Solució proposada de la pregunta 5 de l'examen de 23/11/2015

5. Capital humà. En l'economia només hi ha un bé, que no pot acumular-se d'un període cap a un altre però que es pot produir-se combinant els factors treball i capital humà. La funció de producció de l'economia en cada moment t és $Y_t = (H_t)^\alpha \cdot (L_t)^{1-\alpha}$, on $0 < \alpha < 1$, H_t és el capital humà total en el període t i L_t és el volum total de factor treball en t.

Cada generació està formada per n individus idèntics, amb la funció d'utilitat de jove $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. Cada individu jove disposa d'una unitat de treball de jove i cap unitat de gran. Cada individu jove en t decideix quina part l_t del seu treball dedica a la producció del bé i quina part $1 - l_t$ destina a la formació de capital humà. La funció de formació de capital humà h_t a partir del treball $1 - l_t$ destinat a formar-lo és $h_t = \theta \cdot (1 - l_t)$, on $\theta > 1$. Formar capital humà té un cost: el cost, en unitats del bé, de crear una unitat de capital humà és $\gamma > 0$.

El capital humà acumulat de jove es pot fer servir de gran per a produir el bé. La remuneració de cada unitat de capital humà és la productivitat marginal del capital humà. La retribució de cada unitat de treball és la productivitat marginal del treball.

- Redacta tu mateix/a les preguntes a respondre i respon-les.

Es calcularà la quantitat de treball emprada en la producció del bé

Sigui l la quantitat de treball dedicada a produir bé i h la quantitat de capital humà acumulada, on $h = \theta \cdot (1 - l)$.

Sigui ω el salari i σ la remuneració del capital humà. Atès que ω és la productivitat marginal del treball,

$$\omega = \frac{\partial Y}{\partial L} = (1 - \alpha) \cdot H^\alpha \cdot (L)^{-\alpha} = (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{H}{L}\right)^\alpha.$$

Per la hipòtesi que σ és la productivitat marginal del capital humà,

$$\sigma = \frac{\partial Y}{\partial H} = \alpha \cdot H^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} = \alpha \cdot \left(\frac{L}{H}\right)^{1-\alpha}.$$

Restricció pressupostària de cada individu jove

$$c + \gamma \cdot h' = \omega \cdot l$$

$$c + \gamma \cdot \theta \cdot (1 - l) = \omega \cdot l$$

Restricció pressupostària de cada individu gran

$$c' = \sigma' \cdot h'$$

$$c' = \sigma' \cdot \theta \cdot (1 - l)$$

Problema de maximització de cada individu jove

$$\text{Max } c \cdot c'$$

$$\text{sotmès a} \quad c + \gamma \cdot \theta \cdot (1 - l) = \omega \cdot l$$

$$c' = \sigma' \cdot \theta \cdot (1 - l)$$

Lagrangià

$$\mathcal{L} = c \cdot c' + \lambda \cdot \big(\omega \cdot l - c - \gamma \cdot \theta \cdot (1 - l)\big) + \mu \cdot (\sigma' \cdot \theta \cdot (1 - l) - c')$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = c' - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'} = c - \mu$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = \lambda \cdot (\omega + \gamma \cdot \theta) - \mu \cdot \sigma' \cdot \theta$$

Combinant les tres equacions s'obté

$$c' \cdot (\omega + \gamma \cdot \theta) = c \cdot \sigma' \cdot \theta. \tag{1}$$

De la restricció pressupostària de jove,

$$c = \omega \cdot l - \gamma \cdot \theta \cdot (1 - l)$$

i de la restricció pressupostària de gran

$$c' = \sigma' \cdot \theta \cdot (1 - l).$$

[La solució de problema de maximització també es pot obtenir introduint $c = \omega \cdot l - \gamma \cdot \theta \cdot (1 - l)$ i $c' = \sigma' \cdot \theta \cdot (1 - l)$ en la funció d'utilitat i maximitzar respecte d'l.]

