Un altre exemple amb només deute públic

Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. Hom viu dos períodes consecutius. Tot consumidor jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$. La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran. No hi ha mercat de préstecs privat.

• Existeix un agent immortal: un govern. Cada període el govern emet <u>bons</u>: títols de deute que, <u>a canvi de pagar un preu de p unitats del bé per bo en el període t, prometen pagar (per cada bo comprat en t) una unitat de bé en el següent període $t+1$</u>. Hom creu que el govern pagarà el seu deute. El govern dilapida els ingressos de la primera emissió de bons i el pagament del deute cada període es fa emetent més bons.

Anàlisi

• **Decisió de comprar bons dels joves de G1.** Cada jove de G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + p \cdot b_1 = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_1' = b_1 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c_1 és el consum present de l'individu (de jove), c_1' és el consum del període següent (de gran), b_1 és la quantitat de bons que l'individu demanda i p és el preu (en unitats de bé) d'un bo. Introduint les dues retriccions en la funció objectiu el problema es transforma en un de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u_1 = (1 - p \cdot b_1) \cdot b_1 \\ \text{respecte de } b_1 & \end{array}$$

La funció de demanda de bons resultant és

$$\boxed{b_1 = \frac{1}{2p}.}$$

• **Decisió de comprar bons dels joves de G2.** Cada jove de G2 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + p \cdot b_2 = 2 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_2' = 2 + b_2 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c_2 és el consum present de l'individu (de jove), $c_2{}'$ és el consum del període següent (de gran), b_2 és la quantitat de bons que l'individu demanda i p és el preu (en unitats de bé) d'un bo. Inserint les dues retriccions en la funció objectiu el problema esdevé

$$\underset{\text{respecte de } b_2}{\text{maximitzar}} \quad u_2 = (2 - p \cdot b_2) \cdot (2 + b_2)$$

La funció de demanda de bons resultant és

$$\boxed{b_2 = \frac{1-p}{p}.}$$

• **Condició d'equilibri en el mercat de bons.** Designant per <u>B la quantitat total de bons que el govern emet</u> en el període t considerat, l'equilibri en el mercat de bons resulta de la igualtat entre l'oferta B de bons i la demanda total $n \cdot b$ de bons. Per tant,

$$B = n \cdot b_1 + n \cdot b_2\,. \tag{1}$$

• **Condició d'equilibri pressupostari del govern (des del període 2).** El govern assoleix l'equilibri pressupostari si s'igualen ingressos i despeses del govern. Els ingressos coincideixen amb la recaptació $n \cdot p \cdot b_1 + n \cdot p \cdot b_2$ derivada de l'emissió de bons: n individus compren b bons i paguen p unitats de bé per bo. Les despeses es redueixen a pagar el deute generat pels bons emesos en el període anterior. Emetre B_{-1} bons en el període anterior significa haver de pagar B_{-1} unitats del bé en el període present. En resum, la condició d'equilibri pressupostari és

$$B_{-1} = n \cdot p \cdot b_1 + n \cdot p \cdot b_2\,. \tag{2}$$

• **Càlcul del preu dels bons.** Multiplicant per p els dos costats d'(1), $p \cdot B = p \cdot n \cdot b_1 + p \cdot n \cdot b_2$. Combinant aquesta equació amb (2),

$$B_{-1} = p \cdot B\,. \tag{3}$$

La condició (3) diu que el deute arrossegat del període anterior es paga amb noves emissions de deute (de bons). Aquesta condició expressarà la trajectòria d'acumulació del deute un cop s'hagi introduir la fórmula que especifica el valor de p en funció dels paràmetres del model. Amb aquest objectiu, es tractaria de trobar aquesta fórmula a partir de (2) i substituir p en (3).

De (2) i les funcions de demanda de bons $b_1 = \frac{1}{2p}$ i $b_2 = \frac{1-p}{p}$ se segueix que $B_{-1} = n \cdot p \cdot \frac{1}{2p} + n \cdot p \cdot \frac{1-p}{p} = n \cdot (\frac{3}{2} - p)$. Aïllant p s'obté la fórmula que expressa p en termes de paràmetres:

$$\boxed{p = \frac{3}{2} - \frac{B_{-1}}{n}.}$$

• **Dinàmica del deute públic.** Si l'equació anterior s'introdueix en (3) i s'aïlla B, s'obté l'expressió de la trajectòria d'acumulació del deute públic:

$$\boxed{B = \frac{2 \cdot n \cdot B_{-1}}{3 \cdot n - 2 \cdot B_{-1}}\,.} \tag{4}$$

