Uns exemples amb deute públic

Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el seu primer període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t+1$, $u_{t+1} = c_{t+1}$.

• Hi ha un agent immortal: un govern. Cada període el govern emet <u>bons</u>: títols de deute que, <u>a canvi de pagar un preu de p unitats del bé per bo en el període t, prometen pagar (per cada bo comprat en t) una unitat de bé en el següent període $t+1$</u>. Hom creu que el govern pagarà el seu deute. El govern dilapida els ingressos de la primera emissió de bons i el pagament del deute cada període es fa emetent més bons.

Anàlisi

• **Mercat de préstecs privats.** Atès que tothom és idèntic, un mercat de préstecs privats és impossible. La raó és que tothom voldrà fer el mateix: tothom voldrà prestar (tothom ofereix) o tothom voldrà manllevar (tothom demanda).

• **Mercat de préstecs públics.** En aquesta economia els individus no poden estalviar per si mateixos (perquè el bé no és acumulable) ni mitjançant altres individus (perquè hom vol fer el mateix i el mercat de préstecs només tindrà un costat). El govern (amb l'emissió de deute) actua d'intermediari entre un individu jove i el mateix individu de gran, i fa possible l'estalvi.

• **Decisió de comprar bons.** Cada jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{rll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' & \\ \text{sotmès a} & c + p \cdot b = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c' = b & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c és el consum present de l'individu (de jove), c' és el consum del període següent (de gran), b és el nombre de bons que l'individu demanda i p és el preu (en unitats de bé) d'un bo. La hipòtesi que cada bo comprat en t paga una unitat de bé en $t+1$, implica que el símbol b tingui interpretacions (i unitats de mesura) diferents en funció del període de temps en què es consideri. En concret, si b és la quantitat de bons que es compren o emeten en un període t, llavors b també és la quantitat de bé que el govern ha de pagar en $t+1$. Així, en t, b són <u>bons</u> mentre que, en $t+1$, el mateix valor b són <u>béns</u>. Per aquest motiu, la compra de b bons de jove (restricció present) implica ingressar b unitats de bé de gran (restricció de gran): cada bo comprat en t es transforma en una unitat del bé en $t+1$. (El bo transforma el seu preu p (en t) en 1 (en $t+1$). <u>La taxa d'interès bruta del bo és $1/p$</u>: s'obté una unitat demà esmerçant p unitats avui. Per consegüent, $p \cdot b$ unitats del bé en transformen en b unitats.)

El problema es pot resoldre per la via ràpida introduint les dues retriccions en la funció objectiu. En concret, per la restricció de jove, $c = 1 - p \cdot b$ i, per tant, es tracta de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = (1 - p \cdot b) \cdot b \\ \text{respecte de } b & \end{array}$$

La funció de demanda de bons resultant és

$$\boxed{b = \frac{1}{2p}.}$$

Com era d'esperar, com més alt el preu p dels bons, més petita la seva demanda b.

• **Condició d'equilibri en el mercat de bons.** Designant per <u>B la quantitat total de bons que el govern emet</u> en el període t considerat, l'equilibri en el mercat de bons resulta de la igualtat entre l'oferta B de bons i la demanda total $n \cdot b$ de bons. Per tant,

$$B = n \cdot b\,. \tag{1}$$

• **Condició d'equilibri pressupostari del govern (des del període 2).** El govern assoleix l'equilibri pressupostari si s'igualen ingressos i despeses del govern. Els ingressos coincideixen amb la recaptació $n \cdot p \cdot b$ derivada de l'emissió de bons: n individus compren b bons i paguen p unitats de bé per bo. Les despeses es redueixen a pagar el deute generat pels bons emesos en el període anterior. Emetre B_{-1} bons en el període anterior significa haver de pagar B_{-1} unitats del bé en el període present. En resum, la condició d'equilibri pressupostari és

$$B_{-1} = n \cdot p \cdot b\,. \tag{2}$$

• **Càlcul del preu dels bons.** Multiplicant per p els dos costats d'(1), $p \cdot B = p \cdot n \cdot b$. Combinant aquesta equació amb (2),

$$B_{-1} = p \cdot B\,. \tag{3}$$

La condició (3) diu que el deute arrossegat del període anterior es paga amb el valor de les noves emissions de deute (de bons).

De (2) i la demanda de bons $b = 1/2p$ se segueix que $B_{-1} = n \cdot p \cdot b = n \cdot p/2p = n/2$. Atès que el mateix argument valdria pel següent període (on B passaria a ser B_{-1}), es conclou que $B = n/2$. Emprant (3) sabent que $B = B_{-1}$, es dedueix que

$$\boxed{p = 1\,.}$$

• **Càlcul de l'assignació d'equilibri.** Amb $p = 1$, $b = 1/2p = 1/2$. Per la restricció de jove, $c = 1 - b = 1/2$. Per la restricció de gran, $c' = b = 1/2$.

• **Eficiència de l'assignació d'equilibri.** L'assignació d'equilibri $(c, c') = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ és Paretoeficient. Si un individu fos lliure de distribuir el seu consum, triaria el parell (c, c') que soluciona

$$\begin{array}{rl} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + c' = 1\,. \end{array}$$

Aquesta solució seria Paretoeficient. Si es calcula, s'observarà que coincideix amb la d'equilibri.

