Ejemplo del modelo de generaciones solapadas con dinero y avaricia

Descripción de la economía

1. Hay un solo bien. El bien no puede acumularse de un período al siguiente: cada unidad del bien tiene una vida útil de un período.

2. Cada generación está formada por n individuos, todos idénticos, que viven dos períodos consecutivos. En su primer período de vida el individuo es joven; en su segundo período es mayor.

3. Cada individuo joven dispone de $w > 0$ unidades del bien como dotación. La dotación de cada individuo mayor es de cero unidades del bien.

4. <u>En el período inicial de la economía (el período 1) se distribuye de manera igualitaria entre todos los individuos mayores la cantidad M de dinero</u>. Estos individuos venden dinero en el período 1 a los jóvenes. Éstos, a su vez, venderán dinero cuando sean mayores a los jóvenes del período 2, quienes venderán dinero cuando sean mayores a los jóvenes del período 3 y así sucesivamente.

5. La función de utilidad de cada individuo joven es $u(c,\ c', m) = c \cdot\ c' \cdot m$, donde c es el consumo que el individuo realiza de jovem, c' es el consumo que el individuo joven espera realizar cuando sea mayor y m es la cantidad de dinero que el individuo joven compra. La idea que la cantidad de dinero aparezca en la función de utilidad captura la idea que los individuos disfrutan acumulando dinero. <u>Los individuos jóvenes tienen previsión perfecta del futuro</u>.

6. La función de utilidad de cada individuo mayor es $u'(c', m') = c' \cdot m'$, donde c' es el consumo que el individuo mayor realiza siendo mayor y m' es la parte del dinero que el individuo compró cuando era joven que decide no vender. <u>Los mayores se consideran avariciosos en el sentido que desean morir atesorando</u> la cantidad de <u>dinero</u> m' (como consecuencia, los mayores venden la cantidad $m - m'$ de dinero).

7. Cada individuo (joven o mayor) toma decisiones sobre las variables que puede controlar con el objetivo de maximizar su función de utilidad.

8. Los dos mercados (del bien y de dinero) se suponen competitivos.

Cuestiones a resolver

Medio punto de la nota final a quien halle errores graves en la resolución propuesta a estas cuestiones

1. Determina el consumo que realiza cada joven, la cantidad de dinero que compra, el consum que realiza cada mayor y la cantidad de dinero que atesora cuando finaliza su vida.

2. Calcula el nivel de precios cada período y la tasa de inflación de cada período.

Solución de la cuestión 1

Una novedad con respecto a los ejemplos y modelos considerados hasta ahora es que la resolución debe desarrollarse por inducción hacia atrás (*backward induction*): primero se establece qué hacen los mayores y, dadas sus decisiones, los jóvenes determinan qué hacer.

El motivo es que en la función de utilidad de cada individuo joven aparece una variable (el consumo futuro c') que no decide el propio individuo joven sinó que decidirá su yo del futuro. De hecho, la novedad de este ejemplo proviene del hecho que los individuos mayores tienen decisiones que tomar (lo que sucedía hasta ahora es que los mayores meramente implementaban sus planes decididos cuando jóvenes).

En consecuencia, en primer lugar se determina la cantidad c' que consumirá un mayor y la cantidad m' de dinero que desea conservar. El par correspondiente (c', m') se obtiene de maximizar la función de utilidad $u'(c', m') = c' \cdot m'$ de cada mayor sujeto a la restricción presupuestaria del mayor, donde p' es el precio del bien expresado en unidades de dinero y m es la cantidad de dinero que el mayor compró de joven:

$$c' + \frac{m'}{p'} = \frac{m}{p'}.$$

El valor del dinero v' es la inversa $1/p'$ del precio p' del bien. Por la hipótesis que el mercado de dinero es competitivo, todos los individuos consideran su valor como un parámetro. Por ello, cuando los mayores deciden, consideran dado el valor $1/p'$ del dinero (o, lo que es lo mismo, el precio p' del bien).

La solución es $c' = \frac{m}{2p'}$ y $m' = \frac{m}{2}$. Esto significa que cada mayor se queda con la mitad del dinero que compró de joven (vendiendo el resto) y consume la mitad del poder de compra del dinero que adquirió de joven.

Ahora se pasa a solucionar el problema de decisión de un individuo joven, dado que todo joven sabe que, cuando sea mayor, decidirá consumir $c' = \frac{m}{2p'}$.

De entrada, el problema de decisión de todo joven consiste en maximizar la función de utilidad $u(c,\ c', m) = c \cdot\ c' \cdot m$ sujeto a la restricción presupuestaria

$$c + \frac{m}{p} = w\,,$$

en donde m es la cantidad de dinero que el joven compra y $1/p$ es el valor del dinero (la cantidad de bien que compra una unidad de dinero). Equivalentemente, p representa el precio del bien en dinero: la cantidad de dinero necesaria para adquirir una unidad del bien. Como ambos mercados (del bien y de dinero) son competitivos todo individuo joven considera p (o, alternativamente, $1/p$) como precio sobre el que no tiene control. Así pues, los jóvenes toman p como dado.

