3. Un model de generacions encavalcades de recol·lecció i amb un agent immortal

3.1. Elements del model

• **Govern.** El model conté els elements del model de recol·lecció amb la inclusió d'un agent immortal: el govern (que, com a institució o persona jurídica, pot existir indefinidament). Les funcions econòmiques del govern es redueixen a una de sola: redistribuir bé entre els consumidors, prenent a uns per a donar a d'altres. El mercat de préstecs aconseguia la mateixa funció, però sense forçar la voluntat dels consumidors. El govern actua sense el vist-i-plau dels afectats. En particular, el govern només pot dur a terme tres activitats: recaptar bé mitjançant imposts; assignar la recaptació impositiva a consumidors per mitjà de transferències; i endeutar-se amb els consumidors. Un impost pot ser interpretat com una transferència negativa i una transferència pot interpretar-se com un impost negatiu. Per aquesta raó, els conceptes d'impost i transferència es poden reduir a un de sol. D'altra banda, l'endeutament del govern està al servei de la seva funció redistributiva: és una eina per a dur a terme la redistribució del bé.

3.2. Anàlisi del model amb imposts

• **Imposts.** Un impost τ_t^i a pagar pel consumidor i de la generació t és un parell $\left(\tau_t^i(t), \tau_t^i(t+1)\right)$, on $\tau_t^i(s)$ és la quantitat de bé que el consumidor $i \in N(t)$ paga al govern, o rep del govern, en el període $s \in \{t, t+1\}$. Si $\tau_t^i(s) > 0$, aleshores el consumidor paga $\tau_t^i(s)$ unitats del bé al govern; si $\tau_t^i(s) < 0$, llavors el consumidor rep $\tau_t^i(s)$ unitats del bé del govern.

• **Restricció pressupostària del govern.** La restricció pressupostària del govern quan tota la recaptació que fa el govern en un període es reparteix entre els consumidors del mateix període estableix que, per a tot $t \geq 1$, $\sum_{i \in N(t)} \tau_t^i(t) + \sum_{i \in N(t-1)} \tau_{t-1}^i(t) = 0$: tot el que es recapta es reparteix.

• **Càlcul de l'equilibri general competitiu**. Es calcula de la mateixa manera que en el cas sense govern (i) reemplaçant la dotació $w_t^i(s)$ amb $w_t^i(s) - \tau_t^i(s)$ i (ii) afegint-hi la restricció pressupostària del govern. En concret, la nova restricció pressupostària vital del consumidor i és

$$c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} = w_t^i(t) - \tau_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1) - \tau_t^i(t+1)}{R(t)}\,. \qquad (1)$$

• **Redefinició de l'estalvi**. L'estalvi $s^i(t)$ d'un consumidor jove i es pot redefinir com la part de la dotació disponible d'i (la dotació neta d'imposts) $w_t^i(t) - \tau_t^i(t)$ que no es consumeix. Això és,

$$s^i(t) = w_t^i(t) - \tau_t^i(t) - c_t^i(t)\,. \qquad (2)$$

• **Condició d'equilibri**. Amb l'estalvi definit com (2), la taxa d'interès d'equilibri $R(t)$ en el període t s'obté (com en el cas sense imposts) de la condició $\sum_{i \in N(t)} s^i(t) = 0$. Si $s^i(t)$ es definís com en el cas sense imposts (és a dir, $s^i(t) = w_t^i(t) - c_t^i(t)$), aleshores la condició d'equilibri seria $\sum_{i \in N(t)} s^i(t) = \sum_{i \in N(t)} \tau_t^i(t)$: l'estalvi dels joves coincideix amb els imposts que paguen els joves.

3.3. Anàlisi del model amb imposts i deute públic

• **Bons.** L'únic instrument d'endeutament del govern és el bo d'un període. Un bo d'un període (emès en el període t i amb venciment en el període $t+1$) és una promesa certa i segura de pagament del govern de lliurar una unitat del bé en $t+1$ a canvi d'un preu $p(t) < 1$ que el comprador del bo paga al govern en el període t.

• **Preu dels bons.** El preu $p(t)$ d'un bo s'assumeix determinat en un mercat competitiu de bons: oferta de bons en t i demanda de bons en t determien el preu dels bons en t. En aquest mercat, el govern fa d'únic venedor del bo i els consumidors (joves o grans) poden comprar-los pagant el preu $p(t)$. El valor nominal de cada bo és 1: qui compra un bo en t, paga $p(t) < 1$ unitats del bé en t i rep una unitat del bé en $t+1$. Això significa que el govern emet els bons amb descompte: el preu de venda d'un bo és inferior al seu valor nominal.

• **Taxa d'interès implícita dels bons.** La taxa d'interès que es pot associar a un bo és $\frac{1-p(t)}{p(t)}$: el guany $1-p(t)$ obtingut de la inversió en bons dividit pel cost $p(t)$ de la inversió. La taxa d'interès bruta del bo és $1+\frac{1-p(t)}{p(t)} = \frac{1}{p(t)}$: el comprador del bo obté 1 en $t+1$ a canvi d'invertir $p(t)$ en t.

• **Emissió de bons.** Per a $t \geq 1$, $B(t)$ designa el nombre total de bons que el govern emet en el període t. Atès que el valor nominal de cada bo és 1, $B(t)$ també representa el deute (en unitats del bé) que el govern ha de pagar en el període $t+1$ als compradors dels bons.

• **Restricció pressupostària del govern.** La restricció pressupostària del govern en el període t és

$$\underbrace{B(t-1)}_{\textit{deute a pagar en t}} = \underbrace{\textstyle\sum_{i\in N(t)} \tau_t^i(t)}_{\textit{imposts sobre joves}} + \underbrace{\textstyle\sum_{i\in N(t-1)} \tau_{t-1}^i(t)}_{\textit{imposts sobre grans}} + \underbrace{p(t)B(t)}_{\textit{nous bons}}.$$

• **Redempció de bons.** La restricció mostra les tres maneres de redimir en t els bons emesos en $t-1$: fer pagar imposts als joves en t; fer pagar imposts als grans en t; i emetre bons nous en t. Gràcies al bons ara ja no cal que $\sum_{i\in N(t)} \tau_t^i(t) + \sum_{i\in N(t-1)} \tau_{t-1}^i(t)$ sigui zero.

• **Els grans no compren bons.** En el model sense govern els consumidors grans no prestaven a ningú. El mateix raonament que demostrava aquest fet és vàlid per a concloure que cap consumidor gran no comprarà bons (operació que equival a prestar al govern).

