Un model malthusià amb microfonaments

1. Elements del model[1]

• **Capacitat productiva**. El temps es mesura en períodes discrets. Hi ha un únic bé, Y. El bé pot ser produït fent servir dos factors de producció: terra D i treball L. La quantitat de terra és fixa i constant cada període. La funció de producció agregada en el període t és

$$Y(t) = (A \cdot D)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$$

on:

- $Y(t)$ és la quantitat de bé produïda en el període t;
- A representa l'estat o 'nivell' de la tecnologia;
- D és la quantitat fixa de terra;
- α és un número entre 0 i 1; i
- $L(t)$ és la quantitat de treball emprada en la producció del bé en el període t.

El terme $A \cdot D$ captura els recursos que efectivament s'empren en la producció. Grosso modo, l'estat de la tecnologia sintesitza tots els factors que incideixen sobre la productivitat de la terra: la qualitat del sòl, el clima, els mètodes de conreu, l'aprenentatge de tècniques per a obtenir producte de la terra, etc. La combinació $A \cdot D$ defineix la terra efectivament feta servir en la producció. Per exemple, tenir $A = 2$ vol dir que una unitat de terra fa, en la pràctica, el mateix efecte que disposar-ne de dues (de dues quan $A = 1$, valor d'A que podria representar el nivell productiu bàsic o mínim de la terra).

• **Agents**. Els agents que aporten treball, i duen a terme la producció, s'anomenen camperols. La producció $y(t)$ per camperol en el període t és

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \left(\frac{A \cdot D}{L(t)}\right)^{\alpha}.$$

Tots els camperols són idèntics i viuen dos períodes consecutius. En el segon període de vida

- cada camperol decideix quants fills tenir (les famílies són monoparentals);
- tot camperol esdevé econòmicament actiu i empra tota la seva dotació de treball, amb independència de la renda que n'obtingui;
- la renda d'un camperol en el període t és igual a la producció $y(t)$ per pagès en el període t;
- la renda de cada camperol es destina a consumir i a criar fills.

En el seu primer període de vida un camperol és econòmicament inactiu i ha de ser sostingut pel seu progenitor. Es pot considerar que, en el primer període, un camperol és un infant que no pren

[1] El model es pren de l'article de Quamrul Ashraf i Oded Galor "Dynamics and stagnation in the Malthusian epoch", *American Economic Review* 101(5), 2011, 2003-2041. El model es descriu i analitza a les pàgines 2005-2009.

per si mateix cap decisió. Cada camperol està caracteritzat en el seu segon període t de vida per la funció d'utilitat

$$u(t) = c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{1-\beta}$$

on $c(t)$ és la quantitat de bé que consumeix el camperol en el període t, $n(t)$ és el nombre de fills que el camperol ha triat tenir i β és un número entre 0 i 1 que representa la preferència relativa del camperol entre consumir i tenir fills. El cost associat amb la tinença i criança de fills és un cost fix de $\gamma > 0$ unitats de bé per fill.

2. Anàlisi del model: relació entre producte per càpita i població

Cada camperol del període t tria $c(t)$ i $n(t)$ amb l'objectiu de maximitzar $u(t)$ en presència de la restricció pressupostària

$$c(t) + \gamma \cdot n(t) = y(t).$$

El lagrangià corresponent al problema de

$$\begin{array}{cc} maximitzar_{c(t),n(t)} & u(t) = c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{1-\beta} \\ sotmès\ a & c(t) + \gamma \cdot n(t) = y(t) \end{array}$$

és

$$\mathcal{L}(t) = c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{1-\beta} + \lambda \cdot \big(y(t) - c(t) - \gamma \cdot n(t)\big)\,.$$

Les condicions de primer ordre (assumint que les de segon d'ordre se satisfan) són:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial c(t)} = \beta \cdot c(t)^{\beta-1} \cdot n(t)^{1-\beta} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(t)}{\partial n(t)} = (1-\beta) \cdot n(t)^{-\beta} \cdot c(t)^{\beta} - \lambda \cdot \gamma = 0\,.$$

