendiria a minvar. Un cop més, aquesta variació contribuiria a augmentar $\frac{e(1+i^*)}{1+i}$ i a fer que el seu valor s'apropi a e^F.

Per tot plegat, les operacions dutes en els pasos 0, 1, 2 i 3 tendirian a reduir la diferència entre e^F i $\frac{e(1+i^*)}{1+i}$. Mentre es mantingui la diferència, els pasos anteriors continuaran generant beneficis segurs. Aquest mannà s'acaba quan s'assoleix la igualtat entre e^F i $\frac{e(1+i^*)}{1+i}$.

L'existència simultània de taxes de canvi a la vista i a termini ofereix la possibilitat d'especular a termini. L'especulació a termini té un avantatge sobre l'especulació a la vista: en principi, es pot realitzar sense disposar d'efectiu o de facilitats de crèdit per a pagar les transaccions. Per definició, les compres a termini es paguen en el futur, no quan s'acorden (a diferència de les compres a la vista).

Com a il·lustració, sigui $e^F = 2$ $/€ i suposem que s'expecta que la taxa de canvi a la vista futura (la taxa de canvi en el moment en què cal que efectives les compres a la taxa e^F) és $e^e =$ 3 $/€. Aquests valors suggereixen que (es creu que), en el futur, l'euro serà més barat segons la taxa a termini i més car segons la taxa a la vista. Com sempre, caldrà comprar l'euro on és barat i vendre'l on és car.

Concretant, comprem 100 € a termini. Ara per ara, això significa signar un contracte on ens comprometem a comprar 100 € en el futur segons la taxa $e^F = 2$ $/€ (per consegüent, caldrà que aleshores paguem 200 $ pels 100 €).

Quan arriba el moment de complir amb el contracte, comprem els 100 € i, si l'encertem amb la taxa de canvi a la vista d'aleshores, podrem vendre els 100 € segons el canvi $e^e = 3$ $/€. Això comporta aconseguir 300 $, suficients per a pagar els 200 $ del contracte de futurs. El benefici net són 100 $ (per cada 100 € que es compren a termini).

[Com és que aconseguim els 100 € i en disposem abans de pagar-los? Una explicació és que fem les dues operacions amb un únic agent, com ara un banc. Signem el contracte de futurs amb el banc, arribat el moment li fem la venta a la vista i el banc s'encarrega de liquidar les dues operacions pel net. Aquesta pràctica (si el banc no ens exigeix alguna mena de dipòsit de garantia) reforça la idea que l'especulació a termini no requereix disposar d'inici de mitjans per a invertir en l'especulació. Naturalment, si errem en la predicció de manera seriosa, el saldo de l'operació és negatiu i tindrem un deute amb el banc.]

3. Paritat del poder adquisitiu

La teoria de la paritat del poder adquisitiu (versió absoluta) sosté que la taxa de canvi entre dues monedes s'ajusta per a igualar el poder de compra de les monedes en les dues economies. Essent P l'IPC domèstic i P^* l'IPC estranger, la taxa de canvi e_{PPA} de paritat del poder adquisitiu satisfà

$$\boxed{e_{PPA} = \frac{P^*}{P} \ .}$$

La teoria de la paritat del poder adquisitiu (versió relativa) sosté que la variació $E = \frac{e'-e}{e}$ de la taxa de canvi entre dues monedes està determinada per les diferències entre les taxes d'inflació:

$$E \approx \pi^* - \pi.$$

Segons la paritat relativa, la moneda domèstica s'aprecia quan el nivell de preus estranger creix més ràpidament que el nivell de preus domèstic i la magnitud de l'apreciació es correspon amb la difèrencia de la taxa de creixement dels preus. Segons la paritat absoluta, la moneda domèstica s'aprecia simplement quan el nivell de preus estranger és més gran que el domèstic.

La paritat absoluta és més estricta que la relativa. La condició $E \approx \pi^* - \pi$ pot derivar-se de la condició $e_{PPA} = \frac{P^*}{P}$. De fet, assumint-ne l'absoluta,

$$1 + E = 1 + \frac{e' - e}{e} = 1 + \frac{e'}{e} - 1 = \frac{e'}{e} = \frac{\frac{P'^*}{P'}}{\frac{P^*}{P}} = \frac{\frac{P'^*}{P^*}}{\frac{P'}{P}} = \frac{\frac{P'^*}{P^*} - 1 + 1}{\frac{P'}{P} - 1 + 1} = \frac{\pi^* + 1}{\pi + 1}.$$

D'aquí

$$(1 + E)(1 + \pi) = 1 + \pi^*$$

i

$$1 + E + \pi + E\pi = 1 + \pi^*$$

d'on s'obté l'aproximació

$$E \approx \pi^* - \pi$$

quan s'assumeix que el producte $E\pi$ és menyspreable.

