Un exercici amb producció

Descripció de l'economia

• Hi ha un únic bé. El bé es pot produir i acumular un període. Cada període neixen n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat en t d'un individu nascut en t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$. Els individus tenen com a dotació dues unitats de treball en el primer període i una unitat en el segon. Els individus venen tota la seva dotació de treball en un mercat de treball competitiu a canvi d'un salari ω que es paga en unitats del bé.

• Hi ha un nombre indeterminat d'empreses idèntiques que produeixen el bé amb factor treball i factor capital. Els individus poden acumular en forma de capital part del bé que aconsegueixen. Aquest capital es ven a les empreses en un mercat de capital competitiu a canvi d'un preu σ. Cada període t, la funció de producció agregada de l'economia és $Y = 2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2}$, on K és la quantitat total de capital disponible en t i L és la quantitat total de capital disponible en t.

• Quina és la trajectòria d'acumulació del capital d'un individu i la trajectòria d'acumulació de l'estoc de capital de tota l'economia? Quins són els corresponents valors d'estat estacionari?

Anàlisi

• **Decisió d'acumulació de capital.** En el seu primer període de vida, cada individu s'enfronta a la restricció pressupostària

$$c + k' = 2 \cdot \omega$$

on k' és el capital que l'individu acumula per al període següent i ω és el salari del primer període. En el segon període, la restricció és

$$c' = \sigma' \cdot k' + 1 \cdot \omega'$$

on σ' és el preu del capital del segon període i ω' és el salari del segon període. Combinant-les, s'obté la restricció pressupostària vital

$$c + \frac{c'}{\sigma'} = 2 \cdot \omega + \frac{\omega'}{\sigma'}.$$

• **Decisió d'acumulació de capital.** Tot individu nascut en t s'enfronta en t al problema de

$$\begin{array}{ll} \text{maximitzar} & u = c \cdot c' \\ \text{sotmès a} & c + \frac{c'}{\sigma'} = 2 \cdot \omega + \frac{\omega'}{\sigma'}. \end{array}$$

El lagrangià és

$$\mathcal{L} = c \cdot c' + \lambda \cdot \left(2 \cdot \omega \ + \frac{\omega'}{\sigma'} - c - \frac{c'}{\sigma'} \right).$$

Les condicions necessàries per a assolir un màxim d'$\mathcal{L}$ són

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = c' - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c - \frac{\lambda}{\sigma'}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2 \cdot \omega \ + \frac{\omega'}{\sigma'} - c - \frac{c'}{\sigma'}.$$

Se segueix de les dues primeres condicions que

$$c = \frac{c'}{\sigma'}.$$

Introduint aquesta equació en la tercera condició

$$c = \omega + \frac{\omega'}{2 \cdot \sigma'}.$$

Sabent que $c + k' = 2 \cdot \omega$, la conclusió és que

$$\boxed{k' = 2 \cdot \omega - c = 2 \cdot \omega \ - \left(\omega + \frac{\omega'}{2 \cdot \sigma'} \right) = \omega - \frac{\omega'}{2 \cdot \sigma'}.}$$

• **Determinació del salari**. Per la hipòtesi que el salari es determina en un mercat de treball competitiu, el salari coincideix amb la productivitat marginal del treball segons la funció de producció agregada:

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial (2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2})}{\partial L} = \left(\frac{K}{L} \right)^{1/2}.$$

Cada període, cadascun dels n individus joves ofereix 2 unitats de treball i, a la vegada, cadascun dels n individus gran ofereix 1 unitat de treball. Per tant, la quantitat total de treball L cada període és $2 \cdot n + 1 \cdot n = 3 \cdot n$. D'altra banda, atès que hi ha n individus idèntics i cadacun d'ells acumula k unitats de treball, l'estoc de capital K cada període és $n \cdot k$. Com a resultat,

$$\boxed{\omega = \left(\frac{K}{L} \right)^{1/2} = \left(\frac{n \cdot k}{3 \cdot n} \right)^{1/2} = \left(\frac{k}{3} \right)^{1/2}.}$$

