Un exemple del model bàsic

Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen dos grups d'individus, G1 i G2, cadascú amb n membres. Hom viu dos períodes consecutius. Tot consumidor jove té la funció d'utilitat $u = c \cdot c'$, on és c el consum del bé de jove i c' el consum de gran. Tot consumidor gran té la funció d'utilitat $u' = c'$. La dotació de cada membre de G1 és (1, 0): una unitat de jove i cap de gran. La dotació de cada membre de G2 és (2, 2): dues unitats de jove i dues de gran.

Anàlisi

• **Decisions.** Tots els individus decideixen quant volen consumir del bé i quant volen prestar o manllevar. En conseqüència, els individus participen en dos mercats: el mercat del bé i el mercat de préstecs del bé.

• **Decisions de prestar/manllevar.** Tot i que tots els individus grans voldrien participar en el mercat de préstecs com a demandants, ningú no els prestarà el bé, atès que els grans no podran retornar els préstecs el següent període. D'aquí es conclou només els joves puguin ser considerats participants en el mercat de préstecs.

• **Decisió de prestar/manllevar dels membres de G1.** Tot jove del grup G1 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_1 = c_1 \cdot c_1{}' & \\ \text{sotmès a} & c_1 + l_1 = 1 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_1{}' = R \cdot l_1 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

on c_1 és el consum present de l'individu (de jove), $c_1{}'$ és el consum del període següent (de gran), l_1 és el volum de préstecs demandats i R és la taxa d'interès bruta. La variable pot prendre valors positius (i s'interpreta com a oferta de préstec del bé) o negatius (i s'interpreta com a demanda de préstec del bé). La taxa d'interès bruta R representa el preu d'un préstec: per cada unitat rebuda en préstec en un període cal pagar R unitats de bé en el període següent. El valor d'R no pot ser negatiu, atès que un valor negatiu implicaria que un prestador lliura bé en un període i ha de tornar a lliurar bé en el període següent.

Dividint per R la segona restricció i sumant-ne les dues s'obté la restricció pressupostària vital:

$$c_1 + \frac{c_1{}'}{R} = 1 \,.$$

El quocient s'interpreta com a factor de descompte: el valor en un període d'una unitat del bé del període següent. Això és, una unitat de bé del període $t + 1$ equival a $1/R$ unitats del període t (ja que, per definició d'R, una unitat de bé en t equival a R unitats en $t + 1$).

El lagrangià és

$$\mathcal{L}_1 = c_1 \cdot c_1{}' + \lambda \cdot \left(1 - c_1 - \frac{c_1{}'}{R}\right).$$

Les condicions necessàries per a assolir un màxim d'$\mathcal{L}$ són

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial c_1} = c_1{}' - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial c_1{}'} = c_1 - \frac{\lambda}{R}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \lambda} = 1 - c_1 - \frac{c_1{}'}{R}.$$

Se segueix de les dues primeres condicions que

$$c_1 = \frac{c_1{}'}{R}.$$

Introduint aquesta equació en la tercera condició

$$c_1 = \frac{1}{2}.$$

Sabent que $c_1 + l_1 = 1$, la conclusió és que

$$\boxed{l_1 = \frac{1}{2}.} \tag{1}$$

Atès que l_1 és sempre positiu, els individus joves de G1 són prestadors: ofereixen de joves bé en préstec a canvi de rebre'n, de grans, R unitats del bé per unitat prestada.

• **Decisió de prestar/manllevar dels membres de** G2**.** Tot jove del grup G2 s'enfronta al problema de

$$\begin{array}{lll} \text{maximitzar} & u_2 = c_2 \cdot c_2{}' & \\ \text{sotmès a} & c_2 + l_2 = 2 & \text{(restricció present, de jove)} \\ & c_2{}' = 2 + R \cdot l_2 & \text{(restricció futura, de gran)} \end{array}$$

Dividint per R la segona restricció i sumant-ne les dues s'obté la restricció pressupostària vital:

$$c_2 + \frac{c_2{}'}{R} = 2 + \frac{2}{R}.$$

El lagrangià és

$$\mathcal{L}_2 = c_2 \cdot c_2{}' + \lambda \cdot \left(2 + \frac{2}{R} - c_2 - \frac{c_2{}'}{R}\right).$$

Les condicions necessàries per a assolir un màxim d'$\mathcal{L}_2$ són

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial c_2} = c_2{}' - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial c_2{}'} = c_2 - \frac{\lambda}{R}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \lambda} = 2 + \frac{2}{R} - c_2 - \frac{c_2{}'}{R}.$$

Se segueix de les dues primeres condicions que

$$c_2 = \frac{c_2{}'}{R}.$$

Introduint aquesta equació en la tercera condició

$$c_2 = 1 + \frac{1}{R}.$$

Per la restricció de jove $c_2 + l_1 = 1$, es conclou que

$$\boxed{l_2 = 1 - \frac{1}{R}.} \tag{2}$$

Pel resultat que l_1 és sempre positiu, l'existència d'un mercat de préstec del bé requereix que, al menys en l'equilibri del mercat, els membres joves de G2 sigui prestataris (demandants de préstecs del bé). Equivalentment, en equilibri, cal que $l_2 < 0$.

