Uns exemples amb diner

1. Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el seu primer període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t+1$, $u_{t+1} = c_{t+1}$.

• Atès que hom és idèntic, en aquest economia no hi ha cap intercanvi. Suposem que els grans de la primera generació creen un instrument, anomenat 'diner' (del qual no se'n crea més). Aquest instrument no té cap valor intrínsec: no és un bé que es pugui consumir. L'únic tret que el defineix és que els seus posseïdors el poden canviar per bé.

2. Anàlisi amb diner

• **Mercat de diner.** Els primers grans creen una quantitat M de diner, que hom accepta sempre a canvi del bé. El preu (en bé) del diner es determina en un mercat competitiu de diner. Atès que la possessió del diner no proporciona utilitat, els individus que n'adquireixen en un període posen a la venda en el següent període tot el diner que han comprat en el període anterior. Per aquest motiu, cada període, l'oferta de diner és el valor fix M. Les funcions de demanda es determinen a continuació.

• **Decisió de comprar diner.** Els grans no tenen dotació. Per aquest motiu tenen incentiu en adquirir diner de joves i intercanviar de grans el diner per bé. Així, cada jove vol

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' & \\ \text{sotmès a} & c + p \cdot m = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c' = p' \cdot m & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c és el consum present de l'individu (de jove), c' és el consum del període següent (de gran), m és la quantitat de diner que l'individu demanda, p és el preu corrent (en unitats de bé) d'una unitat de diner i p' és el preu futur (en unitats de bé) d'una unitat de diner. El mateix valor m apareix a les dues restriccions pressupostàries perquè, de gran, cap individu no té interès en conservar cap fracció del diner adquirit de jove. Com en el cas del bons públics, el diner és, per als individus, un instrument d'estalvi.

Un aspecte estrany del problema anterior és que p és el preu del diner en bé, quan l'habitual és expressar el bé en termes de diner. En concret, en aquest model, p expressaria el poder adquisitiu del diner (unitats de bé per unitats de diner). El nivell de preus de l'economia seria $1/p$: unitats de diner per unitat de bé (o preu del bé en diner).

Introduint les dues restriccions en la funció objectiu, el problema esdevé

$$\text{maximitzar} \quad u = (1 - p \cdot m) \cdot (p' \cdot m) \quad \text{respecte d'}m$$

on, assumint el mercat competitiu, l'individu pren p i p' com a paràmetres.

La solució és la funció de demanda de diner d'un jove:

$$\boxed{m = \frac{1}{2p}\,.}$$

• **Equilibri en el mercat de diner.** En equilibri, oferta i demanda de diner són iguals. L'oferta de diner és la mateixa cada període (per la hipòtesi que el diner només es crea un cop): M. La demanda total de diner cada període és $n \cdot m = n/2p$. Aïllant p de l'equació $M = n/2p$,

$$\boxed{p = \frac{n}{2 \cdot M}\,.}$$

En el període següent, el resultat seria el mateix: $p' = n/2M$. En conseqüència, $p = p'$. D'aquí, $p \cdot m = p' \cdot m$. Atès que $m = 1/2p$, $p \cdot m = 1/2$. El lot de consum en equilibri és $(c, c') = (1/2, 1/2)$.

• **Solució Paretoeficient.** Les assignacions Paretoeficients de l'economia són el parells (c, c') que solucionen el problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + c' = 1\,. \end{array}$$

L'única solució d'aquest problema és el lot $(c, c') = (1/2, 1/2)$, que és lot que s'ha obtingut amb la introducció del mercat de diner.

3. Diner en la funció d'utilitat

• **Quan el diner dóna la felicitat.** S'analitza a continuació una variant on els joves obtenen utilitat d'adquirir diner. En particular, tot jove pretén

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \cdot m & \\ \text{sotmès a} & c + p \cdot m = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c' = p' \cdot m\,. & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

Un cop introduïdes les restriccions en u, cal

$$\text{maximitzar} \quad u = (1 - p \cdot m) \cdot (p' \cdot m) \cdot m \quad \text{respecte d'}m.$$

El resultat:

$$\boxed{m = \frac{2}{3p}.}$$

D'aquí i la primera restricció,

$$c = 1/3\,.$$

En l'equilibri del mercat de diner:

$$\text{oferta de diner} = \text{demanda de diner}$$

$$M = n \cdot m = n \cdot (2/3p)$$

d'on s'obté

$$\boxed{p = \frac{2 \cdot n}{3 \cdot M}.}$$

Com en el cas anterior, el valor de p en el següent període és el mateix. En suma, $p = p'$ i el lot de consum és $(c, c') = (1/3, 2/3)$.

• **Exercici 1.** I si són els grans qui deriven utilitat del diner? Per exemple, amb la funció $u' = c' \cdot m$.