Variant 1: l'emissió de bons finança una pensió de τ unitats de bé pagada a cada gran

• **Pensió.** En aquesta variant es manté el mercat de deute públic però ara aquest deute té com a finalitat finançar una pensió de τ unitats del bé pagada cada període a tot individu gran. Es deixa com a exercici analitzar el cas en què els individus no saben que rebran la pensió. A continuació es considera el cas en què hom sap que rebrà la pensió de gran.

• **Funció de demanda de bons.** Tot jove s'enfronta al següent problema:

$$\begin{array}{rll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' & \\ \text{sotmès a} & c + p \cdot b = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c' = b + \tau & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

Introduint les dues retriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\begin{array}{rl} \text{maximitzar} & u = (1 - p \cdot b) \cdot (b + \tau) \\ \text{respecte de } b & \end{array}$$

La funció de demanda de bons resultant és

$$\boxed{b = \frac{1 - \tau \cdot p}{2p} = \frac{1}{2p} - \frac{\tau}{2}\,.} \tag{4}$$

La demanda de bons depèn negativament tant del preu dels bons com de la pensió.

• **Condició d'equilibri en el mercat de bons.** Designant per B la quantitat total de bons que el govern emet en el període t considerat, l'equilibri en el mercat de bons resulta de la igualtat entre l'oferta B de bons i la demanda total $n \cdot b$ de bons. En conseqüència,

$$B = n \cdot b\,. \tag{5}$$

• **Condició d'equilibri pressupostari del govern (des del període 2).** Hi ha equilibri pressupostari quan s'igualen ingressos i despeses del govern. Els ingressos són la recaptació $n \cdot p \cdot b$ derivada de l'emissió de bons. Les despeses tenen dos components: el pagament $n \cdot \tau$ de pensions i el pagament del deute B_{-1} generat en el període anterior. La condició d'equilibri pressupostari és

$$B_{-1} + n \cdot \tau = n \cdot p \cdot b \,. \tag{6}$$

• **Determinació de la dinàmica d'acumulació deute.** Multiplicant per p els dos costats de (5), $p \cdot B = p \cdot n \cdot b$. Combinant aquesta equació amb (6),

$$B_{-1} + n \cdot \tau = p \cdot B \,. \tag{7}$$

L'expressió (7) diu que el deute arrossegat del període anterior més les pensions del període present es paguen amb el valor de les noves emissions de bons.

De (6) i la funció de demanda de bons (4) se segueix que

$$B_{-1} + n \cdot \tau = n \cdot p \cdot \frac{1 - \tau \cdot p}{2p}$$

o, equivalentment,

$$B_{-1} = \frac{n}{2} \cdot \big(1 - \tau \cdot (2 + p)\big) \,.$$

Aïllant p,

$$p = \frac{n \cdot (1 - 2 \cdot \tau) - 2 \cdot B_{-1}}{n \cdot \tau} \,. \tag{8}$$

La condició (7) fa que

$$B = \frac{1}{p} \cdot (B_{-1} + n \cdot \tau) \,.$$

Inserint (8),

$$\boxed{B = \frac{n \cdot \tau \cdot (B_{-1} + n \cdot \tau)}{n \cdot (1 - 2 \cdot \tau) - 2 \cdot B_{-1}} \,.} \tag{9}$$

L'expressió (9) traça la <u>dinàmica d'acumulació de deute</u> públic. La primera derivada és

$$\frac{dB}{dB_{-1}} = \frac{n \cdot \tau \cdot (n \cdot (1 - 2 \cdot \tau) - 2 \cdot B_{-1}) + 2 \cdot n \cdot \tau \cdot (B_{-1} + n \cdot \tau)}{(n \cdot (1 - 2 \cdot \tau) - 2 \cdot B_{-1})^2} = \frac{n^2 \cdot \tau}{(n \cdot (1 - 2 \cdot \tau) - 2 \cdot B_{-1})^2}$$

que sempre pren un valor positiu. Conclusió: <u>la funció (9) és creixent</u>. Per tant, un increment del deute passat B_{-1} es tradueix en un augment del deute futur B i una reducció B_{-1} en porta a una disminució de B.