- **Equilibri en el mercat de préstecs.** La condició d'equilibri en el mercat de préstecs és que l'oferta total de préstecs sigui igual a la demanda total de préstecs. Com que, en equilibri, el valor de la funció de demanda de préstecs ha de prendre un valor negatiu, la condició d'equilibri estableix que l'oferta total coincideix amb el valor absolut de la demanda total. En aquest cas, atès que l_2 ha d'expressar la demanda, $n \cdot l_1 = |n \cdot l_2|$. De manera equivalent, un cop cancel·lat n,

$$l_1 + l_2 = 0. \tag{3}$$

La condició (3) representa el fet que, en el mercat de préstecs, el bé simplement es redistribueix i, per tant, en termes nets tot queda igual: cada unitat de bé rebuda en préstec s'ha de correspondre amb una altra unitat de bé oferta en préstec. Aplicant (3),

$$\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{R} = 0.$$

La taxa d'interès d'equilibri és

$$R = \frac{2}{3}.$$

Aquesta valor significa que per cada unitat de bé prestada se'n reben 2/3 en el període següent (i que per cada unitat de bé manllevada, se n'han de pagar 2/3 en el període següent).

Els lots de consum en equilibri resultants serien $(c_1, c_1') = (c_1, R \cdot c_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ i $(c_2, c_2') = (1 + \frac{1}{R}, R \cdot c_2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right)$.

Paretoineficiència de l'assignació de consum d'equilibri

• **Paretoineficiència.** En el present exemple, una assignació es pot representar per un parell de lots de consum (c_1, c_1') i (c_2, c_2') que indiquen la quantitat de bé que cada individu de cada grup consumeix de jove i de gran. Aquesta assignació seria <u>Paretoeficient</u> si no existís cap altra assignació $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1')$ i $(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2')$ tal que

$$\begin{gathered} u_1(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1') > u_1(c_1, c_1'), \\ u_2(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2') > u_2(c_2, c_2'), \\ u_1'(\tilde{c}_1) > u_1'(c_1) \text{ i} \\ u_2'(\tilde{c}_2) > u_2'(c_2). \end{gathered}$$

Simètricament, l'assignació (c_1, c_1') i (c_2, c_2') és Pareto ineficient si existeix alguna altra assignació $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1')$ i $(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2')$ que satisfà <u>les quatre</u> desigualtats anteriors.

• **Paretoineficiència de l'assignació de consum d'equilibri.** L'assignació de consum C d'equilibri és $(c_1, c_1') = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ i $(c_2, c_2') = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right)$. L'assignació de consum $\tilde{C}$ definida a continuació demostra que la d'equilibri és Paretoineficient. L'assignació $\tilde{C}$ s'obté de la d'equilibri fent que cada individu jove lliuri $\varepsilon > 0$ unitats del bé a un consumidor gran diferent (amb ε suficientment petit). Específicament, $\tilde{C}$ és l'assignació tal que

$$(\tilde{c}_1, \tilde{c}_1') = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{3} + \varepsilon\right)$$

i

$$(\tilde{c}_2, \tilde{c}_2') = \left(\frac{5}{2} - \varepsilon,\ \frac{5}{3} + \varepsilon\right).$$

En l'equilibri C, la utilitat de tot jove de G1 és $u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ i la de tot jove de G2 és $u_2\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$.

En $\tilde{C}$, les utilitats són $u_1\left(\frac{1}{2} - \varepsilon,\ \frac{1}{3} + \varepsilon\right) = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) = \frac{1}{6} + \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right)$ per a cada membre de G1 i $u_2\left(\frac{5}{2} - \varepsilon,\ \frac{5}{3} + \varepsilon\right) = \left(\frac{5}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\ \frac{5}{3} + \varepsilon\right) = \frac{25}{6} + \varepsilon \cdot \left(\frac{5}{6} - \varepsilon\right)$ per a cada membre de G2.