4. Implicació de la paritat no coberta i la paritat relativa

Per la paritat no coberta,

$$E^e \approx i^* - i.$$

Per la paritat relativa,

$$E^e \approx \pi^{e*} - \pi^e.$$

Combinant-les,

$$i^* - i \approx \pi^{e*} - \pi^e.$$

Reordenant,

$$i^* - \pi^{e*} \approx i - \pi^e.$$

Per tant, si se satisfan la paritat d'interessos no coberta i la paritat relativa del poder adquisitiu, aleshores les taxes d'interès real són aproximadament iguals:

$$i_r^* \approx i_r.$$

Aquest resultat es pot generalitzar partint de la definició de taxa de canvi real:

$$e_r = e\frac{P}{P^*}.$$

Aquest resultat es pot generalitzar partint de la definició de taxa de canvi real:

$$\boxed{e_r = e \cdot \frac{P}{P^*}}.$$

Sigui

$$E_r = \frac{e'_r - e_r}{e_r}$$

la taxa de variació de la taxa de canvi real, on e_r és la taxa de canvi real corrent i e'_r la taxa de canvi real futura. Sigui

$$E = \frac{e' - e}{e}$$

on e és la taxa de canvi nominal corrent i e' la taxa de canvi nominal futura. De la definició de la taxa de canvi real se segueix la següent aproximació, on és la taxa de variació de la taxa de canvi real.

$$E_r \approx E + \pi - \pi^*$$

Formant expectatives de cada variable,

$$E_r^e \approx E^e + \pi^e - \pi^{e^*} = E^e - (\pi^{e^*} - \pi^e).$$

Atès que, per la paritat no coberta,

$$E^e \approx i^* - i$$

se segueix que

$$E_r^e \approx (i^* - i) - (\pi^{e^*} - \pi^e).$$

Reordenant

$$E_r^e \approx (i^* - \pi^{e^*}) - (i - \pi^e) = i_r^* - i_r.$$

Aquest resultat indica que la variació expectada de la taxa de canvi real aproximadament coincideix amb la diferència de taxes d'interès real.

5. Altres paritats financeres: igualtat de rendibilitat dels actius financers

La idea que hi ha una paritat (si més no, aproximada) entre les rendibilitats dels diferents actius financers (un cop descomptades les seves diferències en risc, liquiditat i venciment) és el fonament d'una teoria sobre la determinació del preu dels actius financers.

Un exemple prou simple considera la paritat de rendibilitat entre un préstec típic i una lletra del Tresor, que és un actiu financer que s'emet a descompte: a canvi de pagar ara un preu P, la lletra paga al venciment un valor fix, el seu valor nominal V. La taxa de rendibilitat (o taxa d'interès implícita) de la lletra seria

$$i_{lletra} = \frac{V - P}{P},$$

el benefici $V - P$ que proporciona la compra de la lletra dividit pel cost P d'adquirir-la. La taxa de rendibilitat del préstec (assumit amb un venciment igual que la lletra) és la taxa d'interès i de l'economia.

La condició de paritat entre el rendiment de les dues inversions (prestar i comprar una lletra) és

$$i_{lletra} = i;$$

això és,

$$\frac{V - P}{P} = i.$$

Aïllant-ne P, s'arriba a

$$\boxed{P = \frac{V}{1 + i}.}$$

Aquesta equació expressa el preu de la lletra com a funció inversa de la taxa d'interès: com més alta és la taxa d'interès (com més rendible és prestar), més petit ha de ser el preu de la lletra (per a fer la compra de lletres igualment atractiva que el préstec de diner).

El mateix principi justificaria la fórmula

$$P = \frac{V}{(1 + i_1)(1 + i_2)}$$

com a preu d'una lletra amb venciment a dos períodes i taxes d'interès (d'un préstec) i_1 i i_2 en el primer i segon períodes. Una interpretació de la fórmula és que el preu d'una lletra que venç en dos períodes és el valor descomptat present del seu valor final V.