Per tant, (1) esdevé

$$\sigma' \cdot \theta \cdot (1 - l) \cdot (\omega + \gamma \cdot \theta) = (\omega \cdot l - \gamma \cdot \theta \cdot (1 - l)) \cdot \sigma' \cdot \theta.$$

Aïllant l s'arriba a

$$l = \frac{\gamma \cdot \theta + \frac{\omega}{2}}{\gamma \cdot \theta + \omega}. \tag{2}$$

D'aquí es conclou que

$$c = \omega \cdot l - \gamma \cdot \theta \cdot (1 - l) = \frac{\omega}{2}$$

i que

$$c' = \sigma' \cdot \theta \cdot (1 - l) = \frac{\sigma' \cdot \omega \cdot \theta}{2 \cdot (\gamma \cdot \theta + \omega)}.$$

Sabent que

$$\omega = (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{H}{L}\right)^{\alpha}$$

resulta

$$\omega = (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{n \cdot h}{n \cdot l}\right)^{\alpha} = (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{\theta \cdot (1 - l)}{l}\right)^{\alpha}. \tag{3}$$

Aïllant ω de (2),

$$\omega = \frac{\gamma \cdot \theta \cdot (1 - l)}{l - \frac{1}{2}}.$$

Inserint l'equació anterior en (3),

$$\frac{\gamma \cdot \theta \cdot (1 - l)}{l - \frac{1}{2}} = (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{\theta \cdot (1 - l)}{l}\right)^{\alpha}.$$

Reordenant

$$\boxed{\gamma \cdot \theta^{1-\alpha} \cdot (1 - l)^{1-\alpha} \cdot l^{\alpha} = (1 - \alpha) \cdot \left(l - \frac{1}{2}\right).}$$

Aquesta expressió defineix implícitament la quantitat l dedicada a produir el bé. [La quantitat total produïda de bé seria $Y = H^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} = \left(n \cdot \theta \cdot (1 - l)\right)^{\alpha} \cdot (n \cdot l)^{1-\alpha} = n \cdot \theta^{\alpha} \cdot (1 - l)^{\alpha} \cdot l^{1-\alpha}$.]

Emprant la diferenciació implícita es pot determinar l'impacte sobre l de canvis en els paràmetres γ, θ o α. Per exemple, la derivada $\frac{dl}{d\theta}$ es calcularia de la següent manera.

$$\frac{d(\gamma \cdot \theta^{1-\alpha} \cdot (1 - l)^{1-\alpha} \cdot l^{\alpha})}{d\theta} = \frac{d\left((1 - \alpha) \cdot \left(l - \frac{1}{2}\right)\right)}{d\theta}$$

D'una banda,

$$\frac{d(\theta^{1-\alpha}\cdot(1-l)^{1-\alpha}\cdot l^{\alpha})}{d\theta}=\gamma\cdot\left[\frac{d(\theta^{1-\alpha})}{d\theta}\cdot(1-l)^{1-\alpha}\cdot l^{\alpha}+\theta^{1-\alpha}\cdot\left(\frac{d[(1-l)^{1-\alpha}\cdot l^{\alpha}]}{d\theta}\right)\right]=$$

$$\gamma\cdot\left[(1-\alpha)\cdot\theta^{-\alpha}\cdot(1-l)^{1-\alpha}\cdot l^{\alpha}+\theta^{1-\alpha}\cdot\left(\frac{d[(1-l)^{1-\alpha}]}{d\theta}\cdot l^{\alpha}+(1-l)^{1-\alpha}\cdot\frac{d[l^{\alpha}]}{d\theta}\right)\right]=$$

$$\gamma\cdot\theta^{-\alpha}\cdot\left[(1-\alpha)\cdot(1-l)^{1-\alpha}\cdot l^{\alpha}+\theta\cdot\left(\frac{d[(1-l)^{1-\alpha}]}{dl}\cdot\frac{dl}{d\theta}\cdot l^{\alpha}+(1-l)^{1-\alpha}\cdot\frac{d[l^{\alpha}]}{dl}\cdot\frac{dl}{d\theta}\right)\right]=$$

$$\gamma\cdot\theta^{-\alpha}\cdot\left[(1-\alpha)\cdot(1-l)^{1-\alpha}\cdot l^{\alpha}+\theta\cdot\left((1-\alpha)\cdot(1-l)^{-\alpha}\cdot\frac{dl}{d\theta}\cdot l^{\alpha}+(1-l)^{1-\alpha}\cdot\alpha\cdot l^{\alpha-1}\cdot\frac{dl}{d\theta}\right)\right]=$$

$$\gamma\cdot\theta^{-\alpha}\cdot(1-\alpha)\cdot l^{\alpha}\cdot(1-l)^{-\alpha}\left[1-l+\theta\cdot\frac{dl}{d\theta}\cdot(1+(1-l)\cdot\alpha\cdot l^{-1})\right]. \qquad (4)$$