• **Obtenció dels estats estacionaris de la trajectòria d'acumulació del deute públic.** Una expressió més convencional de (4) és

$$B_t = \frac{2nB_{t-1}}{3n - 2B_{t-1}}.$$

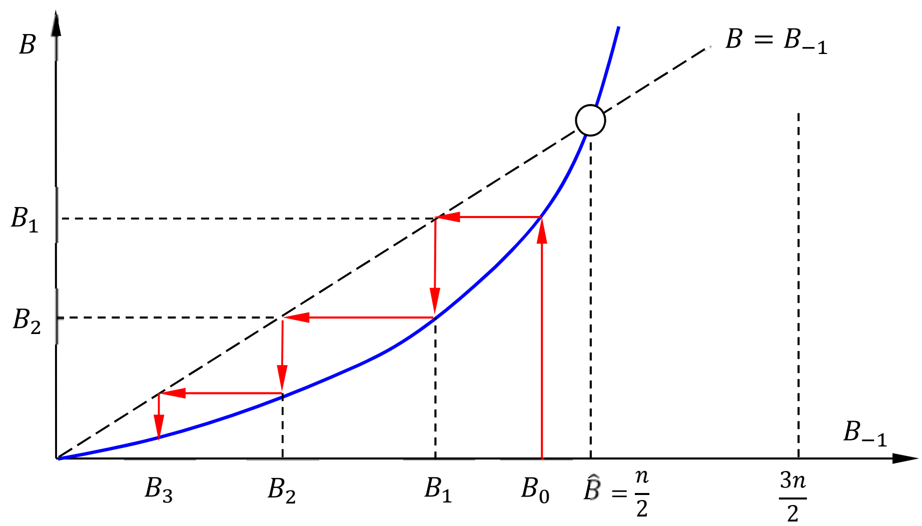
Aquesta funció és creixent i convexa si $B_{t-1} < 3n/2$, ja que la primera derivada

$$\frac{dB_t}{dB_{t-1}} = \frac{6 \cdot n^2}{(3n - 2B_{t-1})^2}$$

pren sempre un valor positiu i la segona derivada

$$\frac{d^2B_t}{dB_{t-1}{}^2} = \frac{24 \cdot n^2}{(3n - 2B_{t-1})^3}$$

pren un valor positiu si $B_{t-1} < \frac{3n}{2}$ (aquesta desigualtat és una mena de restricció del deute per càpita: $\frac{B_{t-1}}{2n} < \frac{3}{4}$, on es considera com a població els $2 \cdot n$ demandants joves de deute). L'equació (4) es representa gràficament a continuació, per al domini $0 \leq B_{t-1} < \frac{3n}{2}$.



Els estats estacionari de (4) es corresponen amb la solució del sistema d'equacions

$$B = \frac{2 \cdot n \cdot B_{-1}}{3 \cdot n - 2 \cdot B_{-1}}$$

$$B = B_{-1}.$$

Gràficament, els estats estacionaris s'associen amb els punts d'intersecció entre la corba que representa la trajectòria d'acumulació del deute i la diagonal principal. La gràfica indica que només hi ha valor (positiu) del deute d'estat estacionari: $\hat{B}$. Hi ha un segon valor del deute en un estat estacionari, però és un valor trivial: $B = 0$ (l'origen de la gràfica).

La representció gràfica també suggereix que el valor $\hat{B}$ no representa un estat estacionari estable. Si, per exemple, el valor inicial del deute és $B_0 < \hat{B}$, aleshores el procés d'acumulació del deute no fa retornar el volum de deute a B_0, sinó que redueix el deute fins a zero. Es pot comprovar sobre la gràfica que si $B_0 > \hat{B}$, aleshores el deute creix exponencialment, sense aturador. D'aquesta anàlisi es conclou que l'únic estat estacionari estable es correspon amb $B = 0$.

Això són bones notícies per a l'emissor del deute: si no és excessiu (això és, si el volum de deute mai no assoleix el valor $\frac{3n}{2}$), llavors el refinançament del deute l'acaba eventualment eixugant.

El càlcul del valor $\hat{B}$ passa per solucionar l'equació

$$\hat{B} = \frac{2 \cdot n \cdot \hat{B}}{3 \cdot n - 2 \cdot \hat{B}}.$$

Pot fàcilment verificar-se que

$$\hat{B} = 0$$

i

$$\boxed{\hat{B} = \frac{n}{2}}$$

satisfan l'equació.