Sobre aquesta base es pot construir una teoria sobre la formació d'expectatives sobre taxes d'interès futures. Per exemple, suposem que les alternatives d'inversió financera són comprar un bo a dos períodes i comprar dos bons a un període. El rendiment de la compra del bo a dos períodes seria

$$(1 + i_2)(1 + i_2)$$

on i_2 és la taxa d'interès del bo cada període. El rendiment de la compra del primer bo a un període seria

$$1 + i_1$$

on i_1 és la taxa d'interès del bo a un període. En el moment de la compra del primer bo no es coneix la taxa d'interès del bo a un període del període següent. Però l'expectativa i_1^e de la taxa d'interès futura d'un bo a un període hauria de satisfer, per paritat de rendiments,

$$(1+i_2)(1+i_2)=(1+i_1)(1+i_1^e).$$

D'aquesta expressió es pot aïllar i_1^e, atès que i_1 i i_2 són coneguts en el període inicial. En concret,

$$1+2i_2+i_2i_2=1+i_1+\ i_1^e+i_1i_1^e.$$

Menyspreant els productes de dues taxes (que serà un valor d'un ordre de magnitud inferior al valor d'una taxa), la fórmula del valor aproximada seria

$$\boxed{i_1^e=2i_2-i_1.}$$

Per exemple, si la taxa d'interès del bo a dos períodes és $i_2=4\%$ i la taxa d'interès del bo a un període (el primer d'ells) és $i_1=5\%$, l'expectativa futura sobre la taxa d'interès del bo a un període és $i_1^e\ =\ 2i_2-i_1=2\cdot 4-5=3\%$. Així, sobre la base de la paritat entre les dues inversions (un bo a dos períodes i dos bons d'un), l'expectativa ha de ser que el bo a un període comprant en el segon període tindrà una taxa d'interès al voltant d'un 3%.

El mateixos principis de paritat permeten posar preu a actius financers més complexos.

- **Exemple 1.** Una lletra del tresor a dos períodes que fa un pagament C cada període (el cupó) i té un valor nominal final de V. Si la taxa d'interès del primer període és i_1 i la del segon és i_2, la condició de paritat entre el rendiment dels préstecs a aquestes taxes i la compra de la lletra implicaria que el preu de la lletra fos el valor descomptat de cada pagament de la lletra.

$$P=\frac{C}{1+i_1}+\frac{C+V}{(1+i_1)(1+i_2)}$$

- **Exemple 2.** Un bo perpetu: un bo sense venciment que paga C cada període. El preu del bo en el cas on la taxa d'interès i és la mateixa cada període seria

$$P=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{C}{(1+i)^t}=C\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^t}.$$

Fent-ne $x=\frac{1}{1+i}$, es tracta de calcular el sumatori $S=x+x^2+x^3+x^4+\dots$ Però

$$x+x^2+x^3+x^4+\cdots=x(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)$$

i, així,

$$S=x(1+S).$$

Un cop s'aïlla S i es desfà la definició d' x,

$$S = \frac{x}{1-x} = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1}{i}.$$

Com a resultat,

$$P = C\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^t} = C \cdot S = \frac{C}{i}.$$

Amb taxa d'interès constant i, l preu d'un bo perpetu que paga C cada període és $\frac{C}{i}$. Il·lustració: un bo perpetu que paga 10 € cada any quan la taxa d'interès és, cada any, del 5% tindrà un preu de $P = \frac{10}{0.05} = \frac{1000}{5} = 200$ €.

6. L'equació de Fisher com resultat d'una paritat

L'equació de Fisher es pot derivar de la paritat entre els resultats de dos contractes de préstec: un contracte nominal (on s'especifica un pagament en diner) i un altre de real (on s'especifica un pagament de diner equivalent en béns).

Específicament, sigui i la taxa d'interès nominal d'un préstec (entre els moments t i $t+1$) i P el valor de l'IPC (o d'un nivell de preus equivalent) en el moment inicial t. Aleshores és possible plantejar-se dos tipus de contracte.

- Contracte 1: prestar diner segons la taxa d'interès nominal i. Amb aquest contracte, cada euro prestat es convertiria, en $t+1$, en $1+i$ euros.

- Contracte 2: prestar diner en termes reals, de manera que en l'operció de préstec queda garantida una certa taxa d'interès real i_r (això és, queda garantit un determinat poder de compra dels diners retornats). En aquest cas, cada euro prestat equivaldria, en termes reals, a prestar $1/P$ lots de béns (el lots associats amb l'IPC o l'índex de preus considerat). Si l'objectiu del contracte és assolir una taxa d'interès real i_r, els termes del contracte establirien un pagament de diners equivalent a $(1+i_r)/P$ lots de béns.

