

**Exercici 1. Bons.** La funció d'utilitat de cada consumidor jove  $i$  és  $u_t^i(c_t^i(t), c_t^i(t+1)) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$ . Cada generació està formada per 100 membres, 80 amb dotació  $(1, 0)$  i els altres 20 amb dotació  $(2, 0)$ . El govern pretén aplegar 10 unitats amb l'emissió de bons amb venciment d'un període. Al venciment, els bons es paguen amb l'emissió de més bons, també amb venciment d'un període. I així successivament.

- (i) Calcula la taxa d'interès d'equilibri, el preu dels bons i la quantitat de bons emesa en els períodes 1, 2 i 3.
- (ii) Respon l'apartat (i) si la dotació dels individus del grup de 20 és  $(2, 1)$  en comptes de  $(2, 0)$ .
- (iii) En el cas (ii), troba un import inicial a aplegar que provoqui que el refinançament continuat del deute faci que el volum de bons emès cada període sigui el mateix.
- (iv) En el cas (ii), indica un import inicial que faci eventualment insostenible el refinançament del deute.
- (v) Respon l'apartat (i) amb les dades del (ii) si, en el període 2, traspassen la meitat dels consumidors joves amb dotació  $(1, 0)$ .

**Exercici 2. Equivalència de bons i impostos.** Considera l'economia tal que, per a tot  $t$  i  $i$ ,  $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1)$ ,  $N(t) = 100$ , els consumidors de cada generació estan numerats de l'1 al 100,  $w_t^i = (2, 0)$  si  $i$  és senar i  $w_t^i = (1, 1)$  si  $i$  és parell. El govern vol manllevar 25 unitats del bé en el període 1 mitjançant la venda de bons i refinaça el deute generat pels bons cada període emetent més bons. Troba l'esquema d'imposts i transferències que genera la mateixa assignació de consum d'equilibri que la política de refinançament del deute amb més bons.

**Exercici 3. Finançament d'un bé públic.** Cada generació té 100 membres: 50 d'ells ("els pobres") amb dotació  $(1, 0)$  i els altres 50 ("els rics") amb dotació  $(4, 1)$ . Els consumidors, rics o pobres, empren la dotació en consum  $c$ , préstecs (privats)  $l$  i contribucions (voluntàries)  $e$  a un bé públic.

El bé públic només beneficia als consumidors joves (pots suggerir algun exemple real d'aquesta situació?). Per consegüent, la gent gran no contribueix al bé públic. La funció d'utilitat de cada consumidor (jove)  $i$  és  $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1) \cdot [1 + g(\sum_{j \in N(t)} e^j)]$ , on  $e^j$  és la contribució del consumidor jove  $j$  ( $e^j$  no pot ser negativa ni superior a la dotació que  $j$  té de jove) i on  $g$  és una mena de funció de producció del bé públic: el total de contribucions  $\sum_{j \in N(t)} e^j$  genera el volum  $g(\sum_{j \in N(t)} e^j)$  de bé públic. Pot interpretar-se que cada unitat de bé públic fa més útil el consum privat del bé. Per a simplificar,  $g(\sum_{j \in N(t)} e^j) = \sum_{j \in N(t)} e^j$ .

Determina quina és la contribució  $e^P$  a finançar el bé públic que, en l'equilibri general, fa un consumidor pobre i quina és la contribució  $e^R$  que fa un consumidor ric.

**Exercici 4. Impost sobre el consum.** Considera l'economia on totes les generacions  $t \geq 1$  són idèntiques i on cada generació està formada per dos grups: el grup 1 i el grup 2. El grup 1 consta d' $N_1 = 300$  membres i cada membre jove de la generació  $t$  disposa de la dotació  $(1, 0)$  i té  $u_1 = c_1(t) \cdot [c_1(t + 1)]^2$  com a funció d'utilitat. El grup 2 està constituït per  $N_2 = 100$  membres i en ell cada membre jove  $i$  de la generació  $t$  disposa de la dotació  $(0, 2)$  i té  $u_2 = [c_2(t)]^2 \cdot c_2(t + 1)$  com a funció d'utilitat. Cada període hi ha un impost de  $\tau$  unitats del bé per unitat de bé consumida que ha de pagar cada jove del grup 1 i cada gran del grup 2. La recaptació de l'impost es distribueix igualitàriament entre el conjunt d'individus format pels joves del grup 2 i el grans del grup 1.