• **Determinació del preu del capital**. Per la hipòtesi que el preu del capital es determina en un mercat de capital competitiu, el preu del capital coincideix amb la productivitat marginal del capital segons la funció de producció agregada:

$$\sigma = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial(2 \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2})}{\partial K} = \left(\frac{L}{K}\right)^{1/2} = \left(\frac{3}{k}\right)^{1/2} = \frac{1}{\omega}.$$

• **Trajectòries d'acumulació de capital.** Sabent que

$$k' = \omega - \frac{\omega'}{2 \cdot \sigma'} \qquad \omega' = \left(\frac{k'}{3}\right)^{1/2}$$

$$\omega = \left(\frac{k}{3}\right)^{1/2} \qquad \sigma' = \left(\frac{3}{k'}\right)^{1/2}$$

es conclou que

$$k' = \left(\frac{k}{3}\right)^{1/2} - \frac{\left(\frac{k'}{3}\right)^{1/2}}{2 \cdot \left(\frac{3}{k'}\right)^{1/2}} = \left(\frac{k}{3}\right)^{1/2} - \frac{k'}{6}.$$

Un cop aïllada k',

$$\boxed{k' = \frac{6}{7 \cdot \sqrt{3}} \cdot k^{1/2}}$$

que és la funció (creixent i còncava) que expressa la trajectòria d'acumulació (individual) de capital. La dinàmica d'acumulació de l'estoc total de capital es pot obtenir així:

$$K' = n \cdot k' = n \cdot \frac{6}{7 \cdot \sqrt{3}} \cdot k^{1/2} = n^{1/2} \cdot \frac{6}{7 \cdot \sqrt{3}} \cdot (n \cdot k)^{1/2} = \frac{6 \cdot \sqrt{n}}{7 \cdot \sqrt{3}} \cdot K^{1/2}.$$

• **Estats estacionaris.** En el cas de l'acumulació individual, tot valor $\bar{k}$ d'estat estacionari satisfà:

$$k' = k = \bar{k}$$
$$k' = \frac{6}{7 \cdot \sqrt{3}} \cdot k^{1/2}.$$

Deixant de banda la solució $\bar{k}$, hi ha una única altra solució:

$$\boxed{\bar{k} = \frac{12}{49}.}$$

De l'anterior es dedueix que l'estoc total de capital $\bar{K}$ (diferent de zero) d'estat estacionari és

$$\bar{K} = n \cdot \bar{k} = \frac{12 \cdot n}{49}.$$

Qüestions addicionals

• **Qüestió 1.** Torna a resoldre el problema anterior assumint que el salari no es determina a un mercat competitiu sinó que cada període creix a una taxa constant $g > 0$: $\omega' = (1+g)\cdot\omega$. Assumeix també que la producció es distribueix entre els factors de producció segons la fórmula

$$Y = \omega \cdot L + \sigma \cdot K\,.$$

• **Qüestió 2.** Torna a resoldre el problema anterior assumint que el salari no es determina a un mercat competitiu sinó que el factor treball rep com a remuneració cada període una proporció fixa $0 < \alpha < 1$ de la producció: $\omega \cdot L = \alpha \cdot Y$ (i, en conseqüència, $\sigma \cdot K = (1-\alpha)\cdot Y$).

• **Qüestió 3.** Torna a resoldre el problema anterior assumint que el salari no és igual a la productivitat marginal $\partial Y/\partial L$ del treball sinó a la productivitat mitjana Y/L del treball i, alhora, que el preu del capital no és igual a la productivitat marginal $\partial Y/\partial K$ del capital sinó a la productivitat mitjana Y/K del capital.

• **Qüestió 4.** Torna a resoldre el problema anterior considerant altres mecanismes de distribució de la producció entre els factors treball i capital.