• **Exercici 2.** I si joves i grans deriven tots dos utilitat del diner?

• **Exercici 3.** I si el 50% dels joves tenen la funció d'utilitat $u = c \cdot c' \cdot m$ i l'altre 50% té la funció $u = c \cdot c'$.

4. Diner legítim i diner fals

• **Una economia amb falsificadors de diner.** En aquesta variant, hi ha un període on la meitat dels grans fan circular diner fals (sense que ningú més no se n'adoni). Específicament, la meitat dels joves d'un cert període t decideix que falsificarà el diner que vendrà de gran i, per consegüent, no adquireix diner de jove. De grans, falsifiquen la mateixa quantitat de diner que els altres grans posen en circulació. En el següent i altres períodes hom és honest i no falsifica més diner.

• **Anàlisi.** El model és el descrit en §1. En t la meitat $n/2$ d'individus joves no compra el bé i, per tant, consumeix tota la seva dotació. L'oferta de diner en t és M: el diner que venen els que són grans en t. En canvi, la demanda total de diner és la meitat de la calculada en §2: la funció de demanda dels individus que demanden diner continua essent $m = 1/2p$, però ara només $n/2$ individus joves van al mercat a comprar diner. En resum, en l'equilibri del mercat de diner en t,

$$M = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot p}.$$

El preu d'equilibri és

$$\boxed{p = \frac{n}{4 \cdot M}.}$$

Sigui $\tilde{m} = M/n$ la quantitat de diner per càpita (grans exclosos): el diner que correspondria a cada jove si es distribuís entre tots ells. El resultat anterior seria

$$p = \frac{1}{4\tilde{m}}.$$

El resultat en §2 era

$$p = \frac{1}{2\tilde{m}}.$$

La conclusió és que la reducció a la meitat del nombre de demandants de diner redueix a la meitat el valor del diner (cau el preu del diner però puja el preu del bé en diner: inflació del nivell de preus del bé).

En el període següent, tots els joves són honestos i demanden la quantitat de diner $1/2p'$. A l'altra banda del mercat hi ha els grans honestos i els grans deshonestos. Els primers (que són $n/2$) venen la quantitat total M de diner que van comprar de joves; els segons (que també són $n/2$) venen la mateixa quantitat M de diner fals. Això fa que la nova oferta de diner sigui $2 \cdot M$. En l'equilibri del mercat de diner en $t + 1$

$$2 \cdot M = \frac{n}{2p'}.$$

Conclusió:

$$p' = \frac{1}{4\tilde{m}}$$

i, així,

$$p = p'.$$

Aquest resultat indica que la falsificació que es produeix en $t + 1$ causa una caiguda del valor del diner prèviament en t, abans que la falsificació es produeixi. En t, el diner perd valor (en termes del bé) perquè se'n demanda menys; en $t + 1$, perquè se n'ofereix més.

L'anàlisi clou amb la determinació dels lots de consum. Els joves deshonestos consumeixen, en t, tota la seva dotació (perquè no compren diner): $c = 1$. De grans, falsifiquen la mateixa quantitat que venen els grans honestos: M. Així, cada gran deshonest ven $\tilde{m}$ unitats de diner a preu $p' = \frac{1}{4\tilde{m}}$. El consum d'un gran deshonest resulta ser $\frac{1}{4}$. En resum, el lot de consum dels deshonestos és $(c, c') = (1, \frac{1}{4})$.

Els joves honestos consumeixen $c = 1/2$ (com en l'anàlisi de §2). Però de grans no poden vendre la quantitat de diner a preu $p' = \frac{1}{2\tilde{m}}$ sinó a preu $p' = \frac{1}{4\tilde{m}}$. El seu consum és també $\frac{1}{4}$. En suma, el lot de consum dels honestos és $(c, c') = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Així doncs, és com si cada jove deshonest hagués robat $\frac{1}{2}$ unitats del bé d'algun jove honest.

La falsificació té un efecte permanent (perquè el diner fals no es destrueix): el valor del diner cau per sempre a la meitat del valor abans de la falsificació.

5. El poder destructiu del diner

• **Diner bo vs diner dolent.** L'anàlisi en la secció §2 il·lustra els efectes beneficiosos de la creació de diner. L'exemple analitzant a continuació mostra el costat fosc del diner: la seva capacitat desestabilitzadora.

• **Descripció de l'economia.** Torna l'exemple del model bàsic. Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. Hom viu dos períodes consecutius. Tot consumidor jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$. La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran. No hi ha mercat de préstecs privats però es disposa d'una quantitat fixa M de diner, creada en temps immemorial.

