Solucions no competitives de l'exemple del model bàsic

Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. Hom viu dos períodes consecutius. Tot consumidor jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$. La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran. A diferència de la presumpció habitual, no hi ha mercats competitius.

Cas 1: els prestadors estableixen la taxa d'interès i els prestataris el volum de préstecs

• **Poder de mercat.** Els prestataris (els membres de G2) actuen competitivament: tenen una funció de demanda de préstecs. Això significa que els prestataris observen la taxa d'interès i, a continuació, determinen la quantitat demandada de préstecs. En canvi, els prestadors (els membres de G1) tenen poder de mercat. Aquest poder es concreta en el fet que, com a grup, els prestadors trien la taxa d'interès sabent com reaccionaran els prestataris. Es pot interpretar que els prestadors actuen col·lectivament com a monopolistes en la provisió de préstecs del bé.

• **Decisions dels prestataris.** Formalment, el problema dels prestataris és el mateix que en el cas convencional (competitiu). En concret, tot jove del grup G2 pretén

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + l_2 = 2 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_2' = 2 + R \cdot l_2 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

La funció de demanda de préstecs resultant és

$$\boxed{l_2 = 1 - \frac{1}{R}\,.} \qquad (1)$$

• **Decisions dels prestadors.** S'entén que els prestadors actuen col·lectivament triant la taxa d'interès amb l'objectiu de maximitzar la funció d'utilitat que és comuna a tots ells. S'assumeix que els prestadors coneixen la funció (1). Per tant, el problema dels prestadors és

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + l_1 = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_1' = R \cdot l_1 & \text{(restricció futura, de gran)} \\ & l_2 = 1 - \frac{1}{R} & \text{(funció de demanda de préstecs de prestataris)} \\ & n \cdot l_1 = n \cdot (-l_2) & \text{(els prestataris trien el volum de prétecs)} \end{array}$$

on els prestadors trien el consum present c_1, el consum futur $c_1{}'$ i la taxa d'interès R. Es pot interpretar que els prestadors també trien el volum de préstecs l_1 oferts, però amb la restricció que els prestadors no presten ni més ni menys del què, donada la taxa d'interès, és acceptable per als prestataris (això és, recordant que la funció de demanda l_2 ha de prendre un valor negatiu per a què hi hagi mercat de préstecs, es compleix la condició d'equilibri $n \cdot l_1 = -n \cdot l_2$).

Combinant les restriccions u, tres i quatre, $c_1 = 1 - l_1 = 1 + l_2 = 1 + \left(1 - \frac{1}{R}\right) = 2 - \frac{1}{R}$. Combinant-ne les tres darreres, $c_1{}' = R \cdot l_1 = -R \cdot l_2 = R \cdot \left(\frac{1}{R} - 1\right) = 1 - R$. D'aquesta manera, el problema dels prestadors es redueix a

$$\text{maximitzar} \quad u_1 = \left(2 - \frac{1}{R}\right) \cdot (1 - R) \quad \text{respecte d'}R.$$

La solució:

$$\boxed{R = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.} \tag{2}$$

La taxa d'interès en el cas competitiu és $R = 2/3$. Com era d'esperar, atès el poder de mercat dels prestadors, la taxa (2) és superior a la competitiva. El lot de consum de cada prestador amb $R = 2/3$ és $(c_1, c_1') = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ i la utilitat corresponent $\frac{1}{6} \approx 0{,}1666$. Amb la taxa (2) el lot és $(c_1, c_1') = (1 - l_1, R \cdot l_1) = \left(2 - \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \approx (0{,}5857, 0{,}2928)$, amb una utilitat aproximadament igual a 0,1715. Aquests resultats confirmen que els prestadors fan ús del seu poder de mercat en benefici propi.