Per la primera equació,

$$\lambda = \beta \cdot c(t)^{\beta-1} \cdot n(t)^{1-\beta}.$$

Per la segona,

$$\lambda = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{-\beta}.$$

Com a resultat,

$$\beta \cdot c(t)^{\beta} \cdot \frac{1}{c(t)} \cdot n(t)^{-\beta} \cdot n(t) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot c(t)^{\beta} \cdot n(t)^{-\beta}$$

i, en definitiva,

$$n(t) = \frac{1-\beta}{\beta \cdot \gamma} \cdot c(t)\,.$$

Introduint l'anterior equació en la restricció pressupostària $c(t) + \gamma \cdot n(t) = y(t)$ fa que

$$\boxed{c(t) = \beta \cdot y(t)\,.}$$

Per tant,

$$\boxed{n(t) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot y(t)\,.}$$

Atès que $1-\beta > 0$, un increment de la producció per camperol causa un augment del nombre de fills: $\frac{dn(t)}{dy(t)} = \frac{1-\beta}{\gamma} > 0$. El model reprodueix la característica relació positiva entre producció per càpita i creixement de la població que postula la visió malthusiana.

3. Anàlisi del model: dinàmica demogràfica i estat estacionari

Per a tot període t, $L(t)$ designa el nombre de camperols en t en el seu segon període de vida (la força laboral). D'acord amb això,

$$L(t+1) = n(t) \cdot L(t)$$

que expressa el fet que el nombre de camperols actius en $t+1$ correspon al nombre de fills que els camperols actius en t van decidir tenir. Combinant les equacions $L(t+1) = n(t) \cdot L(t)$, $n(t) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot y(t)$ i $y(t) = \left(\frac{A \cdot D}{L(t)}\right)^{\alpha}$ s'obté

$$L(t+1) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot \left(\frac{A \cdot D}{L(t)}\right)^{\alpha} \cdot L(t)$$

Això és,

$$L(t+1) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot (A \cdot D)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$$

o, definint $a = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot (A \cdot D)^{\alpha}$,

$$\boxed{L(t+1) = a \cdot L(t)^{1-\alpha}\,.} \tag{1}$$

Atès que $a > 0$ i $0 < 1-\alpha < 1$,

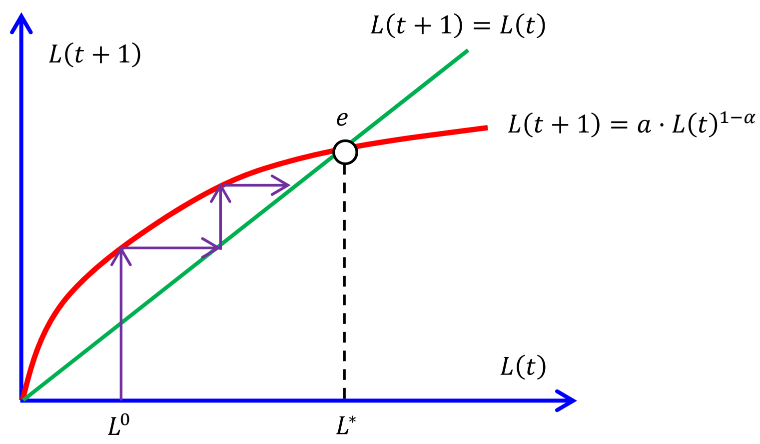
$$\frac{dL(t+1)}{dL(t)} = a \cdot (1-\alpha) \cdot L(t)^{-\alpha} = \frac{a \cdot (1-\alpha)}{L(t)^{\alpha}} > 0$$

i

$$\frac{d^2L(t+1)}{dL(t)^2} = -a \cdot (1-\alpha) \cdot \alpha \cdot L(t)^{-\alpha-1} < 0\,.$$

Aquestes derivades indiquen que la funció (1) que traça la dinàmica de la població de camperols actius és: (i) creixent; (ii) estrictament còncava; (iii) arrenca de l'origen, ja que $L(t) = 0$ implica $L(t+1) = 0$); i (iv) té una derivada $\frac{dL(t+1)}{dL(t)}$ decreixent, que s'aproxima a zero a mesura que $L(t)$ creix i que se'n va cap a l'infinit quan $L(t)$ s'apropa a zero.

La Figura 1 representa gràficament (1). Un tret destacable és que, obviant l'origen, la corba que representa (1) intersecta la diagonal principal (és a dir, els parells $\big(L(t+1), L(t)\big)$ tals que $L(t+1) = L(t)$) només en un punt: el punt e. En aquest punt, que es correspon amb el valor L^*, s'assoleix un estat estacionari, donat que $L(t) = L^*$ implica $L(t+1) = L^* = L(t)$.