• **Restricció pressupostària d'un jove.** Atès que només els joves estaran disposats a comprar bons, el consumidor jove i de la generació t s'enfronta a la següent restricció pressupostària, on $b^i(t)$ és el nombre de bons que compra i en el mercat de bons.

$$c_t^i(t) + l^i(t) + \tau_t^i(t) + p(t)b^i(t) = w_t^i(t)$$

La restricció diu que i pot donar quatre usos a la seva dotació de bé $w_t^i(t)$: la pot consumir; la pot prestar en el mercat de préstecs (mercat de deute privat); la pot lliurar (en forma d'impost) al govern; i la pot prestar al govern, comprant $b^i(t)$ bons en el mercat de deute públic.

• **Restricció pressupostària d'un consumidor gran.** Designant per $R(t)$ la taxa d'interès bruta en el mercat de préstecs, la restricció pressupostària d'un consumidor gran i de la generació t és

$$c_t^i(t+1) + \tau_t^i(t+1) = w_t^i(t+1) + R(t)l^i(t) + b^i(t).$$

• **Restricció pressupostària vital.** Reunint les dues restriccions (aïllant $l^i(t)$ en la primera d'elles i inserint el resultat en la segona), la restricció pressupostària vital del consumidor i esdevé

$$c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} = w_t^i(t) - \tau_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1) - \tau_t^i(t+1)}{R(t)} - b^i(t)\left[p(t) - \frac{1}{R(t)}\right]. \qquad (3)$$

• **Relació entre el preu dels préstecs i el preu dels bons: $\boldsymbol{p(t) = \frac{1}{R(t)}}$.** Un consumidor que vulgui estalviar $p(t)$ unitats del bé en el període t té a l'abast dues opcions.

- **Opció 1.** Ser comprador en el mercat de bons. Essent $p(t)$ el preu d'un bo en t, el benefici corresponent a aquesta decisió d'estalvi és 1 unitat del bé en el període següent $t+1$.

- **Opció 2.** Ser prestador en el mercat de préstecs. Prestant $p(t)$ unitats del bé en el mercat de préstecs i donada la taxa $R(t)$ en t, s'obtenen $p(t)R(t)$ unitats del bé en el període $t+1$.

Si s'assumeix l'existència d'arbitratge entre els mercats de préstecs i de bons, les dues opcions han de generar el mateix resultat; això és, $1 = p(t)R(t)$: prestar al govern produeix el mateix benefici que prestar a consumidors. Aquesta igualtat pot demostrar-se per contradicció.

Si $1 > p(t)R(t)$ fos el cas, aleshores el préstec públic seria més profitós que el préstec privat. Així, manllevant $p(t)$ unitats del bé en el mercat de préstecs per a adquirir un bo, en $t+1$ el bo pagaria 1 unitat del bé, en tant que retornar el deute requereix $p(t)R(t)$ unitats. Com a resultat, es genera un benefici segur d'$1 - p(t)R(t)$ unitats del bé. Però en un equilibri general no poden existir oportunitats d'arbitratge. Per tant, una demanda creixent de préstecs i bons provocaria un augment en els seus respectius preus $R(t)$ i $p(t)$. De manera anàloga, també hi hauria oportunitats d'arbitratge si $1 < p(t)R(t)$: ara el préstec públic és menys profitós que el préstec privat.

Per a què ambdós mercats existeixin cal que hi hagi prestadors disposats a participar en tots dos mercats. Per consegüent, s'ha de tenir la mateixa rendibilitat en els dos mercats: $1 = p(t)R(t)$, que implica $\frac{1}{p(t)} = R(t)$, on $\frac{1}{p(t)}$ representa la taxa d'interès bruta del bo i $R(t)$ és la taxa d'interès bruta d'un préstecs. Atès que $\frac{1}{p(t)} = R(t)$ equival a $p(t) - \frac{1}{R(t)} = 0$, el terme $b^i(t)\left[p(t) - \frac{1}{R(t)}\right]$ en el costat dret de (3) és zero. La conclusió final és que, assumint arbitratge, la restricció pressupostària vital de tot consumidor jove i és idèntica a la del cas sense bons: l'equació (1).

• **Equilibri general competitiu.** Donats imposts $\{\tau_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$, un equilibri general competitiu és una seqüència $\{\hat{R}(t)\}_{t\geq 1}$ de taxes d'interès brutes i una assignació de consum $\{\hat{c}_t^i\}_{t\geq 0, i\in N(t)}$ que satisfan les condicions **E1** i **E2**.

E1. Per a tot període $t \geq 1$ i consumidor $i \in N(t)$, $\hat{c}_t^i$ maximitza u_t^i donat $\hat{R}(t)$ i les dotacions netes $w_t^i - \tau_t^i$ d'i (per a $t = 0$, $\hat{c}_t^i$ és la dotació neta d'imposts del consumidor gran i).

E2. Per a tot període $t \geq 1$, $\hat{R}(t)$ equilibra el mercat de préstecs.

• **Remarques sobre el mercat de bons.** Per la llei de Walras, no cal exigir equilibri del mercat de bons: amb dos mercats, si un està en equilibri, l'altre també. D'altra banda, assumint arbitratge entre els mercats de préstecs i bons, $p(t) = \frac{1}{R(t)}$.

• **Càlcul de la taxa d'interès d'equilibri.** Sigui $S_t = \sum_{i\in N(t)} s^i(t)$ la funció d'estalvi agregat, amb $s^i(t)$ definit segons (2). Cada estalvi individual $s^i(t)$ en general dependrà de les dotacions, els imposts i la taxa d'interès. Per tant, S_t també serà funció de dotacions, imposts i taxa d'interès. Atès que les dotacions i els imposts són variables exògenes (paràmetres), s'emfasitzarà només la dependència d'S_t de la variable endògena $R(t)$ escrivint $S_t(R(t))$. Seguint aquesta convenció, l'expressió (4) determina la taxa d'interès d'equilibri i fa que tots els mercats estiguin en equilibri.