Cas 2: regla que estableix la taxa d'interès en funció del poder de prestadors i prestataris

• **Regles de fixació de la taxa d'interès.** La condició d'equilibri $n \cdot l_1 = n \cdot (-l_2)$ en un mercat de préstecs competitiu implícitament estableix una regla de determinació de la taxa d'interès: la condició dicta que la taxa triada és aquella que iguala oferta i demanda de préstecs a aquella taxa. Un enfocament alternatiu consisteix a proposar una fórmula explícita de determinació de la taxa. L'equació (3) és un possible exemple de fórmula explícita, on a és una constant positiva que expressa la sensibilitat de la taxa d'interès al pes relatiu que el volum demandat de préstecs té en relació amb el mercat (la suma de volum ofert i demandat de préstecs).

$$\boxed{R = a \cdot \frac{|n \cdot l_2|}{n \cdot l_1 + |n \cdot l_2|}} \tag{3}$$

La regla (3) és consistent amb la idea de 'forces de mercat': com més gran sigui el volum demandat de préstecs en relació amb el volum ofert, més alta serà la taxa d'interès. Pot interpretar-se que (3) mostra com el poder de cada grup (prestadors i prestataris) impacta sobre la taxa d'interès R. Com més alta la taxa d'interès, menys poder dels prestataris (i més dels prestadors). La condició (3) atribueix implícitament el poder amb la petitor de la contribució al mercat del grup corresponent. Per exemple, si el grup de prestataris aplega una demanda elevada en relació amb l'oferta que fa el grup de prestadors, s'entén que els prestadors tenen més poder i això es tradueix en una taxa d'interès més elevada.

• **Obtenció de la solució amb la regla (3).** Les funcions l_1 i l_2 són les mateixes que en el cas competitiu. En particular, l_1 s'obté de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1{}' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + l_1 = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_1{}' = R \cdot l_1\,. & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

Inserint les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar} \qquad u_1 = (1 - l_1) \cdot R \cdot l_1 \qquad \text{respecte d'}l_1.$$

Com a resultat,

$$l_1 = 1/2.$$

Anàlogament, l_1 s'obté de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2{}' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + l_2 = 2 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_2{}' = 2 + R \cdot l_2\,. & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

Inserint les dues restriccions en la funció objectiu, es tracta de

$$\text{maximitzar} \qquad u_2 = (2 - l_2) \cdot (2 + R \cdot l_2) \qquad \text{respecte d'}l_2.$$

En conseqüència,

$$l_2 = 1 - 1/R.$$

Aplicant la fórmula (3) un cop es cancel·la n,

$$R = a \cdot \frac{|n \cdot l_2|}{n \cdot l_1 + |n \cdot l_2|} = a \cdot \frac{\left(\frac{1}{R} - 1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{R} - 1\right)} = a \cdot \frac{2 - 2 \cdot R}{2 - R}\,.$$

Això és,

$$R^2 - 2 \cdot (1 + a) \cdot R + 2 \cdot a = 0\,.$$

Resolent,

$$\boxed{R = (1 + a) \pm \sqrt{1 + a^2}\,.}$$

L'equació anterior dóna dos valors admissibles d'R. Per exemple, si $a = 1$, aleshores els valors serien $R_1 = 2 + \sqrt{2}$ i $R_2 = 2 - \sqrt{2}$. Atès que aquests valors no igualen oferta i demanda (el valor que les iguala és $R = 2/3$), hi haurà un excés d'oferta o de demanda. Específicament, amb R_1,

$$l_1 = 1/2$$

i

$$l_2 = 1 - \frac{1}{R_1} = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071.$$

Atès que l_2 no pren un valor negatiu, es conclou que la regla (3) impossibilita l'existència del mercat de préstecs quan es considera R_1: la regla fa que tothom ofereix préstecs (ja que R_1 sembla ser un valor massa gran).

Passant a R_2,

$$l_2 = 1 - \frac{1}{R_2} = 1 - \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0{,}7071.$$

En aquest cas, hi hauria un excés de demanda igual a $|n \cdot l_2| - n \cdot l_1 = n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}2071 \cdot n$.

L'exemple il·lustra que el valor $R = (1 + a) + \sqrt{1 + a^2}$ és incompatible amb l'existència de mercat, ja que aquest valor, en ser superior a 1, implica que $1/R < 1$ i, com a resultat, $l_2 > 0$. La conclusió final és que el valor vàlid d'R és

$$R = (1 + a) - \sqrt{1 + a^2}\,.$$

Es deixa com a exercici comparar els lots de consum i les utilitats amb els dels cas competitiu.

També es proposa l'exercici de replicar l'anàlisi anterior amb la regla

$$R = \frac{a \cdot |n \cdot l_2|}{n \cdot l_1 + a \cdot |n \cdot l_2|}\,.$$