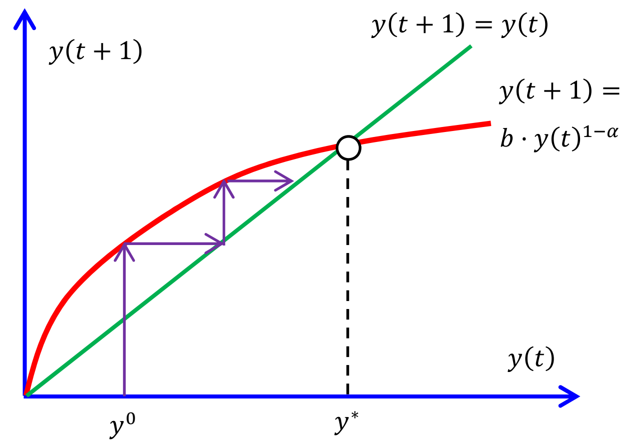


Figura 1. Població: dinàmica i estat estacionari

Figura 2. Producció per càpita

L'estat estacionari representat per e a la Figura 1 s'obté d'(1) i la condició $L(t+1) = L(t)$. El valor L^* que satisfà les dues equacions és $L^* = a \cdot L^{*1-\alpha}$; en concret, el valor estacionari de la població és $L^* = a^{1/\alpha}$. En suma,

$$\boxed{L^* = A \cdot D \cdot \left(\frac{1-\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.} \tag{2}$$

L'estat estacionari del procés dinàmic (1) és <u>estable</u> en el sentit que, partint d'un volum de població positiu però diferent d'L^*, la dinàmica d'(1) fa convergir el volum de població a L^*. Aquesta idea s'il·lustra a la Figura 1 assumint que el valor inicial és $L^0 < L^*$: la seqüència de valors que genera (1) partint d'L^0 convergeix a L^*. El mateix resultat s'obtindria partint d'$L^0 > L^*$. Definint la densitat de població (o, més acuradament, la densitat de camperols actius) en el període t com $F(t) = L(t)/D$, la densitat estacionària resulta ser $F^* = L^*/D$ o

$$\boxed{F^* = A \cdot \left(\frac{1-\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.}$$

D'altra banda, recordant que $y(t) = \left(\frac{A \cdot D}{L(t)}\right)^{\alpha}$ i que $L(t+1) = n(t) \cdot L(t)$,

$$y(t+1) = \left(\frac{A \cdot D}{L(t+1)}\right)^{\alpha} = \left(\frac{A \cdot D}{n(t) \cdot L(t)}\right)^{\alpha} = \frac{1}{n(t)^{\alpha}} \cdot \left(\frac{A \cdot D}{L(t)}\right)^{\alpha} = \frac{y(t)}{n(t)^{\alpha}}.$$

Com que $n(t) = \frac{1-\beta}{\gamma} \cdot y(t)$, la dinàmica de la producció per càpita és descrita per l'equació en diferències $y(t+1) = \left(\frac{\gamma}{1-\beta}\right)^{\alpha} \cdot y(t)^{1-\alpha}$. Fent $b = \left(\frac{\gamma}{1-\beta}\right)^{\alpha} > 0$, una expressió més compacta seria

$$\boxed{y(t+1) = b \cdot y(t)^{1-\alpha}.} \tag{3}$$

L'equació (3) és anàloga a l'equació (1) que descrivia la dinàmica de la població de camperols. La Figura 2 mostra una representació gràfica de (3) i el corresponent valor d'estat estacionari y^* (diferent de zero) de la producció per càpita (y^* es correspondria amb el valor L^* de la Figura 1).

Exercicis

Exercici 1. Estabilitat d'un estat estacionari. Explica si és estable l'estat estacionari representat per l'origen de la Figura 1 (no hi ha població). Això és, assegura la dinàmica de la població el retorn a l'origen si es produeix una pertorbació que allunya mínimament l'economia de l'origen?

Exercici 2. Estàtica comparativa. Partint de la Figura 1: (a) analitza gràficament l'impacte sobre l'estat estacionari (i, en particular, sobre L^* i F^*) de cadascun dels següents esdeveniments; (b) confirma el resultat de l'anàlisi gràfica determinant el signe corresponent de la derivades parcials d'(1) i (2); (c) indica què succeeix amb la renta per càpita d'estat estacionari.

(i) Es produeix una millora tecnològica (augmenta el valor del paràmetre A).

(ii) Es produeix una regressió tecnològica (disminueix el valor del paràmetre A).