- (i) Calcula l'equilibri general competitiu de l'economia i compara'l amb el que resultaria si no existís l'impost (ni la transferència).
- (ii) Determina el valor de  $\tau$  que maximitza la suma de tots els membres de l'economia que viuen en un període determinat, assumint que la funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum de gran.

**Exercici 5. Pensions.** Cada generació està formada per 40 individus amb dotació  $(0, 2)$  i 60 amb dotació  $(1, 0)$ . La funció d'utilitat de cada consumidor  $i$  és  $u_t^i(c_t^i(t), c_t^i(t + 1)) = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t + 1)$ .

- (i) Calcula l'equilibri general si només hi ha un mercat de préstecs.
- (ii) El govern estableix un sistema de pensions de repartiment finançat amb un impost de 0,6 a pagar per cada jove amb dotació positiva quan és jove. La recaptació de l'impost a cada període es distribueix igualitàriament entre tots els individus grans del període. Calcula l'equilibri general.
- (iii) El govern estableix un sistema de pensions de repartiment finançat amb un impost de  $\tau$  unitats a pagar per cada jove amb dotació positiva quan és jove. La recaptació de l'impost a cada període es distribueix igualitàriament entre tots els individus grans del període. Calcula el valor de  $\tau$  que fa que, en l'equilibri general, el consum de cada individu sigui el mateix valor  $c$ , tant si és jove com si és gran.

**Exercici 6. Que paguin els fills.** Hi ha un únic bé que no es pot produir ni acumular. Cada període neixen  $n$  individus idèntics que viuen tres períodes consecutius. Els individus només tenen dotació del bé en el primer període de vida: una unitat del bé. Les funcions d'utilitat d'un individu nascut en  $t$  són: en  $t$ ,  $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$ ; en  $t + 1$ ,  $u_{t+1} = c_{t+1} \cdot c_{t+2}$ ; i en  $t + 2$ ,  $u_{t+2} = c_{t+2}$ . Els individus joves accepten prestar als individus grans del mateix període perquè els joves del següent període pagaran els deutes dels grans del període anterior. Troba quant presten els joves als grans cada període i la taxa d'interès corresponent.

**Exercici 7. Suïcidi.** Hi ha un únic bé que no es pot acumular d'un període cap a un altre. No hi ha producció. Hi ha dos grups d'individus, G1 i G2, cadascun format per  $n$  membres que viuen, com a màxim, dos períodes consecutius.

Cada membre de G1 té la dotació de bé  $(1, 1 + \varepsilon)$ , on  $\varepsilon > 0$  és un número àrbitrariament proper a zero, 1 és la dotació de jove i  $1 + \varepsilon$  és la dotació de gran. Cada membre de G2 té la dotació de bé  $(2, 1)$ , on 2 és la dotació de jove i 1 és la dotació de gran. Tots els individus joves tenen la mateixa funció d'utilitat  $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$ , on  $c_t$  és el consum que l'individu fa de jove i  $c_{t+1}$  el consum que el mateix individu farà de gran.

(i) Calcula l'equilibri general de l'economia de cada període.

Imagina que s'introdueix la següent modificació en el model. A l'inici del seu primer període de vida, els individus joves de G1 decideixen si se suïciden al final del seu primer període de vida. Quan un individu de G1 només viu un període, la seva funció d'utilitat de jove és  $U_t = c_t$ , on  $c_t$  és el consum que l'individu fa de jove. Quan un individu de G1 viu dos períodes, la seva funció d'utilitat de és  $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$ , on  $c_t$  és el consum que l'individu fa de jove i  $c_{t+1}$  el consum que el mateix individu farà de gran. Un individu de G1 se suïcida al final del període  $t$  si la utilitat dels consums rellevants obtinguts a l'apartat (i) segons  $U_t$  és superior a la utilitat segons  $u_t$ .

(ii) Donats els resultats de l'apartat (i), determina si algun individu del grup G1 se suïcida. Explica si la resposta afectaria als resultats de l'apartat (i) en cas que els membres de G2 anticipessin la decisió dels membres de G1 (imagina que els membres de G2 coneixen totes les característiques de tots els membres de l'economia, de manera que els membres de G2 podrien replicar els resultats de l'apartat (i) i la conclusió sobre si algun membre de G1 voldria suïcidar-se).