¿Por qué no se añade la restricción presupuestaria del individuo cuando sea mayor? Porque ya se ha tenido en cuenta en la resolución del problema de los mayores. En los modelos considerados en el curso hasta ahora, el yo joven toma las decisiones por el yo mayor dado que el yo mayor no tiene nada que decidir. En cambio, en el presente caso, el mayor decide cómo distribuir el poder de compra que el yo joven le ha cedido en forma de dinero. No es correcto introducir en el problema de decisión del yo joven restricciones presupuestarias basadas en variables (c' y m') sobre las que el yo joven no tiene control. De lo contrario habría que añadir todas las restricciones presupuestarias imaginables. Dado que $c + m/p = w$ es la única restricción presupuestaria que afecta a la toma de decisiones del individuo joven, es la única restricción relevante.

Por otro lado, sabiendo que el consumo futuro vendrá determinado por la expresión $c' = m/2p'$, el individuo joven deberá incluir esta restricción en su programa de maximización. El yo joven tiene la capacidad de influir sobre el consumo del yo futuro sobre la base del dinero m que ceda a su yo mayor. De esta manera, el yo joven sabe que si lega m unidades de dinero a su yo mayor, éste, dado el precio p' del bien, consumirá $c' = m/2p'$. El yo joven tiene la posibilidad de decidir qué es lo mejor para él conociendo cómo reaccionará su yo mayor. En resumen, todo joven

$$\text{Maximiza } \ u = c \cdot \left(\frac{m}{2p'}\right) \cdot m$$
$$\text{sujeto a } \ c + m/p = w$$

donde, por previsión perfecta y la hipótesis de que los mercados son siempre competitivos, el joven considera p' como un precio dado (sobre el que no tiene capacidad de influencia). El individuo joven sólo decide el valor de c (la cantidad de bien que consume) y de m (la cantidad de dinero que transfiere a su futuro yo).

La solución es $c = w/3$ y $m/p = 2w/3$: todo joven consume la tercera parte de su dotación e invierte el poder de compra restante (dos tercios de su dotación) en la compra de dinero. La demanda de dinero en términos reales es $m/p = 2w/3$; en término nominales, es $m = 2pw/3$: dos tercios del valor nominal $p \cdot w$ de su dotación.

Esto significa que cada mayor se queda con la mitad del dinero que compró de joven (vendiendo el resto) y consume la mitad del poder de compra del dinero que adquirió de joven.

Solución de la cuestión 2

Para completar la respuesta de la cuestión 1 (qué cantidad de dinero compra un joven) es necesario establecer el precio p del bien. Con este fin se recurre a las condiciones de equilibrio de los mercados. En la medida en que hay sólo dos, bastará equilibrar uno de ellos. Sea el mercado escogido el mercado de dinero. La condición de equilibrio de este mercado (al ser competitivo) es que la demanda total de dinero en el período considerado sea igual a la oferta total de dinero en el mismo período.

La función de demanda total de dinero (en un período arbitrario t) será la suma de lo que demanden jóvenes y mayores del período. Está claro que los jóvenes van a ser demandantes, porque ninguno de ellos nace con dinero. Como ya se ha calculado, la demanda (nominal) de dinero de cada joven es $m = 2pw/3$. Al haber n jóvenes, la demanda total de dinero de los jóvenes es $2npw/3$.

La resolución del problema de los mayores implícitamente ha considerado que los mayores no demandan dinero. La razón es sencilla: los mayores no tienen bien con el que comprar dinero (en el mercado de dinero se cambia bien por dinero). Por ese motivo, el consumo de los mayores es cero: el dinero no se puede consumir, sólo el bien. De este análisis se deduce que los mayores venderán dinero para poder consumir. Ya quedó determinado que cada mayor vendería la mitad ($m/2$) del dinero m acumulado por su yo joven.

En conclusión, para todo período $t \geq 1$, la demanda total de dinero es $2nwp_t/3$.

La oferta total de dinero no es la cantidad M originariamente creada, ni siquiera en el período inicial $t = 1$. De hecho, en $t = 1$, cada mayor retiene la mitad de lo que le corresponde del monto M. Como consecuencia, la oferta total de dinero en $t = 1$ es $\mathrm{M}/2$. En $t = 2$ la historia es la misma pero con la cantidad total de dinero igual a $\mathrm{M}/2$. ¿Dónde está la otra mitad, $\mathrm{M}/2$? En las tumbas de los mayores del período $t = 1$. Por tanto, en $t = 3$, la cantidad total de dinero disponible será $(\mathrm{M}/2)/2 = \mathrm{M}/2^2$. Procediendo por inducción se infiere que la cantidad total de dinero disponible en el período $t \geq 1$ será $\mathrm{M}/2^{t-1}$.

