9bis. Producció sense remuneracions competitives

1. Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular. Cada període neixen n individus, que viuen dos períodes consecutius.

• Tot individu jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot (c')^{\beta}$, on $\beta > 0$, c és el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot individu gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.

• Hi ha dos factors de producció: 'treball' (el serveis de producció que proporcionen els individus) i 'capital' (bé acumulat que representa mitjans de producció físics). El treball no és acumulable: només es pot fer servir en el període en què se'n disposa. No hi ha mercat de préstecs del bé.

• Tot individu jove té una unitat de treball com a dotació. Els individus grans no tenen dotació de treball.

• Hi ha una funció de producció agregada que indica la quantitat total Y del bé que es produeix durant un període a partir de la quantitat total de treball L disponible en el període i la quantitat total de capital K disponible en el període. L'expressió que defineix la funció de producció en cada període és, amb $0 < \alpha < 1$,

$$Y = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} .$$

2. Anàlisi competitiva

• Si s'assumeix que hi ha mercats de treball i de capital, i que ambdós són competitius, el salari ω coincidirà amb la productivitat marginal del treball segons la funció de producció i la remuneració σ del capital serà igual a la productivitat marginal del capital, també segons la funció de producció.

• **Decisions d'acumulació de capital dels joves.** Tot jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u = c \cdot (c')^{\beta} & \\ \text{sotmès a} & c + k' = 1 \cdot \omega & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c' = \sigma' \cdot k' & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c és el consum present de l'individu (de jove), c' és el consum del període següent (de gran), k' és el volum de bé acumulat de jove en forma de capital però que es fa servir de gran, ω és el salari (el preu del factor treball) de jove i σ' és el preu del factor capital quan els individus són grans.

El problema es pot resoldre directament introduint les restriccions pressupostàries en la funció utilitat. Així, tot jove vol

$$\text{maximitzar} \quad u = (\omega - k') \cdot (\sigma' \cdot k')^{\beta} \quad \text{respecte de } k'.$$

Per la hipòtesi que els mercats són competitius, l'individu pren ω i σ' com a dades. Per això, el problema anterior és equivalent a

$$\text{maximitzar} \quad u = (\omega - k') \cdot k' \quad \text{respecte de } k'.$$

La solució:

$$\boxed{k' = \omega \cdot \frac{\beta}{1+\beta}.}$$

En conseqüència, tot jove estalvia la meitat del salari que rep en forma de capital.

• **Preu del factor treball.** La productivitat marginal del treball és la derivada de la funció de producció de l'economia respecte del treball:

$$\omega = PMg_L = \frac{dY}{dL} = \frac{d(K^\alpha \cdot L^{1-\alpha})}{dL} = K^\alpha \cdot \frac{d(L^{1-\alpha})}{dL} = (1-\alpha) \cdot K^\alpha \cdot L^{-\alpha} = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha.$$

Aquest resultat és vàlid cada període.

• **Preu del factor capital.** La productivitat marginal del capital és la derivada de la funció de producció de l'economia respecte del capital:

$$\sigma = PMg_K = \frac{dY}{dK} = \frac{d(K^\alpha \cdot L^{1-\alpha})}{dK} = L^\alpha \cdot \frac{d(K^\alpha)}{dK} = \alpha \cdot L^{1-\alpha} \cdot K^{\alpha-1} = \alpha \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha}.$$

Aquest resultat és vàlid cada període.

• **Quantitat total de factors cada període.** Cada període hi ha n individus joves i n de grans. Això fa que la quantitat total de factor treball cada període sigui

$$n \cdot 1 + n \cdot 0 = n.$$

D'aquí es dedueix que $L' = L$.

Amb relació al capital, els grans són els únics que n'aporten cada període. En conseqüència, la quantitat total K de factor capital existent en un període donat és $n \cdot k$.

• **Càlculs dels preus dels factors de producció.** Recuperant la fórmula de retribució del salari,

$$\omega = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha = (1-\alpha) \cdot \left(\frac{n \cdot k}{n}\right)^\alpha = (1-\alpha) \cdot k^\alpha.$$

Així,

$$\boxed{k' = \omega \cdot \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{\beta \cdot (1-\alpha)}{1+\beta} \cdot k^\alpha}$$

Estableix la trajectòria d'acumulació del capital (per càpita). En l'estat estacionari amb capital positiu, el capital pren el valor

$$\bar{k} = \left(\frac{\beta \cdot (1-\alpha)}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

3. Anàlisi no competitiva

• Les hipòtesis que reemplacen la condició que els mercats de treball i de capital siguin competitius són:

- la producció es reparteix entre treball i capital ($Y = \sigma \cdot K + \omega \cdot L$, on σ és la remuneració del capital i ω la del treball);
- una regla de distribució que estableix que la remuneració total del capital és un múltiple (fix) de la remuneració total del treball (hi ha una constant positiva π tal que $\sigma \cdot K = \pi \cdot (\omega \cdot L)$).

La regla de distribució també pot expressar-se com

$$\pi = \frac{\sigma \cdot K}{\omega \cdot L}$$

indicant-ne que les proporcions que del producte total s'emporten treball i capital són fixes (alternativament, es podria postular que la relació entre les remuneracions unitàries (no les totals) és sempre la mateixa: $\pi = \frac{\sigma \cdot K}{\omega \cdot L}$).

Per a cada individu, continua sent cert que voldria acumular

$$k' = \omega \cdot \frac{\beta}{1+\beta}.$$

La diferència és com es determina el salari ω. Ara, sabent que

$$Y = \sigma \cdot K + \omega \cdot L$$

i que

$$\sigma \cdot K = \pi \cdot (\omega \cdot L)$$

es conclou que

$$Y = (1+\pi) \cdot \omega \cdot L.$$

Aïllant ω i inserint-ne la funció de producció, s'obté

$$\omega = \frac{Y}{(1+\pi) \cdot L} = \frac{K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}}{(1+\pi) \cdot L} = \frac{1}{1+\pi} \cdot \frac{K^{\alpha}}{L^{\alpha}} = \frac{1}{1+\pi} \cdot \frac{(n \cdot k)^{\alpha}}{n^{\alpha}} = \frac{1}{1+\pi} \cdot k^{\alpha}$$

i, en conclusió,

$$\boxed{k' = \omega \cdot \frac{\beta}{1+\beta} = \frac{\beta}{(1+\pi)\cdot(1+\beta)} \cdot k^{\alpha}\,.}$$

Aquesta trajectòria queda per damunt de la trajectòria competitiva si

$$\frac{\beta}{(1+\pi)\cdot(1+\beta)} > \frac{\beta\cdot(1-\alpha)}{1+\beta};$$

això és, si

$$\pi < \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

(Cal recordar que, com més gran π, més part del pastís del producte rep el capital).

En l'estat estacionari amb capital positiu, el capital pren el valor

$$\bar{k} = \left(\frac{\beta}{(1+\pi)\cdot(1+\beta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$