

## 7. Exemples amb tecnologies d'acumulació

### 1. Descripció de l'economia

---

- Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular espontàniament. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb  $n$  membres. Hom viu dos períodes consecutius. Tot consumidor jove té la funció d'utilitat  $u = c \cdot c'$ , on és  $c$  el consum del bé de jove i  $c'$  el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat  $u' = c'$ . La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran.
- Una tecnologia possibilita acumular parcialment el bé: per cada unitat del bé acumulada (com a 'capital') en un període, se'n pot disposar en el període següent només una part  $\alpha < 1$ .

### 2. Anàlisi

---

- **Préstecs i acumulació.** Els individus poden dedicar el bé a tres usos: consumir-lo, prestar-lo i acumular-lo.
- **Decisió de prestar/acumular dels membres de G1.** Tot jove del grup G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' \\ \text{sotmès a} & c_1 + k_1' + l_1 = 1 \quad (\text{restricció present, de jove}) \\ & c_1' = \alpha \cdot k_1' + R \cdot l_1 \quad (\text{restricció futura, de gran}) \end{array}$$

on  $c_1$  és el consum present de l'individu (de jove),  $c_1'$  és el consum del període següent (de gran),  $l_1$  és el volum de préstecs demandats,  $R$  és la taxa d'interès bruta i  $k_1'$  és la quantitat de bé acumulada i disponible parcialment (la quantitat  $\alpha \cdot k_1' < k_1'$ ) en el següent període (per aquest motiu s'escriu  $k_1'$  en comptes de  $k_1$ , tot i que les dues notacions són vàlides).

Dividint per  $R$  la segona restricció i sumant-ne les dues s'obté una restricció única:

$$c_1 + \frac{c_1'}{R} = 1 + k_1' \cdot \left(\frac{\alpha}{R} - 1\right).$$

Aquesta restricció evidencia la importància de la relació entre el paràmetre  $\alpha$  (que mesura com d'eficient és la tecnologia d'acumulació) i la taxa  $R$ .

- Si  $\alpha = R$ , aleshores el terme  $k_1' \cdot \left(\frac{\alpha}{R} - 1\right)$  s'anul·la i el problema de maximització és igual al problema sense la tecnologia d'acumulació (atès que la restricció esdevé  $c_1 + \frac{c_1'}{R} = 1$ ).
- Si  $\alpha > R$ , és més profitós acumular el bé que prestar-lo; això és,  $l_1 = 0$ .
- Si  $\alpha < R$ , és més profitós prestar el bé que acumular-lo; per tant,  $k_1' = 0$ .

El cas (iii) és equivalent a l'anàlisi sense la tecnologia d'acumulació (quan només hi havia un mercat de préstecs com a mecanisme indirecte d'acumulació).

El cas (ii) elimina la necessitat del mercat de préstecs. El problema es redueix a

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + k_1' = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_1' = \alpha \cdot k_1' & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

que equival a

$$\text{maximitzar } u_1 = (1 - k_1') \cdot \alpha \cdot k_1' \quad \text{respecte de } k_1'.$$

La solució implica  $k_1' = c_1 = 1/2$  i  $c_1' = \alpha/2$ .

El cas (i) és el més interessant, en la mesura que coexisteixen l'ús de la tecnologia i el mercat de préstecs. L'element més restrictiu és que  $\alpha = R$  fa que l'individu sigui indiferent entre emprar la tecnologia o el mercat. En aquest cas, es tracta de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + \frac{c_1'}{R} = 1. & \text{(restricció pressupostària vital)} \end{array}$$

La solució d'aquest problema coincideix amb la solució sense tecnologia d'acumulació:  $c_1 = 1/2$  i  $c_1' = R \cdot c_1$ .

Se segueix de la restricció de jove i  $c_1 = 1/2$  que

$$k_1' + l_1 = 1/2. \quad (1)$$

Aquesta condició diu que l'individu vol estalviar  $1/2$  unitats de bé i que ho fa combinant acumulació ( $k_1'$ ) i préstecs ( $l_1$ ).

• **Decisió de manllevar/acumular dels membres de G2.** Tot jove del grup G2 vol

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + k_2' + l_2 = 2 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_2' = 2 + \alpha \cdot k_2' + R \cdot l_2 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

Dividint per  $R$  la segona restricció i sumant-ne les dues s'obté la restricció pressupostària vital:

$$c_2 + \frac{c_2'}{R} = 2 + \frac{2}{R} + k_2' \cdot \left(\frac{\alpha}{R} - 1\right).$$

Els tres casos de l'anàlisi de les decisions dels joves de G1 tornen a ser rellevants. Si  $\alpha < R$ , els joves de G2 renuncien a acumular i participen en el mercat de préstecs.

Si  $\alpha > R$ , no hi ha mercat de préstecs ( $l_2 = 0$ ) i el joves de G2 acumulen bé. En concret, es tracta de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_2 = c_2 \cdot c_2' \\ \text{sotmès a} \quad & c_2 + k_2' = 2 \quad (\text{restricció present, de jove}) \\ & c_2' = 2 + \alpha \cdot k_2' \quad (\text{restricció futura, de gran}) \end{aligned}$$

que equival a

$$\text{maximitzar} \quad u_2 = (2 - k_2') \cdot (2 + \alpha \cdot k_2') \quad \text{respecte de } k_2'.$$

La solució implicaria  $k_2' = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ . Aquest valor, però, no és admissible: com que  $\alpha < 1$ , s'hauria de tenir  $k_2' < 0$ , que no és possible (només és acumulable una quantitat positiva del bé). En conclusió, amb  $\alpha > R$ , els individus ni entren en el mercat de préstecs ni acumulen: es queden amb el que tenen i el consum cada període coincideix amb la dotació del període.

