Exemple del model de generacions encavalcades amb deute públic

Descripció de l'economia

1. Cada unitat de bé només pot existir en un període de temps.

2. Totes les generacions $t \geq 1$ són idèntiques. Cada generació està formada per dos grups: G1 i G2. Cada grup té n membres.

3. La dotació de cada membre de G1 és $(w,\ w)$. La dotació de cada membre de G2 és $(\delta \cdot w,\ 0)$, on $w > 0$ i $\delta > 1$. El paràmetre δ mesura quantes vegades un individu jove de G2 és més ric que un individu jove de G1.

4. La funció d'utilitat de cada individu i jove en el període t és $u_i(t) = c_i(t) \cdot c_i(t+1)$.

Qüestió 1. Determina l'equilibri general competitiu de l'economia.

• **Hi ha dos mercats en aquesta economia**: el mercat (de consum) del bé i el mercat de préstecs (del bé). Tots dos s'assumeixen competitius.

La condició d'equilibri del mercat del bé en el període t diu que el consum total del bé en el període t coincideix amb la dotació total del bé en el mateix període t.

Amb $i \in \{1, 2\}$, es designa per c_i el consum que, en t, fa un membre jove del grup Gi i per $c_i{}'$ el consum que, en t, fa un membre gran del grup Gi.

El consum total en t és el consum que en t fan els joves de cada grup $(n \cdot c_1 + n \cdot c_2)$ més el consum que en t fan els grans de cada grup $(n \cdot c_1{}' + n \cdot c_2{}')$.

La dotació total de bé en t és la dotació dels joves $(n \cdot w + n \cdot \delta \cdot w)$ més la dotació dels grans $(n \cdot w)$.

En resum, la **condició d'equilibri del mercat del bé** és

$$n \cdot c_1 + n \cdot c_2 + n \cdot c_1{}' + n \cdot c_2{}' = n \cdot w + n \cdot \delta \cdot w + n \cdot w$$

o, simplificant,

$$\boxed{c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)\,.}$$

La condició d'equilibri del mercat de préstecs en el període t diu que l'oferta total de préstecs en el període t coincideix amb la demanda total de préstecs en el mateix període t.

Amb $i \in \{1,2\}$, es designa per l_i la quantitat de bé que, en t, un membre jove del grup Gi es decideix a prestar o manllevar en el mercat de préstecs.

Quan $l_i > 0$ s'interpreta que l'individu i presta el (ofereix un préstec del) bé (i fa de prestador). Quan $l_i < 0$ s'interpreta que l'individu i manlleva el (demanda un préstec del) bé (i fa de prestatari).

Per a què existeixi el mercat de préstecs calen dues condicions. Primera, no tenir $l_1 = 0$ o $l_2 = 0$. Tenir $l_i = 0$ equival a què els membres del grup Gi no estan interessats a participar al mercat. Segona, que els signes d'l_1 i l_2 siguin diferents: els individus representatius de cada grup no poden ser tots dos prestadors ($l_i > 0$) o tots dos prestataris ($l_i < 0$).

La quantitat total de bé que presta o manlleva G1 és

$$n \cdot l_1.$$

La quantitat total de bé que presta o manlleva G2 és

$$n \cdot l_2.$$

Un dels valors serà positiu i representarà l'oferta total de préstecs. L'altre valor serà negatiu i representarà (en valor absolut) la demanda total de préstecs. D'aquí que, en l'equilibri del mercat de préstecs,

$$n \cdot l_1 = -n \cdot l_2$$

o, equivalentment,

$$n \cdot l_1 + n \cdot l_2 = 0\,.$$

La simplificació de l'equació anterior defineix la **condició d'equilibri del mercat de préstecs**:

$$\boxed{l_1 + l_2 = 0\,.}$$

• En l'equilibri general competitiu de l'economia, tots dos mercats estan en equilibri. Però per a determinar l'equilibri general una de les dues equacions que defeneixen les condicions d'equilibri és redundant.

L'objectiu ara és comprovar que cada condició d'equilibri implica l'altra:

$$c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta) \quad \Leftrightarrow \quad l_1 + l_2 = 0\,.$$

Les restriccions pressupostàries dels membres de G1 són (on R és la taxa d'interès bruta en el mercat de préstecs)

$$\begin{array}{ll} \text{de jove} & c_1 + l_1 = w \\ \text{de gran} & c_1' = w + R \cdot l_1\,. \end{array}$$

Per tant,

$$c_1 = w - l_1\,.$$

Les restriccions pressupostàries dels membres de G2 són (on $\delta > 1$ és el grau de desigualtat de la renda dels grups de joves)

$$\begin{array}{ll} \text{de jove} & c_2 + l_2 = \delta \cdot w \\ \text{de gran} & c_2' = R \cdot l_2\,. \end{array}$$

Per consegüent,

$$c_2 = \delta \cdot w - l_2\,.$$

La conclusió és que

$$c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = (w - l_1) + (\delta \cdot w - l_2) + (w + R \cdot l_1) + R \cdot l_2$$

o, reordenant,

$$c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta) + (R - 1) \cdot (l_1 + l_2)\,. \tag{1}$$

Primera part de la demostració de l'equivalència: **equilibri en el mercat de préstecs implica equilibri en el mercat del bé**.

