9. L'exemple del model bàsic amb producció

1. Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que es pot produir i acumular. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. Hom viu dos períodes consecutius. Tot consumidor jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$.

• Hi ha dos factors de producció: 'treball' (el serveis de producció que proporcionen els individus) i 'capital' (bé acumulat que representa mitjans de producció físics). El treball no és acumulable: només es pot fer servir en el període en què se'n disposa. Treball i capital s'intercanvien en mercats competitius. No hi ha mercat de préstecs del bé.

• Els individus tenen una dotació de factor treball. La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de treball de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de treball de jove i dues de gran.

• Hi ha una funció de producció agregada que indica la quantitat total Y del bé que es produeix durant un període a partir de la quantitat total de treball L disponible en el període i la quantitat total de capital K disponible en el període. L'expressió que defineix la funció de producció en cada període és

$$Y = 2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2} \,.$$

2. Anàlisi

• **Decisions.** Els individus obtenen utilitat només del consum del bé, però d'entrada no en tenen: les dotacions són treball. Per aquest motiu, els individus han de oferir treball en un mercat (competitiu) de treball a canvi d'un salari ω (pagat en bé). Atès que no hi ha mercat de préstecs del bé, l'única forma d'estalvi dels individus és acumular bé en forma de capital i vendre aquest capital en el període següent a canvi d'un preu σ.

• **Decisions d'acumulació de capital dels membres joves de G1.** Tot jove del grup G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot {c_1}' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + {k_1}' = 1 \cdot \omega & \text{(restricció present, de jove)} \\ & {c_1}' = \sigma' \cdot {k_1}' & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c_1 és el consum present de l'individu (de jove), ${c_1}'$ és el consum del període següent (de gran), ${k_1}'$ és el volum de bé acumulat de jove en forma de capital però que es fa servir de gran, ω és el salari (el preu del factor treball) de jove i σ' és el preu del factor capital quan els individus són grans. Dividint per σ' la segona restricció i sumant-ne les dues s'obté la restricció pressupostària vital:

$$c_1 + \frac{{c_1}'}{\sigma'} = \omega \,.$$

Aquesta expressió diu que el salari total obtingut de jove finança el consum de jove i de gran. És de destacar que, en relació amb el cas on només hi havia mercat de préstecs, el preu del capital σ' és com una taxa d'interès implícita.

Atès l'interès rau en determinar el volum de capital ${k_1}'$ acumulat de jove, el problema es pot resoldre directament introduint les restriccions pressupostàries en la funció utilitat. Així, tot jove vol

$$\text{maximitzar} \quad u_1 = (\omega - {k_1}') \cdot \sigma' \cdot {k_1}' \quad \text{respecte de } {k_1}'.$$

Per la hipòtesi que els mercats són competitius, l'individu pren ω i σ' com a dades. Per això, el problema anterior és equivalent a

$$\text{maximitzar} \quad u_1 = (\omega - {k_1}') \cdot {k_1}' \quad \text{respecte de } {k_1}'.$$

La solució:

$$\boxed{{k_1}' = \omega/2.}$$

En conseqüència, tot jove de G1 estalvia la meitat del salari que rep en forma de capital.

• **Decisions d'acumulació de capital dels membres joves de G2.** Tot jove del grup G2 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot {c_2}' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + {k_2}' = 2 \cdot \omega & \text{(restricció present, de jove)} \\ & {c_1}' = 2 \cdot \omega' + \sigma' \cdot {k_2}' & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c_2 és el consum present de l'individu (de jove), ${c_2}'$ és el consum del període següent (de gran), ${k_2}'$ és el volum de bé acumulat de jove en forma de capital però que es fa servir de gran, ω és el salari (el preu del factor treball) de jove, ω' és el salari de gran i σ' és el preu del factor capital de gran. Dividint per σ' la segona restricció i sumant-ne les dues s'obté la restricció pressupostària vital:

$$c_2 + \frac{{c_2}'}{\sigma'} = \omega + \frac{2 \cdot \omega'}{\sigma'}.$$

Segons aquesta restricció, interpretant $1/\sigma'$ com a factor de descompte que expressa bé futur en termes de bé present, el valor descomptat de tots els ingressos salarials $\omega + \frac{2\cdot\omega'}{\sigma'}$ de l'individu ha de coincidir amb el valor descomptat $c_2 + \frac{{c_2}'}{\sigma'}$ del consum que fa l'individu al llarg de la seva vida.

