6a. Fills

1. Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular espontàniament. Inicialment hi ha dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. A efectes pràctics, hom viu dos períodes.
• Tot jove decideix quants fills tenir. Els fills són infants quan el pare és jove i esdevenen joves el període següent, quan el pare és gran. Cada jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c' \cdot n^{\delta}$, on és c el consum del bé de jove, c' el consum de gran, n és el nombre de fills que el jove decideix tenir i δ és un paràmetre positiu. Tot individu gran té la funció d'utilitat $u' = c'$. Els infants són econòmicament inactius i no tenen funció d'utilitat (es poden considerar 'agents immadurs').
• El cost de tenir un fill és $\gamma > 0$ unitats de bé per fill.
• La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran.

2. Anàlisi

• **Préstecs i acumulació.** Els individus poden dedicar el bé a tres usos: consumir-lo, prestar-lo i esmerçar-lo en tenir fills.

• **Decisions dels membres de** G1**.** Tot jove del grup G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot {c_1}' \cdot {n_1}^{\delta} & \\ \text{sotmès a} & c_1 + l_1 + \gamma \cdot n_1 = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & {c_1}' = R \cdot l_1 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c_1 és el consum present (de jove), ${c_1}'$ és el consum del període següent (de gran), n_1 és el nombre de fills que es decideix tenir, l_1 és el volum de préstecs i R és la taxa d'interès bruta.

Les dues restriccions poden integrar-se en una de sola:

$$c_1 + \frac{{c_1}'}{R} + \frac{\gamma \cdot n_1}{R} = 1.$$

El lagrangià corresponent es maximitza respecte de c_1, ${c_1}'$ i n_1. Les solucions són:

$$c_1 = l_1 = \frac{1}{2+\delta}$$

$$c_1' = R \cdot c_1 = \frac{R}{2+\delta}$$

$$\boxed{n_1 = \frac{\delta}{\gamma \cdot (2+\delta)}.}$$

Això significa que si hi ha x joves en G1 en el període t, aleshores n'hi haurà $x \cdot n_1$ en $t+1$.

• **Decisions dels membres de G2.** Tot jove del grup G2 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2{}' \cdot n_2{}^{\delta} & \\ \text{sotmès a} & c_2 + l_2 + \gamma \cdot n_2 = 2 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_2{}' = 2 + R \cdot l_1 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c_2 és el consum present de l'individu (de jove), $c_2{}'$ és el consum del període següent (de gran), n_2 és el nombre de fills que es decideix tenir, l_2 és el volum de préstecs i R és la taxa d'interès.

Les dues restriccions poden integrar-se en una de sola:

$$c_2 + \frac{c_2{}'}{R} + \frac{\gamma \cdot n_2}{R} = 2 + \frac{2}{R}.$$

El lagrangià corresponent es maximitza respecte de c_2, $c_2{}'$ i n_2. Les solucions són:

$$c_2 = \frac{2 + 2/R}{2 + \delta}$$

$$c_2' = R \cdot c_2 = \frac{2 + 2 \cdot R}{2 + \delta}$$

$$l_2 = \frac{c_2' - 2}{R} = c_2 - \frac{2}{R} = \frac{2 + \frac{2}{R}}{2 + \delta} - \frac{2}{R}$$

$$\boxed{n_2 = \frac{5 + 2 \cdot \delta}{\gamma \cdot (1 + \delta + 3/\delta)} = \frac{\delta \cdot (5 + 2 \cdot \delta)}{\gamma \cdot (3 + \delta + \delta^2)}.}$$

• **Dinàmica demogràfica.** Quin grup té més fills? En paticular, per a què $n_2 > n_1$ cal que

$$\frac{\delta \cdot (5 + 2 \cdot \delta)}{\gamma \cdot (3 + \delta + \delta^2)} > \frac{\delta}{\gamma \cdot (2 + \delta)}.$$

Això és,

$$n_2 > n_1 \leftrightarrow (5 + 2 \cdot \delta) \cdot (2 + \delta) > (3 + \delta + \delta^2).$$

Però

$$(5 + 2 \cdot \delta) \cdot (2 + \delta) > (3 + \delta + \delta^2)$$

equival a

$$7 + 8 \cdot \delta + \delta^2 > 0,$$

que és el cas. Com a conseqüència, $n_2 > n_1$: el grup 'ric' en té més, de fills.

• **Taxa d'interès d'equilibri.** En el període inicial, la condició d'equilibri en el mercat de préstecs és

$$n \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0$$

o

$$\left(\frac{1}{2+\delta}\right) + \left(\frac{2+\frac{2}{R}}{2+\delta} - \frac{2}{R}\right) = 0$$

d'on es conclou

$$\boxed{R = \frac{2}{3} \cdot (1+\delta).}$$

En el segon període la condició seria

$$n_1 \cdot l_1 + \; n_2 \cdot l_2 = 0$$

on n_1 i n_2 es van determinar en el període anterior (els fills que van néixer en el període inicial esdevenen joves en el segon període). Per a períodes posteriors, les funcions de préstecs l_1 i l_2 són les mateixes (no depenen del període considerat), però la grandària de cada grup serà diferent (ja que el nombre de membres de cada grup depèn del període).

En concret, en el període inicial $t = 1$ hi ha n membres en G1; en $t = 2$, n'hi ha $n \cdot n_1$ (cadascun dels n membres originals n'ha tingut n_1); en $t = 3$, n'hi ha $(n \cdot n_1) \cdot n_1$ (ja que cadascun dels $n \cdot n_1$ membres n'ha tingut n_1); i així successivament. Per inducció, es conclou que en el període t el grup G1 estarà format per $n \cdot (n_1)^{t-1}$ membres.

Es deixa com a exercici determinar el valor de la taxa d'interès en la resta de períodes i establir si aquest valor convergeix (el fet que $n_2 > n_1$ és rellevant: cada cop hi ha més demandants de préstecs en comparació amb els oferents).