Si es volgués l'equivalència dels dos contractes en termes dels resultats, es tractaria d'igual el pagament en diner $1+i$ del contracte 1 amb el valor esperat en diner del resultat $(1+i_r)/P$ del contracte 2. El problema és que, quan se signa el contracte 2 en el moment t, s'ignora el valor monetari dels lots estipulats en el contracte. La raó és que en aquell moment es desconeix el valor dels preus del moment següient. Per aquest motiu, cal formar una expectativa P^e sobre l'IPC o el nivell de preus del moment $t+1$. Un cop formulada aquesta expectativa, el valor expectat en euros de $(1+i_r)/P$ lots de béns és $P^e(1+i_r)/P$ euros. En suma, la paritat de resultat monetaris dels contractes 1 i 2 requereix

$$1+i = \frac{P^e(1+i_r)}{P}.$$

Manipulant l'equació (tot definint $\pi^e = \frac{P^e - P}{P}$),

$$1 + i = \frac{P^e}{P}(1 + i_r) = \left(\frac{P^e}{P} - 1 + 1\right)(1 + i_r) = (\pi^e + 1)(1 + i_r).$$

L'equació resultant

$$1 + i = (1 + \pi^e)(1 + i_r)$$

és l'equació de Fisher. Desenvolupant-la

$$1 + i = 1 + i_r + \pi^e + i_r\pi^e$$

s'obté l'expressió

$$i = i_r + \pi^e + i_r\pi^e$$

que indica que la taxa d'interès nominal és la suma de tres components: la taxa d'interès real, la taxa d'inflació expectada i la interacció entre taxa real i expectada. Si es menysprea el darrer terme, s'arriba a la formulació més familiar de l'equació de Fisher:

$$i = i_r + \pi^e.$$

Aquesta relació es pot prendre com a definició de la taxa d'interès real: $i_r = i - \pi^e$.

7. Extra: arbitratge a la vista, paritat coberta i arbitratge a termini

Es demostra a continuació la següent proposició: <u>si no hi ha oportunitats d'arbitratge triangular a la vista i es compleix la paritat coberta per a cada parell de monedes, aleshores no hi ha oportunitats d'arbitratge triangular a termini</u>.

Aquest resultat té l'interès d'il·lustrar com l'arbitratge connecta i integra diferents mercats (en aquest cas, els mercats a la vista i a termini). En concret, el resultat estableix que si s'esgoten les oportunitats d'arbitratge triangular en els mercats de divises a la vista i si és vàlida la paritat coberta d'interessos entre les taxes de canvi de cada dues monedes, llavors no és necessari preguntar-se si hi haurà oportunitats d'arbitratge triangular desaprofitades en els mercats de divises a termini: no n'hi ha.

Per a demostrar la proposició, suposem que no hi ha oportunitats d'arbitratge entre tres monedes, \$, € i ¥. Això significa que la taxa de canvi directa entre, per exemple, dòlar i ien coincideix amb la taxa de canvi indirecta entre dòlar i ien. Formalment,

$$e_{\$€} \cdot e_{€¥} = e_{\$¥}\,.$$

Aquesta condició es pot expressar de manera equivalent com

$$e_{\$€} \cdot e_{€¥} \cdot e_{¥\$} = 1.$$

Si, a més, es compleixen les paritats cobertes entre cada parell de monedes, se satisfarà la paritat coberta entre dòlar i euro

$$\frac{e_{\$€}}{e_{\$€}^F} = \frac{1 + i_€}{1 + i_\$},$$

entre euro i ien

$$\frac{e_{€¥}}{e_{€¥}^F} = \frac{1 + i_¥}{1 + i_€},$$

i entre ien i dòlar

$$\frac{e_{¥\$}}{e_{¥\$}^F} = \frac{1 + i_\$}{1 + i_¥}.$$

Aïllant-ne les taxes a la vista en les darreres tres equacions i introduint-ne el resultat en la condició d'absència d'arbitratge a la vista, $e_{\$€} \cdot e_{€¥} \cdot e_{¥\$} = 1$, s'obté

$$\left(e_{\$€}^F \cdot \frac{1 + i_€}{1 + i_\$}\right) \cdot \left(e_{€¥}^F \cdot \frac{1 + i_¥}{1 + i_€}\right) \cdot \left(e_{¥\$}^F \cdot \frac{1 + i_\$}{1 + i_¥}\right) = 1$$

i, atès que les diferents taxes d'interès brutes es cancel·len, en resta la condició d'absència d'arbitratge triangular a termini:

$$e_{\$€}^F \cdot e_{€¥}^F \cdot e_{¥\$}^F = 1.$$