Inserint les restriccions pressupostàries en la funció utilitat, tot jove de G2 té com a objectiu

$$\text{maximitzar} \quad u_2 = (2 \cdot \omega - {k_2}') \cdot (2 \cdot \omega' + \sigma' \cdot {k_2}') \quad \text{respecte de } {k_2}'.$$

La condició necessària de màxim (que en aquest cas també és suficient) és

$$0 = \frac{du_2}{dk_2{}'} = 2 \cdot \omega \cdot \sigma' - 2 \cdot \omega' - 2 \cdot \sigma' \cdot k_2{}'$$

i, així,

$$\boxed{k_2{}' = \omega - \frac{\omega'}{\sigma'}.}$$

Aquesta expressió indica que l'estalvi de tot jove de G2 depèn dels preus de tots els factors que ven: treball de jove ω, treball de gran ω' i capital de gran σ' (per construcció del model, els joves no poden fer ús del capital).

• **Preu del factor treball.** En tant que mercat competitiu, el salari (el preu del factor treball) en el període t iguala l'oferta total de treball en t amb la demanda total de treball en t. Però pel fet que la funció de producció agregada té rendiments d'escala constants es pot aplicar una drecera: el salari en un mercat competitiu (que representi la totalitat de l'economia) coincideix amb la productivitat marginal del factor treball en l'economia.

La productivitat marginal del treball és la derivada de la funció de producció de l'economia respecte del treball:

$$\omega = PMg_L = \frac{dY}{dL} = \frac{d(2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2})}{dL} = 2 \cdot K^{1/2} \cdot \frac{d(L^{1/2})}{dL} = 2 \cdot K^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot L^{-1/2} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aquest resultat és vàlid cada període. Per consegüent,

$$\boxed{\omega' = \left(\frac{K'}{L'}\right)^{\frac{1}{2}}.}$$

• **Preu del factor capital.** El mateix argument s'aplica al preu del capital: coincideix amb la productivitat marginal del factor capital. La productivitat marginal del capital és la derivada de la funció de producció de l'economia respecte del capital:

$$\sigma = PMg_K = \frac{dY}{dK} = \frac{d(2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2})}{dK} = 2 \cdot L^{1/2} \cdot \frac{d(K^{1/2})}{dK} = 2 \cdot L^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot K^{-1/2} = \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Anàlogament,

$$\boxed{\sigma' = \left(\frac{L'}{K'}\right)^{\frac{1}{2}}.}$$

• **Quantitat total de factors cada període.** Cada període hi ha n individus joves de G1, n joves de G2, n grans de G1 i n grans de G2. Això fa que la quantitat total de factor treball que els joves aporten cada període sigui

$$n \cdot 1 + n \cdot 2,$$

que la quantitat total de factor treball que els grans aporten cada període sigui

$$n \cdot 0 + n \cdot 2$$

i que, com a resultat, la quantitat total L de factor treball existent cada període sigui

$$L = n \cdot 1 + n \cdot 2 + n \cdot 0 + n \cdot 2 = 5 \cdot n.$$

De l'anterior es dedueix que $L' = L$.