**Exercici 8. Gerontocràcia.** Només hi ha un bé, que no pot acumular-se. Cada generació està formada per  $n$  individus idèntics. Cada individu jove té una dotació d'una unitat de treball. Cada individu gran no té dotació de treball. Cada individu jove en el moment  $t$  decideix quina fracció  $e_t$  de la seva unitat de treball dedica a activitats d'esbarjo i quina fracció  $1 - e_t$  dedica a produir el bé. La funció de producció del bé a partir del treball és la funció identitat: si  $x$  unitats de treball es destinen a produir el bé, la producció resultant del bé són  $x$  unitats.

La funció d'utilitat de cada individu que és jove en el moment  $t$  és  $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^2 \cdot e_t$ , on  $c_t$  és el consum que l'individu fa de jove,  $c_{t+1}$  el consum que el mateix individu farà de gran i  $e_t$  l'esbarjo que tria de jove. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el consum que fa de gran. Tots els individus prenen les seves decisions amb l'objectiu de maximitzar la seva utilitat. En cada moment  $t$ , els individus grans imposen als individus joves l'obligació de donar-los la proporció  $\tau_t$  de la producció que els joves realitzen. Els grans consumeixen la producció que els joves els lliuren i els joves consumeixen la producció que els resta després de fer la transferència als grans.

Determina el consum que cada individu fa de jove, el consum de gran, la part del seu treball dedicada a activitats d'esbarjo i la proporció de la producció dels joves de la qual els grans se n'apropien.

**Exercici 9. Imposts.** Només hi ha un bé, que no pot acumular-se d'un període cap a un altre. Cada generació està formada per tres grups: 1, 2 i 3. Cada grup està format per  $n$  individus idèntics. La funció d'utilitat de cada jove és  $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$ , on  $c_t$  és el consum que l'individu fa de jove i  $c_{t+1}$  el consum que el mateix individu farà de gran. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum. No hi ha producció.

Cada individu del grup 1 té, com a dotació, zero unitats del bé de jove i una unitat del bé de gran. Cada individu del grup 2 té, com a dotació, una unitat del bé de jove i zero unitats del bé de gran. Cada individu del grup 3 no té dotació del bé, ni de jove ni de gran.

Una llei sagrada establerta en temps immemorial dicta que, cada període, els membres joves dels grups 1 i 2 han de pagar  $\tau$  unitats del bé (aquest import és el mateix cada període i suficientment petit per a què tothom el pugui pagar). La llei mana que la recaptació total de l'impost en el període sigui distribuïda, en el mateix període, de manera igualitària entre els membres del grup 3, però no especifica si els destinataris de la transferència han de ser els joves del grup 3 o els grans del grup 3.

Determina l'equilibri general, i la utilitat corresponent de cada individu, en els dos casos: cas 1, la transferència es fa als joves del grup 3; cas 2, la transferència es fa als grans del grup 3. Jutja quina opció consideres més recomanable.

**Exercici 10. Deute públic.** Cada unitat de bé només pot existir en un període de temps. Totes les generacions  $t \geq 1$  són idèntiques. Cada generació està formada per dos grups: G1 i G2. Cada grup té  $n$  membres. La dotació de cada membre de G1 és  $(w, w)$ . La dotació de cada membre de G2 és  $(\delta \cdot w, 0)$ , on  $w > 0$  i  $\delta > 1$ . El paràmetre  $\delta$  mesura quantes vegades un individu jove de G2 és més ric que un individu jove de G1. La funció d'utilitat de cada individu  $i$  jove en el període  $t$  és  $u_i(t) = c_i(t) \cdot c_i(t+1)^\beta$ , on  $\beta > 0$ .

En  $t = 1$ , el govern de l'economia crea un mercat de bons públics amb l'objectiu d'aconseguir  $G$  unitats del bé de la venda de bons. El govern accepta que el preu  $p$  del bo es determini competitivament ( $p$  s'expressa en unitats del bé per bo). Cada bo emès en  $t = 1$  representa la promesa de pagament d'una unitat del bé en  $t = 2$  al comprador del bo. El govern distribueix els ingressos de la venda de bons igualitàriament entre tots els grans del període  $t = 1$ .

- (i) Quin és l'equilibri general de l'economia en  $t = 1$  assumint que la rendibilitat del bo és igual a la rendibilitat del préstec del bé?
- (ii) Compara l'assignació de consum d'equilibri de l'apartat (i) amb la que s'obtingria si el govern prohibís l'existència del mercat de préstecs privats, de manera que els prestadors només poguessin prestar al govern.
- (iii) Tant al cas (i) com al (ii), obté l'equació que estableix la dinàmica d'acumulació de deute públic si el govern refinança sempre el seu deute.