• **Demandes de diner.** Els joves de G1 volen

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1{}' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + p \cdot m_1 = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_1{}' = p' \cdot m_1 \;\; . & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

La solució queda expressada per la funció de demanda de diner

$$\boxed{m_1 = \frac{1}{2p}\,.}$$

Els joves de G2 volen

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2{}' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + p \cdot m_2 = 2 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_2{}' = 2 + p' \cdot m_2. & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

Equivalentment, es tracta de

$$\text{maximitzar} \quad u_2 = (2 - p \cdot m_2) \cdot (2 + p' \cdot m_2) \quad \text{respecte d'} m_2.$$

La solució queda expressada per la funció de demanda de diner

$$\boxed{m_2 = \frac{p' - p}{p' \cdot p}\,.}$$

Segons m_2, els joves de G2 no demanden diner (i, per tant, consumeixen la seva dotació) si $p' = p$. Això fa que calgui un increment del valor del diner ($p' > p$) per a induir als membres de G2 a demandar diner (si els joves de G2 no participen en el mercat de diner, la solució és la calculada en §2; en particular, $p' = p$).

• **Equilibri en el mercat de diner quan participen els membres de G2.** Cada període, l'oferta de diner és la constant M. La demanda total és $n \cdot m_1 + n \cdot m_2$. En conseqüència, en equilibri,

$$M = \frac{n}{2 \cdot p} + \frac{n \cdot (p' - p)}{p' \cdot p}$$

o

$$\frac{M}{n} = \frac{1/2}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{3/2}{p} - \frac{1}{p'}.$$

Definint $\widetilde{m} = M/n$, $v = 1/p$ i $v' = 1/p'$,

$$\widetilde{m} = \frac{3}{2} \cdot v - v'.$$

Un resultat similar és cert el període següent:

$$\widetilde{m} = \frac{3}{2} \cdot v' - v''.$$

Per conseqüent,

$$\frac{3}{2} \cdot v - v' = \frac{3}{2} \cdot v' - v''$$

i, finalment,

$$\boxed{v'' - \frac{5}{2} \cdot v' + \frac{3}{2} \cdot v = 0\,.} \tag{1}$$

L'equació (1) és una equació en diferències lineal: $v_{t+2} - \frac{5}{2} \cdot v_{t+1} + \frac{3}{2} \cdot v_t = 0$. La solució és del tipus

$$v_t = a \cdot {\lambda_1}^t + b \cdot {\lambda_2}^t$$

on a i b són constants i λ_1i λ_2 són les solucions de l'equació característica

$$\lambda^2 - \frac{5}{2} \cdot \lambda + \frac{3}{2} = 0\,.$$

Atès que $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, la solució d'(1) és

$$v_t = a \cdot 1^t + b \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t = a + b \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t.$$

Condicions inicials sobre v_t determinen els valors a i b. En $t = 0$,

$$v_0 = a \cdot 1^0 + b \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^0 = a + b.$$

En $t = 1$,

$$v_1 = a \cdot 1^1 + b \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^1 = a + 3 \cdot b/2.$$

D'aquí, donats v_0 i v_1,

$$a = 3 \cdot v_0 - 2 \cdot v_1$$

i

$$b = 2(v_1 - v_0).$$

Recordant que $m_2 > 0$ requeria $p' > p$, es conclou que $p_1 > p_0$. Com que $v = 1/p$, $v_1 < v_0$. De tot plegat es dedueix que

$$b < 0.$$

Per la presumpció que el preu p del diner en bé és sempre positiu, $v > 0$. En particular, $0 < v_0 = a + b$. Amb $b < 0$, la conclusió és que

$$a > 0.$$

Recapitulant,

$$v_t = a + b \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$$

defineix una seqüència decreixent: el terme $\left(\frac{3}{2}\right)^t$ creix exponencialment (tendeix cap a infinit, perquè la base és superior a 1), però, com $b < 0$, el terme $b \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$ és un valor negatiu que es fa cada cop més gran. D'aquesta manera, el valor a sobre el qual es defineix v va sent minorat amb el temps i v_t s'apropa a zero (no pot baixar per sota de zero).

A la inversa, la disminució exponencial de v equival a l'increment exponencial de p. La disminució de v representa una <u>deflació</u> (les unitats de diner que es canvien per unitat de bé minven), en tant que l'augment de p indica que el diner cada cop val més en termes de bé (cada cop cal pagar més bé per unitat de diner). En aquesta economia, el diner 'devora' els béns: la part financera de l'economia cada període es fa més gran en relació amb la part real de l'economia.

Òbviament, la deflació no pot continuar al ritme que estableix la dinàmica $v_t = a + b \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$, perquè aquesta dinàmica portaria a un valor negatiu de v i, per extensió, de p. La conclusió final és que aquesta economia col·lapsa: <u>permetre que el grup G2 s'incorpori al mercat de diner desestabilitza el mercat i fa inviable l'economia construïda sobre la base del diner</u>.