$$S_t(R(t)) = p(t)B(t) \tag{4}$$

• **Justificació de** (4)**.** En l'economia hi ha ara dos mercats: el mercat de deute privat (de préstecs) i el mercat de deute públic (de bons). En un equilibri general competitiu tots dos mercats estan en equilibri. Per la llei de Walras, l'equilibri d'un mercat implica l'equilibri de l'altre. Si se sumen les restriccions pressupostàries de tots els joves del període t, s'obté

$$\sum_{i\in N(t)} c_t^i(t) + \sum_{i\in N(t)} l^i(t) + \sum_{i\in N(t)} \tau_t^i(t) + p(t)\sum_{i\in N(t)} b^i(t) = \sum_{i\in N(t)} w_t^i(t)\,.$$

L'equilibri en el mercat de préstecs requereix $\sum_{i\in N(t)} l^i(t) = 0$. Reordenant,

$$\sum_{i\in N(t)}\left[w_t^i(t) - c_t^i(t) - \tau_t^i(t)\right] = p(t)\sum_{i\in N(t)} b^i(t).$$

Segons (2), $w_t^i(t) - c_t^i(t) - \tau_t^i(t) = s^i(t)$. Així doncs, $\sum_{i\in N(t)} s^i(t) = p(t)\sum_{i\in N(t)} b^i(t)$. En paral·lel, hi ha equilibri en el mercat de bons si $\sum_{i\in N(t)} b^i(t) = B(t)$, això és, si la demanda $\sum_{i\in N(t)} b^i(t)$ de bons és igual a l'oferta $B(t)$ de bons del govern. En suma, $S_t = \sum_{i\in N(t)} s^i(t) = p(t)B(t)$.

• **Interpretació de** (4)**.** La condició (4) diu que l'estalvi total dels joves en t ha de finançar el valor total del deute del govern en t, deute que coincideix amb l'emissió de bons del període anterior $t-1$. Donat que $R(t) = 1/p(t)$, (4) equival a

$$S_t(R(t)) = \frac{B(t)}{R(t)},$$

de manera que l'estalvi agregat en t és igual al valor present del deute $B(t)$ en $t+1$.

3.4. Exemple

• **Descripció de l'economia i de l'objectiu del govern**. Per a tot t i i, $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$, $N(t) = 100$, els consumidors de cada generació estan numerats d'1 a 100, $w_t^i = (2, 0)$ si i és senar, i $w_t^i = (1, 1)$ si i és parell. El govern vol aconseguir 25 unitats del bé en $t = 1$ venent bons, transferir les 25 unitats als grans de $t = 1$ i pagar el deute generat per l'emissió de bons fent pagar cada jove en $t = 2$ l'impost τ. A continuació es calculen $R(1)$, $B(1)$, $R(2)$, $R(3)$ i τ.

• **Estalvi agregat quan no es paguen imposts.** Si no es paguen imposts en t, la funció d'estalvi del consumidor i és $s^i(t) = 1$ si i és senar i $s^i(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2R(t)}$ si i és parell. La corresponent funció d'estalvi agregat és $S_t = 50(1) + 50\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2R(t)}\right) = 75 - \frac{25}{R(t)}$.

• **Equilibri general competitiu en $t = 1$.** L'equilibri en $t = 1$ requereix $S_1 = p(1)B(1)$. Atès que el govern pretén 25 unitats del bé amb l'emissió de la quantitat $B(1)$ de bons, $p(1)B(1) = 25$. Així, en l'equilibri en $t = 1$, $S_1 = 25$. Sabent que $S_1 = 75 - \frac{25}{R(1)}$, se segueix que $75 - \frac{25}{R(t)} = 25$ i, en conseqüència, $R(1) = \frac{1}{2}$. L'estalvi individual és $s^i(1) = 1$ si i és senar i $s^i(1) = -\frac{1}{2}$ si i és parell. Interpretació: en el període 1, els consumidors senars presten 50 unitats del bé en total, en tant que els consumidors parells manlleven 25 en total. La diferència (25 unitats de bé) és el que manlleva el govern mitjançant la venda dels bons. Emprant $S_1 = B(1)/R(1)$, amb $S_1 = 25$ i $R(1) = 1/2$, s'arriba a $B(1) = 12{,}5$. El valor $B(1)$ és, a un temps, el nombre de bons emesos en $t = 1$ i el volum d'imposts que els joves en $t = 2$ hauran de pagar en $t = 2$. De tot plegat es conclou que $\tau = \frac{1}{8}$.

• **Equilibri general competitiu en $t = 2$.** Per la hipòtesi que els joves paguen l'impost, la restricció pressupostària vital d'un consumidor jove i és $c_2^i(2) + \frac{c_2^i(3)}{R(2)} = 2 - \tau$ si i és senar i $c_2^i(2) + \frac{c_2^i(3)}{R(2)} = 1 - \tau + \frac{1}{R(2)}$ si i és parell.

Un i senar té, de jove, la funció de demanda de consum $c_2^i(2) = 1 - \frac{\tau}{2}$. D'aquí resulta una funció d'estalvi igual a $s^i(2) = 2 - \tau - c_2^i(2) = 1 - \frac{\tau}{2}$. Se segueix que i paga l'impost τ reduint consum i estalvi en el mateix import: $\frac{\tau}{2}$. Pot interpretar-se que la meitat de l'impost es finança reduint el consum i l'altra meitat reduint l'estalvi.

Un i parell té, de jove, la funció de demanda de consum $c_2^i(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2R(2)} - \frac{\tau}{2}$. La funció d'estalvi associada és $s^i(2) = 1 - \tau - c_2^i(2) = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2R(2)}$. Tal com passa amb un i senar, un i parell paga l'impost τ disminuint consum i estalvi en el mateix import: $\frac{\tau}{2}$.

La funció d'estalvi agregat és $S_2 = 50\left(1 - \frac{\tau}{2}\right) + 50\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2R(2)}\right) = 75 - 50\tau - \frac{25}{R(2)}$. Donat $\tau = \frac{1}{8}$, $50\tau = \frac{25}{4}$. En resum, $S_2 = \frac{275}{4} - \frac{25}{R(2)}$. Entenent que $B(2) = 0$ (que vol dir que el govern no desitja ni necessita manllevar bé en el període 2), la condició d'equilibri en $t = 2$ passa a ser $S_2 = 0$. En conseqüència, $R(2) = \frac{100}{275} = \frac{1}{2{,}75} \approx 0{,}3636$.