Amb relació al capital, els grans són els únics que n'aporten cada període. En conseqüència, la quantitat total K de factor capital existent en un període donat és la suma del capital $n \cdot k_1$ que aporten els n grans de G1 i del capital $n \cdot k_2$ que aporten els n grans de G2:

$$K = n \cdot k_1 + n \cdot k_2 = n \cdot (k_1 + k_2).$$

En aquest cas,

$$K' = n \cdot k_1 + n \cdot k_2 = n \cdot (k_1{}' + k_2{}').$$

Definint

$$\boxed{k = k_1 + k_2}$$

les expressions serien

$$K = n \cdot k$$
$$K' = n \cdot k'.$$

• **Càlculs dels preus dels factors de producció.** La fórmula del salari d'equilibri

$$\omega = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$$

depèn de l'estoc total corrent dels factors de producció. En vista d'això,

$$\omega = \left(\frac{n \cdot k}{5 \cdot n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k}{5}\right)^{1/2}$$

$$\omega' = \left(\frac{k'}{5}\right)^{1/2}$$

$$\sigma = \left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{5 \cdot n}{n \cdot k}\right)^{1/2} = \left(\frac{5}{k}\right)^{1/2}$$

i

$$\sigma' = \left(\frac{5}{k'}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

• **Obtenció de la trajectòria d'acumulació de capital.** La trajectòria d'acumulació del capital s'obté de la definició de capital per càpita

$$k' = k_1{}' + k_2{}'$$

substituint les expressions dels preus dels factors de producció acabades d'obtenir (s'empra el valor desfasat k' per conveniència, atès que les fórmules del capital acumulat pels joves es refereixen al període on són grans). En resum,

$$k' = k_1' + k_2' = \frac{\omega}{2} + \left(\omega - \frac{\omega'}{\sigma'}\right) = \frac{3}{2}\cdot\omega - \frac{\omega'}{\sigma'} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{k'}{5}\right)^{1/2}}{\left(\frac{5}{k'}\right)^{1/2}} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{k}{5}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{k'}{5}.$$

Aïllant k',

$$k' = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{k^{1/2}}{5^{1/2}} = \frac{5^{1/2}}{4}\cdot k^{1/2}.$$

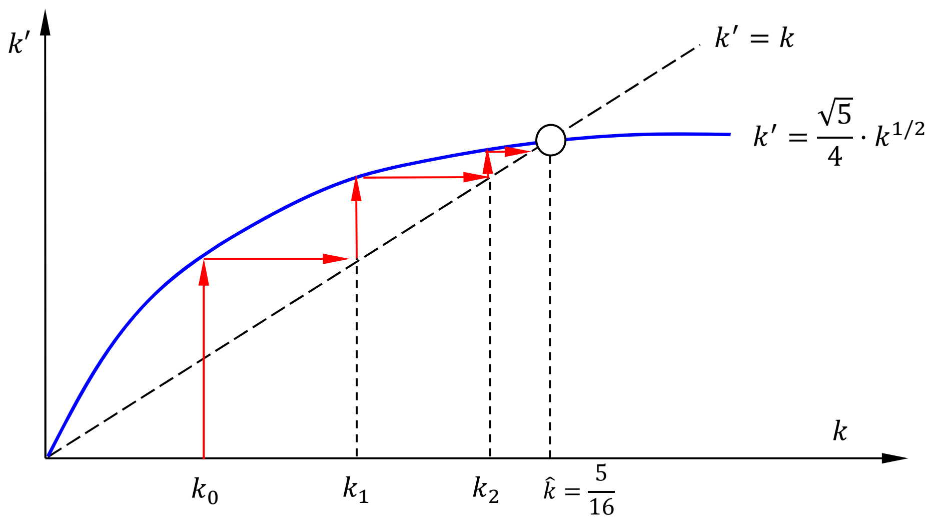
L'expressió final

$$\boxed{k' = \frac{5^{1/2}}{4}\cdot k^{1/2}.} \tag{1}$$

estableix la dinàmica de l'acumulació per càpita (això és, per individu jove) de capital. Si interessés la dinàmica de l'acumulació de l'estoc total K de capital, només cal multiplicar per n, atès que $K = n\cdot k$:

$$K' = n\cdot k' = n\cdot\frac{5^{1/2}}{4}\cdot k^{1/2} = \frac{5^{1/2}}{4}\cdot n^{1/2}\cdot n^{1/2}\cdot k^{1/2} = \frac{(5\cdot n)^{1/2}}{4}\cdot(n\cdot k)^{1/2} = \left(\frac{5\cdot n}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot K^{1/2}.$$

