Exemples amb tecnologies d'acumulació

Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular espontàniament. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. Hom viu dos períodes consecutius. Tot consumidor jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$. La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran.

• Una tecnologia possibilita acumular parcialment el bé: per cada unitat del bé acumulada (com a 'capital') en un període, se'n pot disposar en el període següent només una part $\alpha < 1$.

Anàlisi

• **Préstecs i acumulació.** Els individus poden dedicar el bé a tres usos: consumir-lo, prestar-lo i acumular-lo.

• **Decisió de prestar/acumular dels membres de** G1. Tot jove del grup G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot {c_1}' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + {k_1}' + l_1 = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & {c_1}' = \alpha \cdot {k_1}' + R \cdot l_1 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c_1 és el consum present de l'individu (de jove), ${c_1}'$ és el consum del període següent (de gran), l_1 és el volum de préstecs demandats, R és la taxa d'interès bruta i ${k_1}'$ és la quantitat de bé acumulada i disponible parcialment (la quantitat $\alpha \cdot {k_1}' < {k_1}'$) en el següent període (per aquest motiu s'escriu ${k_1}'$ en comptes de k_1, tot i que les dues notacions són vàlides).

Dividint per R la segona restricció i sumant-ne les dues s'obté una restricció única:

$$c_1 + \frac{{c_1}'}{R} = 1 + {k_1}' \cdot \left(\frac{\alpha}{R} - 1\right).$$

Aquesta restricció evidencia la importància de la relació entre el paràmetre α (que mesura com d'eficient és la tecnologia d'acumulació) i la taxa R.

(i) Si $\alpha = R$, aleshores el terme ${k_1}' \cdot \left(\frac{\alpha}{R} - 1\right)$ s'anul·la i el problema de maximització és igual al problema sense la tecnologia d'acumulació (atès que la restricció esdevé $c_1 + \frac{{c_1}'}{R} = 1$).

(ii) Si $\alpha > R$, és més profitós acumular el bé que prestar-lo; això és, $l_1 = 0$.

(iii) Si $\alpha < R$, és més profitós prestar el bé que acumular-lo; per tant, ${k_1}' = 0$.

El cas (iii) és equivalent a l'anàlisi sense la tecnologia d'acumulació (quan només hi havia un mercat de préstecs com a mecanisme indirecte d'acumulació).

El cas (ii) elimina la necessitat del mercat de préstecs. El problema es redueix a

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + k_1' = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_1' = \alpha \cdot k_1' & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

que equival a

$$\text{maximitzar} \quad u_1 = (1 - k_1') \cdot \alpha \cdot k_1' \quad \text{respecte de } k_1'.$$

La solució implica $k_1' = c_1 = 1/2$ i $c_1' = \alpha/2$.

El cas (i) és el més interessant, en la mesura que coexisteixen l'ús de la tecnologia i el mercat de préstecs. L'element més restrictiu és que $\alpha = R$ fa que l'individu sigui indiferent entre emprar la tecnologia o el mercat. En aquest cas, es tracta de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + \frac{c_1'}{R} = 1\,. & \text{(restricció pressupostària vital)} \end{array}$$

La solució d'aquest problema coincideix amb la solució sense tecnologia d'acumulació: $c_1 = 1/2$ i $c_1' = R \cdot c_1$.

Se segueix de la restricció de jove i $c_1 = 1/2$ que

$$\boxed{k_1' + l_1 = 1/2.} \tag{1}$$

Aquesta condició diu que l'individu vol estalviar ½ unitats de bé i que ho fa combinant acumulació (k_1') i préstecs (l_1).

• **Decisió de manllevar/acumular dels membres de** G2**.** Tot jove del grup G2 vol

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + k_2' + l_2 = 2 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_2' = 2 + \alpha \cdot k_2' + R \cdot l_2 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

Dividint per R la segona restricció i sumant-ne les dues s'obté la restricció pressupostària vital:

$$c_2 + \frac{c_2'}{R} = 2 + \frac{2}{R} + +k_2' \cdot \left(\frac{\alpha}{R} - 1\right).$$

Els tres casos de l'anàlisi de les decisions dels joves de G1 tornen a ser rellevants. Si $\alpha < R$, els joves de G2 renuncien a acumular i participen en el mercat de préstecs.

Si $\alpha > R$, no hi ha mercat de préstecs ($l_2 = 0$) i el joves de G2 acumulen bé. En concret, es tracta de

$$\begin{array}{rll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2{}' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + k_2{}' = 2 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_2{}' = 2 + \alpha \cdot k_2{}' & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

que equival a

$$\text{maximitzar} \quad u_2 = (2 - k_2{}') \cdot (2 + \alpha \cdot k_2{}') \quad \text{respecte de } k_2{}'.$$

La solució implicaria $k_2{}' = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$. Aquest valor, però, no és admissible: com que $\alpha < 1$, s'hauria de tenir $k_2{}' < 0$, que no és possible (només és acumulable una quantitat positiva del bé). En conclusió, amb $\alpha > R$, els individus ni entren en el mercat de préstecs ni acumulen: es queden amb el que tenen i el consum cada període coincideix amb la dotació del període.