• **Equilibri general competitiu en $t = 3$.** En $t = 3$ és com si el govern desaparegués: no hi ha imposts ni mercat de bons. La funció d'estalvi agregat és com la del període 1: $S_3 = 75 - \frac{25}{R(3)}$. Essent ara $S_3 = 0$ la condició d'equilibri, s'obté $R(3) = \frac{1}{3}$. El mateix resultat valdrà per a la resta de períodes, mentre el govern no creï imposts ni emeti bons. Si el període $t = 0$ se suposa igual a $t = 3$, $R(0) = \frac{1}{3}$, $R(1) = \frac{1}{2}$, $R(2) = \frac{1}{2{,}75}$, $R(3) = \frac{1}{3}$. Aquest exemple suggereix que <u>la taxa d'interès pot augmentar per causa d'un increment en el deute públic o d'una pujada dels imposts</u>.

• **Política de refinançament del deute públic.** <u>Un deute es refinança quan es paga amb més deute</u>. Com a il·lustració d'aquesta política, suposem que el govern decideix no carregar els joves de $t = 2$ amb imposts i paga el deute públic $B(1) = 12{,}5$ generat per l'emissió de bons en $t = 1$ mitjançant l'emissió de més bons en $t = 2$.

• **Equilibri general competitiu en $t = 2$ amb deute refinançat.** En aquest cas, en equilibri, $S_2 = B(2)/R(2)$ i $S_2 = B(1)$. D'aquí, $R(2) = 0{,}4$ i $B(2) = 5$

• **Equilibri general competitiu en $t = 3$ amb deute refinançat.** Si el refinançament s'estén a $t = 3$, $S_3 = B(3)/R(3)$ i $S_3 = B(2)$. Així, $R(3) = 0{,}35$ i $B(3) = 1{,}78$.

• **Dinàmica d'acumulació de bons amb refinançament perpetu.** Si el govern decideix de refinançar sempre el deute, $S_t = B(t)/R(t)$ i $S_t = B(t-1)$, on $S_t = 75 - \frac{25}{R(t)}$ coincideix amb la funció d'estalvi agregat quan no hi ha imposts. D'$S_t = B(t-1)$ se'n deriva $75 - \frac{25}{R(t)} = B(t-1)$. Aïllant $R(t)$, s'arriba a (5).

$$R(t) = \frac{25}{75 - B(t-1)} \tag{5}$$

Combinant $S_t = B(t)/R(t)$ i $S_t = B(t-1)$, s'obté $B(t-1) = B(t)/R(t)$ o $B(t) = B(t-1)R(t)$. Fent servir (5), resulta la condició (6) que descriu la trajectòria d'acumulació del deute públic que es refinança període rere període.

$$B(t) = \frac{25B(t-1)}{75 - B(t-1)} \tag{6}$$

• **Estat estacionari.** Un estat estacionari d'un sistema dinàmic descrit per una equació en diferències (com ara l'equació (6)) és un estat del sistema on la variable representa en l'equació en diferències pren el mateix valor en cada període.

• **Estat estacionari de** (6)**.** Tot estat estacionari de (6) satisfà $B(t-1) = B(t)$. Aquesta condició es compleix en dos casos: (i) $B = 50$ i $R = 1$; i (ii) $B = 0$ i $R = 1/3$ (la taxa d'equilibri sense govern).

• **Dinàmica del deute.** Les fórmules (5) i (6) són vàlides quan el govern manlleva <u>inicialment</u> a tot estirar 50, de manera que $S(1) \leq 50$. Si $S(1) < 50$, $B(t)$ converges a zero i $R(t)$ tendeix a $1/3$, tal com mostren la Taula 1 i la Figura 2. Si $S(1) > 50$, manllevar es tornaria eventualment impossible: es generaria una bombolla que faria el preu dels bons seguir una trajectòria insostenible. La Taula 3 i la Figura 4 il·lustren aquesta situació.

t	$S(t)$	$R(t)$	$B(t)$	*canvi %* *en* $B(t)$
1	49,99	0,9996	49,97001	–
2	49,97001	0,998802	49,91014	−0,11981
3	49,91014	0,996419	49,7314	−0,35814
4	49,7314	0,98937	49,20276	−1,06299
5	49,20276	0,969096	47,68218	−3,09042
6	47,68218	0,915154	43,63652	−8,48464
7	43,63652	0,797105	34,78291	−20,2895
8	34,78291	0,621626	21,62197	−37,8374
9	21,62197	0,468358	10,12681	−53,1642
10	10,12681	0,385367	3,902542	−61,4633
11	3,902542	0,35163	1,372251	−64,837
12	1,372251	0,339546	0,465942	−66,0454
13	0,465942	0,335417	0,156285	−66,4583
14	0,156285	0,334029	0,052204	−66,5971
15	0,052204	0,333566	0,017413	−66,6434

Taula 1. Govern manlleva menys de 50 en $t = 1$

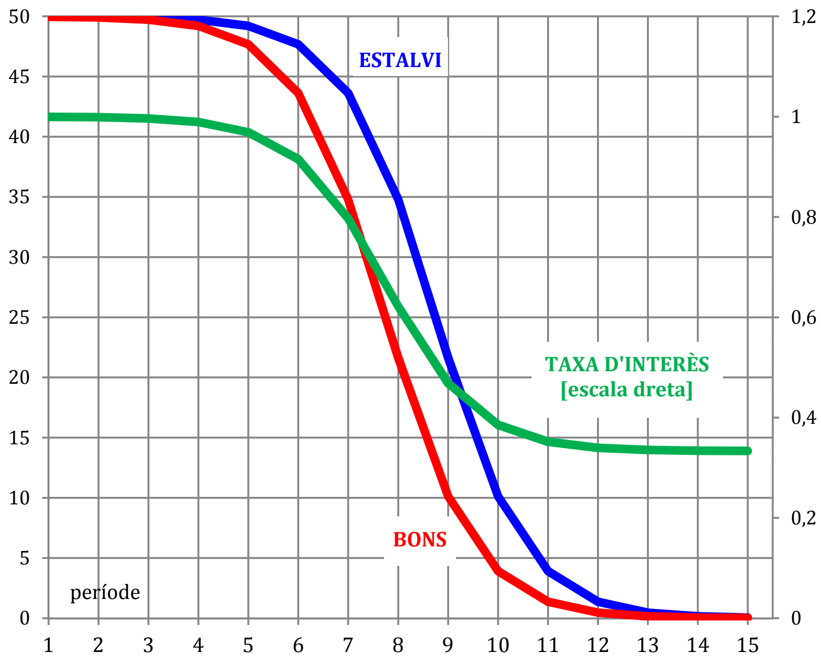

Figura 2. Representació de les dades de la Taula 1

t	$S(t)$	$R(t)$	$B(t)$	*canvi %* *en* $B(t)$
1	50,00001	1	50,00003	–
2	50,00003	1,000001	50,00009	0,00012
3	50,00009	1,000004	50,00027	0,00036
4	50,00027	1,000011	50,00081	0,00108
5	50,00081	1,000032	50,00243	0,00324
6	50,00243	1,000097	50,00729	0,009721
7	50,00729	1,000292	50,02188	0,029173
8	50,02188	1,000876	50,0657	0,087595
9	50,0657	1,002635	50,19761	0,263477
10	50,19761	1,007967	50,59755	0,796729
11	50,59755	1,024487	51,83654	2,448716
12	51,83654	1,079286	55,94645	7,928594
13	55,94645	1,312091	73,40684	31,20912
14	73,40684	15,69205	1151,904	1469,205
15	1151,904	−0,02321	−26,7411	−102,321