La darrera possibilitat,  $\alpha = R$ , significa haver de

$$\begin{aligned} \text{maximitzar} \quad & u_2 = c_2 \cdot c_2' \\ \text{sotmès a} \quad & c_2 + \frac{c_2'}{R} = 2 + \frac{2}{R}. \quad (\text{restricció pressupostària vital}) \end{aligned}$$

La solució d'aquest problema coincideix amb la solució sense tecnologia d'acumulació:  $c_2 = 1 + 1/R$  i  $c_2' = R \cdot c_2$ .

Emprant la restricció de jove i  $c_2 = 1 + 1/R$  s'obté

$$\boxed{k_2' + l_2 = 1 - \frac{1}{R}} \quad (2)$$

Aquesta condició diu que l'individu vol estalviar en funció de la taxa d'interès, també combinant acumulació ( $k_2'$ ) i préstecs ( $l_2$ ).

• **Solució.** Aquest model té una sorpresa: la solució és múltiple. Hi ha un continu de solucions. La solució del model passa per combinar les equacions (1) (que captura la decisió d'estalviar dels joves de G1), (2) (que representa la decisió d'estalviar dels joves de G2), la condició d'equilibri  $n \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0$  del mercant de préstecs i la condició inicial que definia aquest cas:  $\alpha = R$  (la igualtat entre la taxa d'interès i la proporció de bé efectivament acumulada).

Per (1),  $l_1 = \frac{1}{2} - k_1'$ ; per (2),  $l_2 = 1 - \frac{1}{R} - k_2'$ . Emprant la condició d'equilibri del mercat de préstecs i  $\alpha = R$ ,

$$0 = l_1 + l_2 = \left(\frac{1}{2} - k_1'\right) + \left(1 - \frac{1}{R} - k_2'\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha} - k_1' - k_2'$$

o bé, designant per  $K'$  el total de bé  $k_1' + k_2'$  acumulat

$$K' = \frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha}$$

En suma, no hi ha prou informació per a determinar els valors  $k_1'$  i  $k_2'$ . Tot el que es pot saber és la seva suma: el total  $K'$  de bé que s'acumula. Així, triant (per exemple) un valor de  $k_1'$ , es determina  $k_2'$  (atès que  $k_1' + k_2' = K' = 3/2 - 1/\alpha$ ). A partir de  $k_1'$ , per (1), s'esbrina  $l_1$ . A partir de  $k_2'$ , per (2), es calcula  $l_2$ . Per tot plegat, la solució té un grau de llibertat: per a cada valor de  $k_1'$ , es determinen  $k_2'$ ,  $l_1$  i  $l_2$  (el valors dels consums  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_1'$  i  $c_2'$  van quedar determinats pel fet que  $R = \alpha$ ).

### 3. Quan la tecnologia d'acumulació depèn de la inversió feta en la tecnologia

- **Inversió en la tecnologia.** Aquesta variant del model prèviament explicat consisteix a endogeneitzar el paràmetre  $\alpha$ . Una manera simple de fer-ho és fer dependre  $\alpha$  de la quantitat de bé que s'acumula. Per exemple,  $\alpha$  es pot definir com una funció creixent de  $k'$ : com més 'capital' s'acumula, més eficient és l'acumulació. Una formulació simple és fer

$$\alpha = f(k') = a \cdot k'$$

on  $a$  és una constant positiva inferior a 1 (si  $a > 1$  es tindria producció, no acumulació).

- **Anàlisi.** Es deixa com a exercici solucionar els casos amb  $\alpha$  diferent d' $R$ . Quan  $\alpha$  i  $R$  són iguals, les solucions intermèdies són iguals a les obtingudes prèviament. En particular,

$$\begin{aligned} k_1' + l_1 &= \frac{1}{2} \\ k_2' + l_2 &= 1 - \frac{1}{R} \\ l_1 + l_2 &= 0. \end{aligned}$$

L'única diferència significativa és que  $\alpha = R$  significa que

$$a \cdot k_1' = R = a \cdot k_2'$$

i, en conseqüència,

$$k_1' = k_2'.$$

La condició  $\alpha = R$  no concreta el valor d' $R$ , ja que  $\alpha$  és una funció. Definint  $k' = k_1' = k_2'$ , els préstecs serien

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{2} - k' \\ l_2 &= 1 - k' - \frac{1}{a \cdot k'} \end{aligned}$$

Aplicant la condició d'equilibri,

$$0 = l_1 + l_2 = \left(\frac{1}{2} - k'\right) + \left(1 - k' - \frac{1}{a \cdot k'}\right) = \frac{3}{2} - 2k' - \frac{1}{a \cdot k'}$$

o, equivalentment,

$$4 \cdot a \cdot (k')^2 - 3 \cdot a \cdot k' + 2 = 0.$$

Resolent,

$$k' = \frac{3}{8} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{32}{9 \cdot a}} \right).$$

Per a què els valors resultant de la fórmula anterior siguin admissibles, cal que l'arrel quadrada no s'apliqui sobre un nombre negatiu. Això és, cal que  $9 \cdot a > 32$  o que  $a > 32/9$ . Però per hipòtesi del model  $a < 1$ , la qual cosa implica que no hi ha solució on tots els joves acumulen. Es deixa com a exercici analitzar si hi ha solucions on només un grup acumula.