La darrera possibilitat, $\alpha = R$, significa haver de

$$\begin{array}{rll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2{}' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + \frac{c_2{}'}{R} = 2 + \frac{2}{R}. & \text{(restricció pressupostària vital)} \end{array}$$

La solució d'aquest problema coincideix amb la solució sense tecnologia d'acumulació: $c_2 = 1 + 1/R$ i $c_2{}' = R \cdot c_2$.

Emprant la restricció de jove i $c_2 = 1 + 1/R$ s'obté

$$\boxed{k_2{}' + l_2 = 1 - \frac{1}{R}.} \tag{2}$$

Aquesta condició diu que l'individu vol estalviar en funció de la taxa d'interès, també combinant acumulació ($k_2{}'$) i préstecs (l_2).

• **Solució.** Aquest model té una sorpresa: la solució és múltiple. Hi ha un continu de solucions. La solució del model passa per combinar les equacions (1) (que captura la <u>decisió d'estalviar dels joves de G1</u>), (2) (que representa la <u>decisió d'estalviar dels joves de G2</u>), la condició d'equilibri $n \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0$ del <u>mercat de préstecs</u> i la condició inicial que definia aquest cas: $\alpha = R$ (la igualtat entre la taxa d'interès i la proporció de bé efectivament acumulada).

Per (1), $l_1 = \frac{1}{2} - k_1{}'$; per (2), $l_2 = 1 - \frac{1}{R} - k_2{}'$. Emprant la condició d'equilibri del mercat de préstecs i $\alpha = R$,

$$0 = l_1 + l_2 = \left(\frac{1}{2} - k_1{}'\right) + \left(1 - \frac{1}{R} - k_2{}'\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha} - k_1{}' - k_2{}'$$

o bé, designant per K' el total de bé $k_1{}' + k_2{}'$ acumulat

$$\boxed{K' = \frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha}.}$$

En suma, no hi ha prou informació per a determinar els valors $k_1{}'$ i $k_2{}'$. Tot el que es pot saber és la seva suma: el total K' de bé que s'acumula. Així, triant (per exemple) un valor de $k_1{}'$, es determina $k_2{}'$ (atès que $k_1{}' + k_2{}' = K' = 3/2 - 1/\alpha$). A partir de $k_1{}'$, per (1), s'esbrina l_1. A partir de $k_2{}'$, per (2), es calcula l_2. Per tot plegat, la solució té un grau de llibertat: per a cada valor de $k_1{}'$, es determinen $k_2{}'$, l_1 i l_2 (el valors dels consums c_1, c_2, $c_1{}'$ i $c_2{}'$ van quedar determinats pel fet que $R = \alpha$).

Quan la tecnologia d'acumulació depèn de la inversió feta en la tecnologia

• **Inversió en la tecnologia.** Aquesta variant del model prèviament explicat consisteix a endogeneitzar el paràmetre α. Una manera simple de fer-ho és fer dependre α de la quantitat de bé que s'acumula. Per exemple, α es pot definir com una funció creixent de k': com més 'capital' s'acumula, més eficient és l'acumulació. Una formulació simple és fer

$$\alpha = f(k') = a \cdot k'$$

on a és una constant positiva inferior a 1 (si $a > 1$ es tindria producció, no acumulació).

• **Anàlisi.** Es deixa com a exercici solucionar els casos amb α diferent d'R. Quan α i R són iguals, les solucions intermèdies són iguals a les obtingudes prèviament. En particular,

$$k_1{}' + l_1 = \frac{1}{2}$$
$$k_2{}' + l_2 = 1 - \frac{1}{R}$$
$$l_1 + l_2 = 0\,.$$

L'única diferència significativa és que $\alpha = R$ significa que

$$a \cdot k_1{}' = R = a \cdot k_2{}'$$

i, en conseqüència,

$$k_1{}' = k_2{}'.$$

La condició $\alpha = R$ no concreta el valor d'R, ja que α és una funció. Definint $k' = k_1{}' = k_2{}'$, els préstecs serien

$$l_1 = \frac{1}{2} - k'$$
$$l_2 = 1 - k' - \frac{1}{a \cdot k'}$$

Aplicant la condició d'equilbri,

$$0 = l_1 + l_2 = \left(\frac{1}{2} - k'\right) + \left(1 - k' - \frac{1}{a \cdot k'}\right) = \frac{3}{2} - 2k' - \frac{1}{a \cdot k'}$$

o, equivalentment,

$$4 \cdot a \cdot (k')^2 - 3 \cdot a \cdot k' + 2 = 0.$$

Resolent,

$$\boxed{k' = \frac{3}{8}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{32}{9 \cdot a}}\right).}$$

Per a què els valors resultant de la fórmula anterior siguin admissibles, cal que l'arrel quadrada no s'apliqui sobre un nombre negatiu. Això és, cal que $9 \cdot a > 32$ o que $a > 32/9$. Però per hipòtesi del model $a < 1$, la qual cosa implica que no hi ha solució on tots els joves acumulen. Es deixa com a exercici analitzar si hi ha solucions on només un grup acumula.