Taula 3. Govern manlleva més de 50 en $t = 1$

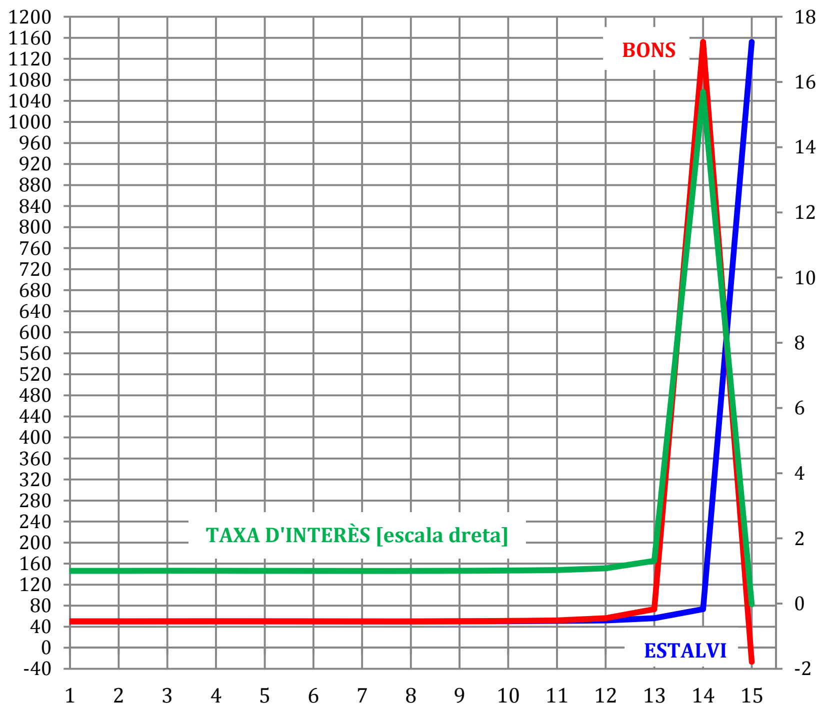

Figura 4. Representació de les dades de la Taula 3

• **Bombolles.** A la Taula 3, en el període $t = 14$ el govern demana més unitats del bé (1151) de les que hi ha disponibles en el període (200). Per a què aquesta demanda fos compatible amb un equilibri caldria que $R < 0$. Però $R < 0$ no pot succeir en equilibri perquè, després de prestar una unitat del bé en t, caldria tornar a pagar en $t + 1$. Una taxa R negativa és com un impost sobre els prestadors, fent que consumir sigui millor que prestar. De fet, si $r(t) > 0$ ($R(t) > 1$), prestant L en t, s'obté més d'L en $t + 1$. Si $-1 \leq r(t) \leq 0$ ($0 \leq R(t) \leq 1$), prestant L en t, s'obté menys d'L en $t + 1$, però s'obté bé. Si $r(t) < -1$ ($R(t) < 0$), prestant L en t, cal pagar en $t + 1$ (es com tornar a prestar). Tornant a la Taula 3, pot interpretar-se que en el període 14 la bombolla del deute esclata.

• **La població o les dotacions han de créixer per a fer sostenible un deute públic creixent.** Per a il·lustrar aquesta tesi, suposem que les dotacions es dupliquen cada període. Aleshores, $S_t = \left(75 - \frac{25}{R(t)}\right) 2^{t-1}$, $R(t) = \frac{25}{75 - \frac{B(t-1)}{2^{t-1}}}$ i $B(t) = \frac{25B(t-1)}{75 - \frac{B(t-1)}{2^{t-1}}}$. Les possibilitats d'endeutament públic s'han incrementat: la Taula 5 mostra que ara el govern pot manllevar inicialment 62 però no 63.

t	$S(t)$	$R(t)$	$B(t)$	$S(t)$	$R(t)$	$B(t)$
1	62	1,92	119,2	63	2,08	131,2
2	119,2	1,62	193,7	131,25	2,66	350
3	193,7	0,94	182,3	350	−2	−700
4	182,3	0,47	87,3	−700	0,15	−107,6
5	87,3	0,35	31,3	−107,6	0,3	−32,9
6	31,3	0,337	10,6	−32,9	0,32	−10,8
7	10,6	0,334	3,5	−10,8	0,33	−3,6

Taula 5. Dinàmica quan el govern manlleva 62 o 63 en $t = 1$ (en groc, una situació impossible)

3.5. Equivalència de bons i imposts

• **Un resultat d'equivalència bons–imposts.** Sigui C una assignació d'equilibri quan el govern emet bons. Llavors existeixen imposts que, sense haver d'emetre bons: (i) equilibren el pressupost del govern (recaptació igual a transferències); i (ii) fan que C continuï essent assignació d'equilibri.