En conseqüència, per a què la utilitat de cada membre jove de G1 sigui superior en $\tilde{C}$ que en C cal que $\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right) > 0$; això és, cal que $\varepsilon < \frac{1}{6}$. De manera anàloga, per a què la utilitat de cada membre jove de G2 sigui superior en $\tilde{C}$ que en C cal que $\varepsilon \cdot \left(\frac{5}{6} - \varepsilon\right) > 0$; és a dir, cal que $\varepsilon < \frac{5}{6}$. En suma, la transferència de joves a grans de qualsevol $\varepsilon < \frac{1}{6}$ fa que tots els joves tinguin més utilitat en $\tilde{C}$ que en C.

En relació amb els grans, en C, en cada període un membre gran de G1 consumeix $\frac{1}{3}$ unitats del bé, en tant que, en $\tilde{C}$, consumeix $\frac{1}{3} + \varepsilon$. Respecte dels membres grans de G2, cadascun d'ells consumeix $\frac{5}{3}$ en C i $\frac{5}{3} + \varepsilon$ en $\tilde{C}$. La conclusió és que tots els consumidors grans consumeixen més (i, així, obtenen més utilitat) en $\tilde{C}$ que en C. Tot plegat demostra que C no es Paretoeficient: hi ha una altra assignació $\tilde{C}$ tal que tots els individus tenen més utilitat en tots els seus períodes de vida que en C.

Transferències òptimes

• **Pensions de repartiment.** La demostració anterior de la Paretoineficiència de l'assignació d'equilibri implícitament involucra un <u>sistema de pensions de repartiment</u>: partint de l'assignació d'equilibri, hom pot millorar si cada jove transfereix a un gran una certa quantitat $\varepsilon < \frac{1}{6}$ de bé.

• **Optimalitat.** Una qüestió interessant que suggereix l'anàlisi prèvia és trobar una transferència que sigui òptima en algun sentit. Si l'objectiu que pretén la transferència és de superar la ineficiència, aleshores hi ha un continu de transferències òptimes: totes en què $\varepsilon < \frac{1}{6}$. Un objectiu alternatiu, més exigent, seria que la transferència maximitzi alguna <u>funció de benestar social</u>. Un candidat natural a funció de benestar social és la suma (potser ponderada) de la utilitat de tots els individus.

Redefinint les funcions d'utilitat amb una transferència/impost $\varepsilon > 0$,

$$u_1^{\varepsilon} = (c_1 - \varepsilon) \cdot (c_1' + \varepsilon)$$

$$u_2^{\varepsilon} = (c_2 - \varepsilon) \cdot (c_2' + \varepsilon)$$

$$u_1'^{\varepsilon} = c_1' + \varepsilon$$

$$u_2'^{\varepsilon} = c_2' + \varepsilon\,.$$

Una possible funció de benestar social seria la suma de totes les utilitats. Aleshores es tractaria de trobar els valors d'ε que maximitzen $u_1^{\varepsilon} + u_2^{\varepsilon} + u_1'^{\varepsilon} + u_2'^{\varepsilon}$. La resolució d'aquest problema es deixa com a exercici. Es resol a continuació un de similar: triar ε per a maximitzar la suma de la utilitat dels joves assumint que la transferència ε s'aplica sobre l'assignació de consum i que la utilitat després de la transferència no empitjora la utilitat de l'assignació de consum d'equilibri. Això és, es tracta de

$$\begin{array}{rll} \text{maximitzar} & u_1^{\varepsilon} + u_2^{\varepsilon} & \text{(respecte d'}\varepsilon) \\ \text{sotmès a} & (c_1, c_1') = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) & \\ & (c_2, c_2') = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right) & \\ & u_1^{\varepsilon} \geq u_1(c_1, c_1') = \frac{1}{6} \text{ i} & \\ & u_2^{\varepsilon} \geq u_2(c_2, c_2') = \frac{25}{6}. & \end{array}$$

Introduint les restriccions a la funció objectiu, es tractaria de maximitzar respecte d'ε

$$u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) + \left(\frac{5}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{5}{3} - \varepsilon\right) = \frac{13}{3} + \varepsilon - 2 \cdot \varepsilon^2.$$

Clarament,

$$0 = \frac{d(u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon)}{d\varepsilon} = 1 - 4 \cdot \varepsilon\,.$$

De l'anterior es dedueix que $\varepsilon = 1/4$ seria candidat a maximitzar $u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon$. El problema és que $\varepsilon = 1/4$ no respecta la tercera restricció $u_1^\varepsilon \geq u_1(c_1, c_1') = \frac{1}{6}$, ja que $u_1^\varepsilon = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} < \frac{1}{6}$ quan $\varepsilon = 1/4$. En suma, el valor òptim d'ε seria el més proper a $\varepsilon = 1/4$ admissible (per l'esquerra): $\varepsilon = 1/6$ (el valor més gran d' ε que, en la secció anterior, feia l'assignació de consum ineficient).