La segona derivada de (9) és

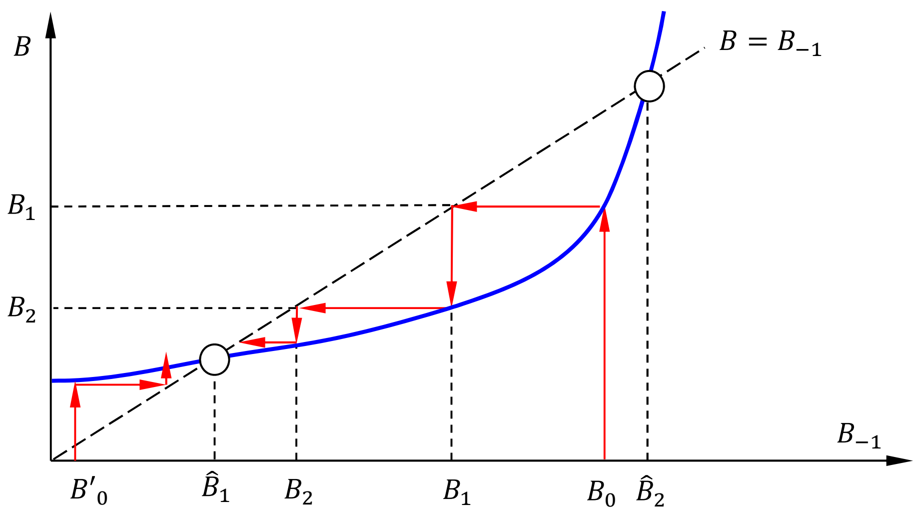
$$\frac{d^2B}{dB_{-1}{}^2} = \frac{4 \cdot n^2 \cdot \tau \cdot (n \cdot (1 - 2 \cdot \tau) - 2 \cdot B_{-1})}{(n \cdot (1 - 2 \cdot \tau) - 2 \cdot B_{-1})^4} = \frac{4 \cdot n^2 \cdot \tau}{(n \cdot (1 - 2 \cdot \tau) - 2 \cdot B_{-1})^3}.$$

La funció (9) té sentit per a valors no negatius de B. Això implica que el denominador no pot negatiu. Per consegüent,

$$B_{-1} < \frac{n}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \tau)\,.$$

La desigualtat anterior indica que hi ha un límit d'endeutament públic i també un límit del valor de la pensió ($\tau < 1/2$). Una altra implicació és que el signe de la segona derivada és positiu i, com a resultat, la funció (9) és convexa.

La gràfica a continuació representa la funció (9) amb la presumpció que $B_{-1} < n \cdot (1 - 2 \cdot \tau)/2$. La corba no passa per l'origen perquè $B_{-1} = 0$ implica, assumint $\tau < 1/2$, $B = n \cdot \tau^2/(1 - 2 \cdot \tau) > 0$. Si el deute inicialment pren el valor B_0, (9) estableix el següent valor B_1 (que serà inferior a B_0), i el següent valor B_2 (que serà inferior a B_1) i així successivament. La representació gràfica suggereix que aquest procés d'emissió de bons i d'acumulació de deute (cal recordar que B és en un període bons i en el següent béns) convergeix a algun dels dos valors $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ on intersecten la corba i la diagonal principal (els valors $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ representen estats estacionaris de la trajectòria d'acumulació de deute (9)).



En la gràfica superior, si el valor inicial és B_0, es convergiria a $\hat{B}_1$. També es convergiria a $\hat{B}_1$ si el valor inicial fos inferior a $\hat{B}_1$ (com ara B'_0). Es deixa verificar que si el valor inicial del deute és superior a $\hat{B}_2$ no hi ha convergència: el deute creix exponencialment. Per tant, <u>$\hat{B}_2$ representa un estat estacionari inestable, mentre que $\hat{B}_1$ en representaria un d'estable</u>: partint de valors del deute prou propers a $\hat{B}_1$, la dinàmica (9) retorna el deute al valor $\hat{B}_1$.

Els estats estacionaris $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ del deute van associats amb punts on es creuen la funció (9) i la diagonal principal $B = B_{-1}$. Aquesta diagonal expressa la condició d'estacionarietat: que el valor del deute es manté constant. Per tot plegat, $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ serien les solucions del sistema d'equacions

$$B = \frac{n \cdot \tau \cdot (B_{-1} + n \cdot \tau)}{n \cdot (1 - 2 \cdot \tau) - 2 \cdot B_{-1}}$$

$$B = B_{-1}\,.$$

Combinant les equacions i definint $\hat{B} = B = B_{-1}$,

$$2 \cdot \hat{B}^2 + \hat{B} \cdot n \cdot (3 \cdot \tau - 1) \; + \; n^2 \cdot \tau^2 = 0\,.$$

Fent els càlculs, $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ són els dos valors que pren la fórmula

$$\hat{B} = \frac{n \cdot (1 - 3 \cdot \tau) \pm (\tau^2 - 6 \cdot \tau + 1)^{1/2}}{4}\,.$$

Variant 2: una pensió de τ unitats de bé pagada a cada gran es finança amb bons i imposts

• **Imposts.** En aquesta variant es manté el mercat de deute públic, el deute té com a finalitat finançar una pensió de τ unitats del bé pagada cada període a tot individu gran i, a més, els joves han de contribuir al finançament de la pensió. En particular, s'assumeix que els joves han de pagar la mateixa quantitat τ de bé que el govern els transferirà de grans. Com a la variant 1, hom sap que rebrà la pensió de gran.

• **Funció de demanda de bons.** Tot jove s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' & \\ \text{sotmès a} & c + p \cdot b + \tau = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c' = b + \tau & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

Introduint les dues retriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = (1 - p \cdot b - \tau) \cdot (b + \tau) \\ \text{respecte de } b & \end{array}$$

Es deixa com a exercici calcular la trajectòria d'acumulació del deute i comparar-la amb la de la variant 1.