• **Demostració de l'equivalència.** L'equivalència diu que les assignacions de consum d'equilibri que es poden assolir amb bons es poden obtenir fent servir imposts en lloc de bons. Amb bons (i sense imposts), les restriccions pressupostàries d'un consumidor i són (7), de jove, i (8), de gran.

$$c_t^i(t) + l^i(t) + p(t)b^i(t) = w_t^i(t) \tag{7}$$

$$c_t^i(t+1) = R(t)l^i(t) + b^i(t) + w_t^i(t+1) \tag{8}$$

Amb imposts (i sense bons), les restriccions passarien a ser (9) i (10).

$$c_t^i(t) + l^i(t) + \tau_t^i(t) = w_t^i(t) \tag{9}$$

$$c_t^i(t+1) + \tau_t^i(t+1) = R(t)l^i(t) + w_t^i(t+1) \tag{10}$$

Per a què el consumidor i triï el mateix lot de consum $\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right)$ en tots dos casos n'hi ha prou en fer equivalents les restriccions: fer (7) igual a (9) i fer (8) igual a (10). Això s'aconsegueix definint $\tau_t^i(t) = p(t)b^i(t)$ (els joves paguen com a impost el que invertirien en bons) i establint $\tau_t^i(t+1) = -b^i(t)$ (els grans reben com a transferència el que aconseguirien com a retribució per la inversió en bons). Per tant, partint de la situació on hi ha bons, la taxa d'interès d'equilibri $\hat{R}(t)$ en t resultaria de solucionar $S_t\left(\hat{R}(t)\right) = B(t)/\hat{R}(t)$. Donada $\hat{R}(t)$ i la compra de bons $b^i(t)$, la mateixa assignació de consum d'equilibri s'obtindria amb imposts (però sense bons) fent $\tau_t^i(t) = p(t)b^i(t) = b^i(t)/\hat{R}(t)$ i $\tau_t^i(t+1) = -b^i(t)$.

3.6. Pensions

• **El model.** Es parteix del model de recol·lecció bàsic i s'hi afegeix un govern que pretén introduir un sistema de pensions autofinançat. El govern pot triar entre dos sistemes bàsics de pensions.

• **Sistema de pensions de capitalització.** En aquest sistema, el govern estableix un impost $\tau(t)$ sobre els joves en el període t, presta la recaptació en el mercat de préstecs en t i transfereix, en forma de pensió $p(t+1)$, el rendiment dels préstecs als grans en el període $t+1$.

• **Sistema de pensions de repartiment.** Caracteritza aquest sistema que la pensió $p(t)$ que reben els grans del període t es finança amb un impost $\tau(t)$ que paguen els joves del mateix període t.

• **Anàlisi del sistema de capitalització.** Aquest sistema pot interpretar-se com si un consumidor jove es pagués la seva pròpia pensió de gran a través del govern: és com si el govern prengués l'estalvi dels joves, els invertís prestant-los en el mercat de préstecs i, quan els joves es fan grans, rebessin com a pensió el rendiment dels préstecs que va fer el govern en el període anterior. Amb aquesta política de finançament de les pensions, són els joves forçats a estalvir més del que voldrien? Quan es jove, la restricció pressupostària d'un consumidor i és

$$c_t^i(t) + l^i(t) + \tau(t) = w_t^i(t);$$

quan és gran, és

$$c_t^i(t+1) = w_t^i(t+1) + R(t) \cdot \left[l^i(t) + \tau(t)\right]$$

on l^i representa el que i estalvia voluntàriament i τ és l'impost que es paga al govern. El govern inverteix τ per a aconseguir la taxa d'interès bruta de mercat R i, en el següent període $t+1$, transfereix el resultat $R \cdot \tau$ del préstec al consumidor i. Definint $L^i(t) = l^i(t) + \tau(t)$, les restriccions pressupostàries formalment coincideixen amb les restriccions sense la pensió. Sense pensió, s'estalvia L^i; amb pensió, l'estalvi voluntari es redueix fins a l^i per a poder pagar l'impost, però de manera que $l^i + \tau = L^i$. Per tant, l'estalvi voluntari l^i es retalla (quan hi ha pensió) per a mantenir el consum que es tenia sense pensió. En resum, <u>la pensió no té efecte</u> sobre la decisió d'estalvi: malgrat que el govern administra la part τ de l'estalvi total del consumidor, en darrera instància el consumidor rep de gran el mateix que si ell mateix hagués administrat τ.

• **Anàlisi del sistema de repartiment.** Ara la pensió $p(t)$ assignada a un gran en t prové de l'impost $\tau(t)$ que en el mateix període paga una generació <u>diferent</u>: el joves en t. Suposem (i) que la població creix a una taxa constant n i (ii) que el govern equilibria el pressupost:

$$\tau(t) \cdot N(t) = p(t) \cdot N(t-1). \tag{11}$$

La condició (11) diu que la recaptació $\tau(t) \cdot N(t)$ en t provinent de la generació nascuda en t és igual al pagament $p(t) \cdot N(t-1)$ de pensions en t als que són grans en t (que van néixer en $t-1$). Atès que la problació creix a la taxa n,

$$\tau(t) \cdot (1+n) \cdot N(t-1) = p(t) \cdot N(t-1)$$

i, per tant,

$$\tau(t) \cdot (1+n) = p(t).$$

La restricció pressupostària del consumidor i de jove és

$$c_t^i(t) + l^i(t) + \tau(t) = w_t^i(t);$$

de gran és

$$c_t^i(t+1) = w_t^i(t+1) + R(t) \cdot l^i(t) + p(t) = w_t^i(t+1) + R(t) \cdot l^i(t) + \tau(t) \cdot (1+n).$$

La restricció pressupostaria vital és

$$c_t^i(t) + \frac{c_t^i(t+1)}{R(t)} = w_t^i(t) + \frac{w_t^i(t+1)}{R(t)} + \tau(t) \cdot \left(\frac{1+n}{1+r(t)} - 1\right).$$

Sense la pensió, el terme $\tau(t) \cdot \left(\frac{n-r}{1+r(t)}\right)$ no apareix, on $r(t)$ és la taxa d'interès neta en t. Si $n > r(t)$, aleshores la restricció pressupostària amb pensió queda per damunt de la restricció sense pensió. Per aquest motiu, un lot de consum més preferit per als consumidors joves esdevé factible. Si $n < r(t)$, la restricció amb la pensió queda per sota de la restricció sense i, com a resultat, la pensió redueix la utililitat dels consumidors joves. La conclusió és que, a diferència del sistema de capitalització, el sistema de repartiment pot millorar o empitjorar el benestar dels joves.

• **El sistema de repartiment com a esquema piramidal.** En un esquema piramidal, una mena de club es crea de manera que els nous membres fan un pagament als membres existents i reben pagaments dels membres futurs. En el sistema de repartiment, tothom és membre del club, els nous membres són els joves, la taxa d'interès neta r captura el pagament dels entrants i n determina el pagament disponible per als futurs membres. En la mesura que el conjunt de membres potencials (els joves) sigui més gran que el conjunt de membres (els grans) és profitós de pertànyer al club. En una economia amb la població en expansió hi ha potencial per a què els joves siguin suficients per a finançar la pensió del grans, la condició precisa essent $n > r$: la taxa de creixement de la població és superior a la taxa d'interès. L'argument intuïtiu és que contribuir una unitat de bé de jove al sistema de pensions en t dóna dret a rebre $1 + r$ unitats de gran, en $t + 1$. Si cada jove en $t + 1$ paga una unitat, llavors calen $1 + r$ consumidors per a aplegar $1 + r$ unitats. Per tant, $n \geq r$ és necessari per a la sostenibilitat del sistema de pensions.