De l'altra,

$$\frac{d\left((1-\alpha)\cdot\left(l-\frac{1}{2}\right)\right)}{d\theta}=\frac{d\left((1-\alpha)\cdot l-\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\right)}{d\theta}=\frac{d\big((1-\alpha)\cdot l\big)}{d\theta}-\frac{d\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{d\theta}=$$

$$(1-\alpha)\cdot\frac{dl}{d\theta}-0=(1-\alpha)\cdot\frac{dl}{d\theta}. \qquad (5)$$

Igualant (4) i (5),

$$\gamma\cdot\theta^{-\alpha}\cdot(1-\alpha)\cdot l^{\alpha}\cdot(1-l)^{-\alpha}\left[1-l+\theta\cdot\frac{dl}{d\theta}\cdot(1+(1-l)\cdot\alpha\cdot l^{-1})\right]=(1-\alpha)\cdot\frac{dl}{d\theta}$$

$$\gamma\cdot\theta^{-\alpha}\cdot l^{\alpha}\cdot(1-l)^{-\alpha}\left[1-l+\theta\cdot\frac{dl}{d\theta}\cdot(1+(1-l)\cdot\alpha\cdot l^{-1})\right]=\frac{dl}{d\theta}$$

$$\gamma\cdot\theta^{-\alpha}\cdot l^{\alpha}\cdot(1-l)^{-\alpha}\cdot(1-l)+\frac{dl}{d\theta}\cdot\gamma\cdot\theta^{1-\alpha}\cdot l^{\alpha}\cdot(1-l)^{-\alpha}\cdot[1+(1-l)\cdot\alpha\cdot l^{-1}]=\frac{dl}{d\theta}.$$

Aïllant $\frac{dl}{d\theta}$ s'obté

$$\frac{dl}{d\theta}=\frac{\gamma\cdot\theta^{-\alpha}\cdot l^{\alpha}\cdot(1-l)^{-\alpha}\cdot(1-l)}{1-\gamma\cdot\theta^{1-\alpha}\cdot l^{\alpha}\cdot(1-l)^{-\alpha}\cdot[1+(1-l)\cdot\alpha\cdot l^{-1}]}=\frac{\gamma}{\frac{\theta^{\alpha}}{l^{\alpha}\cdot(1-l)^{1-\alpha}}-\gamma\cdot\theta\cdot\left[\frac{1}{1-l}+\frac{\alpha}{l}\right]}.$$

El paràmetre θ mesura la capacitat del treball de generar capital humà. Es té $\frac{dl}{d\theta}<0$ (augment d'aquesta capacitat comporta reducció del treball dedicat a produir el bé) si

$$\gamma \cdot \theta \cdot \left[\frac{1}{1-l} + \frac{\alpha}{l}\right] > \frac{\theta^{\alpha}}{l^{\alpha} \cdot (1-l)^{1-\alpha}}$$

condició que equival a

$$\theta > \left(\frac{1}{l^{\alpha} \cdot (1-l)^{1-\alpha} \cdot \gamma \cdot \left(\frac{1}{1-l} + \frac{\alpha}{l}\right)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

En cas que

$$\theta < \left(\frac{1}{l^{\alpha} \cdot (1-l)^{1-\alpha} \cdot \gamma \cdot \left(\frac{1}{1-l} + \frac{\alpha}{l}\right)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

resultarà que $\frac{dl}{d\theta} > 0$: un augment de la capacitat de treball de generar capital humà fa que s'incrementi la quantitat de treball destinada a produir el bé.

Exercici 1. Comprova si tota l'anàlisi anterior és correcta.

Exercici 2. Troba l'expressió que defineix $\frac{dl}{d\alpha}$.