(iii) S'incrementa el cost de tenir fills.

(iv) Augmenta l'estoc de terra D (descobriment d'Amèrica).

(v) Creix la preferència pel consum (s'apuja el valor del paràmetre β).

(vi) Es redueix el valor del paràmetre α.

Exercici 3. Teorema d'Euler. Pren la funció de producció estàtica $Y = (A \cdot D)^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$.

(i) Calcula la funció $\frac{\partial Y}{\partial D}$ de productivitat marginal de la terra.

(ii) Calcula la funció $\frac{\partial Y}{\partial L}$ de productivitat marginal dels pagesos.

(iii) Verifica que $Y = \frac{\partial Y}{\partial D} \cdot D + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot L$.

(iv) Ofereix una interpretació econòmica de l'equació $Y = \frac{\partial Y}{\partial D} \cdot D + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot L$.

(v) Determina $\frac{\frac{\partial Y}{\partial D} \cdot D}{Y}$ i interpreta el resultat.

(vi) Assumint $A = 1$, troba la derivada de la funció $\frac{\partial Y}{\partial D}$ respecte d'α i interpreta econòmicament el signe.

Exercici 4. Dinàmica de la renda per càpita. Troba l'expressió que defineix l'estat estacionari (no trivial) de la dinàmica de la renda per càpita representada per (3) i determina el signe de la derivada parcial respecte de cada paràmetre.

Exercici 5. Prediccions malthusianes. Estableix si les següents prediccions malthusianes es produeixen en el model de caire malthusià. [Ashraf i Galor (2011, p. 2009) assenyalen que "These predictions emerge from a Malthusian model as long as the model is based upon two fundamental features: (i) a positive effect of the standard of living on population growth, and (ii) decreasing returns to labor due to the presence of a fixed factor of production—land."]

(i) Una millora tecnològica que es tradueix en un augment de la productivitat de la terra (augment d'A) fa que, en el llarg termini, s'incrementi la població sense que es modifiqui el nivell de la renda per càpita.

(ii) Si l'única diferència estructural entre dues economies E i E' és que la productivitat de la terra (o el nivell tecnològic) d'E és superior a la d'E', aleshores, a llarg termini, l'economia E tindrà una densitat de població superior a la d'E', però no tindrà una renda per càpita més gran que E'.

Exercici 6 (voluntari). Extensió del model. El model obté una relació positiva entre el nombre de fills n i la renda per càpita y. Redefineix el model (de manera convincent i raonada) amb l'objectiu d'aconseguir el següent resultat: per a valors d'y inferiors a un cert valor y', la relació entre n i y és positiva, però per a valors superiors a y' la relació és negativa (un augment d'y causa una reducció d'n).

Exercici 7 (voluntari). Extensió del model. Reformula el model, i torna a calcular els estats estacionaris, si els camperols disposen d'una unitat de temps. Aquesta unitat es pot dedicar al lleure o a produir. La funció d'utilitat ara també depèn positivament del temps assignat al lleure (o negativament del temps dedicat a produir).

Exercici 8. Malthus dixit. Opina sobre el següent text:

> "All the children born, beyond what would be required to keep up the population to this level, must necessarily perish, unless room be made for them by the deaths of grown persons … the marriages and births depend principally upon the deaths, and … there is no encouragement to early unions so powerful as a great mortality. To act consistently therefore, we should facilitate, instead of foolishly and vainly endeavouring to impede, the operations of nature in producing this mortality… Instead of recommending cleanliness to the poor, we should encourage contrary habits. In our towns we should make the streets narrower, crowd more people into the houses, and court the return of the plague. In the country, we should build our villages near stagnant pools, and particularly encourage settlements in all marshy and unwholesome situations. But above all, we should reprobate specific remedies for ravaging diseases… If … the annual mortality were increased from 1 in 36 or 40, to 1 in 18 or 20, we might probably every one of us marry at the age of puberty, and yet few be absolutely starved. If, however, we all marry at this age, and yet still continue our exertions to impede the operations of nature, we may rest assured that all our efforts will be vain. Nature will not, nor cannot, be defeated in her purposes. The necessary mortality must come, in some form or other; and the extirpation of one disease will only be the signal for the birth of another perhaps more fatal." Reverend Thomas Robert Malthus (1826): *An Essay on the Principle of Population*, Vol. II, 6a edició, John Murray, Londres, pp. 300-302 (llibre IV, capítol V)