• **Exemple.** Sigui $r = 1/2$, amb 100 consumidors grans. Si cada gran va pagar de jove en $t - 1$ un impost d'una unitat, llavors el conjunt de grans ha de rebre en t una pensió total de $100 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 150$. Si el nombre de joves en t fos 100 (indicant que $n = 0$) i si l'impost d'una unitat no canvia, la recaptació provinent dels joves en t només pujaria a 100. Aquest import és insuficient per a cobrir les necessitats de 150. Per consegüent, n ha de ser tal que $100 \cdot (1 + n) = 150$. Això és, $n = 1/2$ és el valor mínim que fa viable el sistema de pensions si $r = 1/2$ i l'impost que finança les pensions no s'altera. Si l'impost es pot modificar, sostenir el sistema de pensions amb $n < r$ demana sobrecarregar els joves fent-los pagar més que les generacions precedents. La sostenibilitat del sistema requereix que els joves puguin finançar el pagament que reben els grans. Això es pot aconseguir fent créixer els contribuents (incrementant n) o la seva contribució (apujant τ).

Exercicis

Exercici 1. Bons. La funció d'utilitat de cada consumidor jove i és $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$. Cada generació està formada per 100 membres, 80 amb dotació $(1,0)$ i els altres 20 amb dotació $(2,0)$. El govern pretén aplegar 10 unitats amb l'emissió de bons amb venciment d'un període. Al venciment, els bons es paguen amb l'emissió de més bons, també amb venciment d'un període. I així successivament.

(i) Calcula la taxa d'interès d'equilibri, el preu dels bons i la quantitat de bons emesa en els períodes 1, 2 i 3.

(ii) Respon l'apartat (i) si la dotació dels individus del grup de 20 és $(2,1)$ en comptes de $(2,0)$.

(iii) En el cas (ii), troba un import inicial a aplegar que provoqui que el refinançament continuat del deute faci que el volum de bons emès cada període sigui el mateix.

(iv) En el cas (ii), indica un import inicial que faci eventualment insostenible el refinançament del deute.

(v) Respon l'apartat (i) amb les dades del (ii) si, en el període 2, traspassen la meitat dels consumidors joves amb dotació $(1,0)$.

Exercici 2. Equivalència de bons i imposts. Considera l'economia tal que, per a tot t i i, $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$, $N(t) = 100$, els consumidors de cada generació estan numerats de l'1 al 100, $w_t^i = (2,0)$ si i és senar i $w_t^i = (1,1)$ si i és parell. El govern vol manllevar 25 unitats del bé en el període 1 mitjançant la venda de bons i refinança el deute generat pels bons cada període emetent més bons. Troba l'esquema d'imposts i transferències que genera la mateixa assignació de consum d'equilibri que la política de refinançament del deute amb més bons.

Exercici 3. Finançament d'un bé públic. Cada generació té 100 membres: 50 d'ells ("els pobres") amb dotació $(1,0)$ i els altres 50 ("els rics") amb dotació $(4,1)$. Els consumidors, rics o pobres, empren la dotació en consum c, préstecs (privats) l i contribucions (voluntàries) e a un bé públic.

El bé públic només beneficia als consumidors joves (pots suggerir algun exemple real d'aquesta situació?). Per consegüent, la gent gran no contribueix al bé públic. La funció d'utilitat de cada consumidor (jove) i és $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1) \cdot [1 + g(\sum_{j \epsilon N(t)} e^j)]$, on e^j és la contribució del consumidor jove j (e^j no pot ser negativa ni superior a la dotació que j té de jove) i on g es pot interpretar com una funció de producció del bé públic: el total de contribucions $\sum_{j \epsilon N(t)} e^j$ genera el volum $g\left(\sum_{j \epsilon N(t)} e^j\right)$ de bé públic. Pot considerar-se que cada unitat de bé públic fa més útil el consum privat del bé. Per a simplificar, $g\left(\sum_{j \epsilon N(t)} e^j\right) = \sum_{j \epsilon N(t)} e^j$.

Determina quina és la contribució e^P a finançar el bé públic que, en l'equilibri general, fa un consumidor pobre i quina és la contribució e^R que fa un consumidor ric.

Exercici 4. Impost sobre el consum. Considera l'economia on totes les generacions $t \geq 1$ són idèntiques i on cada generació està formada per dos grups: el grup 1 i el grup 2. El grup 1 consta d'$N_1 = 300$ membres i cada membre jove de la generació t disposa de la dotació $(1, 0)$ i té $u_1 = c_1(t) \cdot [c_1(t+1)]^2$ com a funció d'utilitat. El grup 2 està constituït per $N_2 = 100$ membres i en ell cada membre jove i de la generació t disposa de la dotació $(0, 2)$ i té $u_2 = [c_2(t)]^2 \cdot c_2(t+1)$ com a funció d'utilitat. Cada període hi ha un impost de τ unitats del bé per unitat de bé consumida que ha de pagar cada jove del grup 1 i cada gran del grup 2. La recaptació de l'impost es distribueix igualitàriament entre el conjunt d'individus format pels joves del grup 2 i el grans del grup 1.

(i) Calcula l'equilibri general competitiu de l'economia i compara'l amb el que resultaria si no existís l'impost (ni la transferència).

(ii) Determina el valor de τ que maximitza la suma de tots els membres de l'economia que viuen en un període determinat, assumint que la funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum de gran.

Exercici 5. Pensions. Cada generació está formada per 40 individus amb dotació $(0, 2)$ i 60 amb dotació $(1, 0)$. La funció d'utilitat de cada consumidor i és $u_t^i\left(c_t^i(t), c_t^i(t+1)\right) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$.

(i) Calcula l'equilibri general si només hi ha un mercat de préstecs.

(ii) El govern estableix un sistema de pensions de repartiment finançat amb un impost de 0,6 a pagar per cada jove amb dotació positiva quan és jove. La recaptació de l'impost a cada període es distribueix igualitàriament entre tots els individus grans del període. Calcula l'equilibri general.