La funció (1) és creixent (ja que $\frac{dk'}{dk} = \frac{5^{1/2}}{16}\cdot\frac{1}{k^{1/2}} > 0$), còncava (perquè $\frac{d^2k'}{dk^2} = -\frac{5^{1/2}}{32}\cdot\frac{1}{k^{3/2}} < 0$) i passa per l'origen. Gràficament,



• **Estats estacionaris de la trajectòria d'acumulació de capital.** Tot estat estacionari de la trajectòria d'acumulació del capital (1) satisfà

$$k' = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \sqrt{k}$$

i

$$k' = k.$$

Geomètricament, els estats estacionaris es corresponen amb els punts d'intersecció entre la diagonal principal $k' = k$ i la corba definida per (1). A la gràfica, aquests punts són l'origen (amb valor associat $k = 0$) i l'associat amb valor $k = \hat{k}$.

La gràfica il·lustra el fet que l'estat estacionari amb capital per càpita $\hat{k}$ és estable. Si, per exemple, el capital per càpita inicial és $k_0 < \hat{k}$, aleshores la dinàmica (1) apropa el valor del capital per càpita a $\hat{k}$. Es deixa com a exercici mostrar gràficament que la convergència cap a $\hat{k}$ també es produeix si es parteix d'un valor superior a $\hat{k}$.

Solucionant el sistema de dues equacions i definint $k' = k = \hat{k}$, se segueix que

$$\hat{k} = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \hat{k}^{1/2}$$

i (descartant la solució $\hat{k} = 0$)

$$\hat{k}^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

i, així,

$$\boxed{\hat{k} = \frac{5}{16}.}$$

Sabut el valor no trivial del capital per càpita d'estat estacionari, es poden determinar tots els valors d'estat estacionari de les altres variables del model:

$$\hat{\omega} = \left(\frac{\hat{k}}{5}\right)^{1/2} = \left(\frac{5/16}{5}\right)^{1/2} = \frac{1}{4}$$

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{5}{\hat{k}}\right)^{1/2} = \frac{1}{\hat{\omega}} = 4$$

$$\hat{k}_1 = \frac{\hat{\omega}}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\hat{k}_2 = \hat{\omega} - \frac{\hat{\omega}}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{4} - \frac{1/4}{4} = \frac{3}{16}$$

$$\hat{c}_1 = \hat{\omega} - \hat{k}_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\hat{c}_1{}' = \hat{\sigma} \cdot \hat{k}_1 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{c}_2 = 2 \cdot \widehat{\omega} - \widehat{k}_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$$

$$\hat{c}_2{}' = 2 \cdot \widehat{\omega} + \hat{\sigma} \cdot \widehat{k}_2 = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{16} = \frac{5}{4}.$$

En l'estat estacionari on $\widehat{k} = \frac{5}{16}$ es produeixen

$$\widehat{Y} = 2 \cdot \widehat{K}^{1/2} \cdot \widehat{L}^{1/2} = 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot n}{16}\right)^{1/2} \cdot (5 \cdot n)^{1/2} = \frac{5 \cdot n}{2}$$

unitats de bé. D'aquestes, els joves de G1 en demanden

$$n \cdot \hat{c}_1 = n/8,$$

els joves de G2

$$n \cdot \hat{c}_2 = 5 \cdot n/16,$$

els grans de G1

$$n \cdot \hat{c}_1{}' = n/2$$

i els grans de G2

$$n \cdot \hat{c}_2' = 5 \cdot n/4,$$

que sumen

$$\frac{n}{8} + 5 \cdot \frac{n}{16} + \frac{n}{2} + 5 \cdot \frac{n}{4} = n \cdot \frac{2 + 5 + 8 + 20}{16} = \frac{35 \cdot n}{16}.$$

Què passa amb la diferència?