Resumiendo, para todo período $t \geq 1$, la oferta total de dinero es $\mathrm{M}/2^{t-1}$.

Aplicando la condición de equilibrio del mercado de dinero, $2nwp_t/3 = \mathrm{M}/2^{t-1}$. En suma, el precio del bien en el período $t \geq 1$ es

$$p_t = 3\mathrm{M}/nw2^t. \tag{1}$$

La tasa de inflación resultante en el período $t \geq 2$ sería

$$\pi_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \frac{p_t}{p_{t-1}} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Esto es, la tasa de inflación cada período (a partir del segundo) es del 50% (¿por qué no se puede calcular la tasa del período 1?). Dicho de otro modo, el precio en un período es la mitad del precio del período immediatamente precedente: $p_t = p_{t-1}/2$.

Este resultado podría haberse obtenido de una manera directa calculando el precio de equilibrio del bien en cada período sin tener que considerar los períodos anteriores. En concreto, se tiene, por un lado, que la demanda total de dinero en un período t dado es $nm_t = 2nwp_t/3$; y, por el otro, se sabe que cada mayor del período t se queda $m_t{}' = m_{t-1}/2$ unidades de dinero y, por consiguiente, vende $m_{t-1} - m_t{}' = m_{t-1}/2$. En la medida en que hay n mayores en t, se ofrecerán $nm_{t-1}/2$ unidades de dinero en t. Pero como m_{t-1} coincide con la demanda de dinero de un joven del período $t - 1$, se tiene que $m_{t-1} = 2nwp_{t-1}/3$. De aquí se sigue que la oferta total del dinero en t sea $nm_{t-1}/2 = nwp_{t-1}/3$. La condición que la demanda total de dinero se iguale con la oferta total de dinero conlleva que

$$2nwp_t/3 = nwp_{t-1}/3\ .$$

Es decir, $p_t = p_{t-1}/2$.

La fórmula (1) permite realizar sencillos ejercicios de estática comparativa.

(i) La derivada parcial $\frac{\partial p_t}{\partial \mathrm{M}}$ de p_t con respecto a M es positiva: $\frac{\partial p_t}{\partial \mathrm{M}} = 3/nw2^t\ > 0$. Este resultado comporta que aumentos de la cantidad de dinero produzcan aumentos del nivel de precios.

(ii) La derivada parcial $\frac{\partial p_t}{\partial n}$ de p_t con respecto a n es negativa: $\frac{\partial p_t}{\partial n} = -\frac{3\mathrm{M}}{n^2 w 2^t} < 0$. Interpretación: un aumento de la población causa una reducción del nivel de precios (en la práctica, más gente con la misma cantidad de dinero es como tener la misma gente con menor cantidad de dinero).

(ii) La derivada parcial $\frac{\partial p_t}{\partial w}$ de p_t con respecto a w es negativa: $\frac{\partial p_t}{\partial n} = -\frac{3\mathrm{M}}{nw^2 2^t} < 0$. Ello indica que un aumento de la riqueza de los jóvenes provoca una reducción del nivel de precios: con más bien hay más capacidad de comprar dinero, su valor subirá y el inverso de este valor (el nivel de precios) caerá.

Ejercicios

1. Resuelve las cuestiones 1 y 2 con funciones de utilidad $u(c,\ c',m) = c^\alpha \cdot\ (c')^\beta \cdot m^{1-\alpha-\beta}$ y $u'(c',m') = (c')^\gamma \cdot (m')^{1-\gamma}$, donde α, β y γ son constantes positivas.

2. Con los datos originales, contesta las cuestiones 1 y 2 si, cada período, los jóvenes saquean las tumbas de los mayores fallecidos en el período inmediatamente anterior y se reparten a partes iguales la cantidad de dinero total que atesoraron los mayores en sus tumbas.

3. Con los datos originales, contesta las cuestiones 1 y 2 si, cada período, la cantidad M de dinero se distribuye de manera igualitaria entre los mayores del período.

4. Con los datos originales, contesta las cuestiones 1 y 2 si, cada período, la cantidad $k^t \cdot \mathrm{M}$ de dinero se distribuye de manera igualitaria entre los mayores del período, en donde k es una constante positiva.

5. Resuelve el ejercicio 4 con las funciones de utilidad del ejercicio 1.

6. Con los datos originales, contesta las cuestiones 1 y 2 si, cada período, hay una proporción μ de jóvenes con función de utilidad $u(c,\ c',m) = c \cdot c' \cdot m$ y la proporción restante tiene la función de utilidad $u(c,c') = c \cdot c'$.

7. Resuelve el ejercicio 6 si, además, hay una proporción μ' de mayores con función de utilidad $u(c',m') = c' \cdot m'$ y la proporción restante tiene la función de utilidad $u(c') = c'$.