(iii) El govern estableix un sistema de pensions de repartiment finançat amb un impost de τ unitats a pagar per cada jove amb dotació positiva quan és jove. La recaptació de l'impost a cada període es distribueix igualitàriament entre tots els individus grans del període. Calcula el valor de τ que fa que, en l'equilibri general, el consum de cada individu sigui el mateix valor c, tant si és jove com si és gran.

Exercici 6. Que paguin els fills. Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen n individus idèntics que viuen tres períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el primer període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en t són: en t, $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$; en $t+1$, $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$; i en $t+2$, $u_{t+2} = c_{t+2}$. Els individus joves accepten prestar als individus grans del mateix període perquè els joves del següent període pagaran els deutes dels grans del període anterior. Troba quant presten els joves als grans cada període i la taxa d'interès corresponent.

Exercici 7. Impostos, transferències i bons. Hi ha dos grups d'individus, G1 i G2, amb n i m membres, respectivament. Tots els individus viuen dos períodes consecutius. Cada membre de G1 té una dotació d'una unitat de bé quan és jove i cap de gran. Cada membre de G2 té una dotació de d'una unidad de bé quan és gran i cap de jove. La funció d'utilitat de tot membre de G1 jove en t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$. La funció d'utilitat de tot membre de G2 jove en t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1} + c_t$.

(i) Calcula l'equilibri general.

(ii) Imagina que no és posible establir un mercat de préstecs i que una autoritat central (un govern) estableix un impost de quantia fixa τ que recau sobre un dels grups i paguen els membres del grup amb la seva dotació. El govern distribueix igualitàriament la recaptació del període entre els membres de l'altre grup que no tinguin dotació.

(a) Determina la diferència de consum de cada individuo en cada període respecte dels consums obtinguts en l'apartat (i).

(b) Calcula la quantia fixa τ que replica els consums d'(i).

(iii) Considera de nou (ii) amb la diferència que la recaptació es distribueix igualitàriament entre tots els individus del període que no tenen dotació. Respon a (b) en aquest cas.

(iv) Considera novament (ii) amb la diferència que no hi ha imposts. Ara, cada període, el govern finança la transferència amb emissions de bons el pagament dels quals es finança amb noves emissions de bons. És sostenible aquesta política?

Exercici 8. Gerontocràcia. Només hi ha un bé, que no pot acumular-se. Cada generació està formada per n individus idèntics. Cada individu jove té una dotació d'una unitat de treball. Cada individu gran no té dotació de treball. Cada individu jove en el moment t decideix quina fracció e_t de la seva unitat de treball dedica a activitats d'esbarjo i quina fracció $1 - e_t$ dedica a produir el bé. La funció de producció del bé a partir del treball és la funció identitat: si x unitats de treball es destinen a produir el bé, la producció resultant del bé són x unitats.

La funció d'utilitat de cada individu que és jove en el moment t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^2 \cdot e_t$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i e_t l'esbarjo que tria de jove. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el consum que fa de gran. Tots els individus prenen les seves decisions amb l'objectiu de maximitzar la seva utilitat. En cada moment t, els individus grans imposen els individus joves l'obligació de donar-los la proporció τ_t de la producció que els joves realitzen. Els grans consumeixen la producció que els joves els lliuren i els joves consumeixen la producció que els resta després de fer la transferència als grans.

Determina el consum que cada individu fa de jove, el consum de gran, la part del seu treball dedicada a activitats d'esbarjo i la proporció de la producció dels joves de la qual els grans se n'apropien.

Exercici 9. Imposts. Només hi ha un bé, que no pot acumular-se d'un període cap a un altre. Cada generació està formada per tres grups: 1, 2 i 3. Cada grup està format per n individus idèntics. La funció d'utilitat de cada jove és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum. No hi ha producció.

Cada individu del grup 1 té, com a dotació, zero unitats del bé de jove i una unitat del bé de gran. Cada individu del grup 2 té, com a dotació, una unitat del bé de jove i zero unitats del bé de gran. Cada individu del grup 3 no té dotació del bé, ni de jove ni de gran.

Una llei sagrada establerta en temps immemorial dicta que, cada període, els membres joves dels grups 1 i 2 han de pagar τ unitats del bé (aquest import és el mateix cada període i suficientment petit per a què tothom el pugui pagar). La llei mana que la recaptació total de l'impost en el període sigui distribuïda, en el mateix període, de manera igualitària entre els membres del grup 3, però no especifica si els destinataris de la transferència han de ser el joves del grup 3 o els grans del grup 3.

Determina l'equilibri general, i la utilitat corresponent de cada individu, en els dos casos: cas 1, la transferència es fa als joves del grup 3; cas 2, la transferència es fa als grans del grup 3. Jutja quina opció consideres més recomanable.

Exercici 10. Deute públic. Cada unitat de bé només pot existir en un període de temps. Totes les generacions $t \geq 1$ són idèntiques. Cada generació està formada per dos grups: G1 i G2. Cada grup té n membres. La dotació de cada membre de G1 és $(w,\ w)$. La dotació de cada membre de G2 és $(\delta \cdot w,\ 0)$, on $w > 0$ i $\delta > 1$. El paràmetre δ mesura quantes vegades un individu jove de G2 és més ric que un individu jove de G1. La funció d'utilitat de cada individu i jove en el període t és $u_i(t) = c_i(t) \cdot c_i(t+1)^{\beta}$, on $\beta > 0$.

En $t = 1$, el govern de l'economia crea un mercat de bons públics amb l'objectiu d'aconseguir G unitats del bé de la venda de bons. El govern accepta que el preu p del bo es determini competitivament (p s'expressa en unitats del bé per bo). Cada bo emès en $t = 1$ representa la promesa de pagament d'una unitat del bé en $t = 2$ al comprador del bo. El govern distribueix els ingressos de la venda de bons igualitàriament entre tots els grans del període $t = 1$.

(i) Quin és l'equilibri general de l'economia en $t = 1$ assumint que la rendibilitat del bo és igual a la rendibilitat del préstec del bé?

(ii) Compara l'assignació de consum d'equilibri de l'apartat (i) amb la que s'obtindria si el govern prohibís l'existència del mercat de préstecs privats, de manera que els prestadors només poguessin prestar al govern.

(iii) Tant al cas (i) com al (ii), obté l'equació que estableix la dinàmica d'acumulació de deute públic si el govern refinança sempre el seu deute.