Formalment, es tracta de demostrar que $(l_1 + l_2 = 0) \Rightarrow \big(c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)\big)$. A tal efecte, suposem que $l_1 + l_2 = 0$. Per (1), el terme $(R - 1) \cdot (l_1 + l_2)$ s'anul·la. El resultat és que $c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)$, que és la condició d'equilibri del mercat del bé.

Segona part de la demostració de l'equivalència: **equilibri en el mercat del bé implica equilibri en el mercat de préstecs**.

Ara cal provar que $\big(c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)\big) \Rightarrow (l_1 + l_2 = 0)$. Així que suposem que $c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)$. Per (1) es conclou que $(R - 1) \cdot (l_1 + l_2) = 0$. Dos casos són possibles.

Cas 1: $R \neq 1$. Aleshores, $(R-1)\cdot(l_1+l_2)=0$ implica $l_1+l_2=0$, que és la condició d'equilibri del mercat de préstecs.

Cas 2: $R=1$. Aquest cas obriria la possibilitat de tenir $c_1+c_2+c_1'+c_2'=w\cdot(2+\delta)$ (equilibri en el mercat del bé) però $l_1+l_2\neq 0$ (desequilibri en el mercat de préstecs). Per a descartar aquesta possibilitat, cal invocar la presumpció que totes les variables ($c_1, c_2,\ l_1, l_2, \dots$) objectes de decisió dels individus són determinades mitjançant un procés de maximització de la utilitat dels individus. De fet, $R=1$ vol dir que prestar (manllevar) una unitat del bé en t significa rebre (pagar) una en $t+1$. Els membres de G1 tenen la mateixa quantitat del bé en t i $t+1$. A més, valoren de la mateixa manera una unitat de consum en t que en $t+1$. Com a conseqüència, la maximització de la seva funció d'utilitat fa que no estiguin interessats a participar en el mercat de préstecs: la seva utilitat ja és màxima amb la dotació que tenen. Atès que $l_1=0$, la conclusió d'aquest raonament és que no hi ha mercat de préstecs. Això contradiu la hipòtesis que el mercat de préstecs existeix.

Havent quedat demostrat que, per a calcular l'equilibri general tant pot fer servir-se

$$l_1+l_2=0$$

com

$$c_1+c_2+c_1'+c_2'=w\cdot(2+\delta)$$

adoptem la primera condició.

Per a fer-la operativa cal determinar l_1 i l_2. Aquests valors s'obtenen de la maximització d'utilitat de cada individu sotmesa a la seva restricció pressupostària vital.

• Grup G1

Les restriccions pressupostàries dels membres de G1 són

de jove	$c_1+l_1=w$
de gran	$c_1'=w+R\cdot l_1$.

Aïllant l_1 a la segona restricció, $l_1=\frac{c_1'}{R}-\frac{w}{R}$. Substituint a la primera, s'obté la restricció pressupostària vital:

$$c_1+\frac{c_1'}{R}=w+\frac{w}{R}\,. \qquad (2)$$

Cada membre de G1 tria el parell (c_1, c_1') que maximitza $u_1=c_1\cdot c_1'$ sotmès a (2).

Aquest problema es pot resoldre mitjançant el lagrangià

$$L_1 = c_1 \cdot c_1' + \lambda \cdot \left(w + \frac{w}{R} - c_1 - \frac{c_1'}{R} \right).$$

Les condicions de primer ordre són:

$$0 = \frac{\partial L_1}{\partial c_1} = c_1' - \lambda \qquad 0 = \frac{\partial L_1}{\partial c_1'} = c_1 - \frac{\lambda}{R} \qquad 0 = \frac{\partial L_1}{\partial \lambda} = w + \frac{w}{R} - c_1 - \frac{c_1'}{R}.$$

De la primera condició, $\lambda = c_1'$. Substituint a la segona, $c_1 = \frac{c_1'}{R}$. Substituint a la tercera, $0 = w + \frac{w}{R} - c_1 - c_1$. En conclusió, la **funció de demanda de consum d'un individu jove de G1** és

$$\boxed{c_1 = \frac{w}{2} + \frac{w}{2 \cdot R}.}$$

De la restricció pressupostària de jove $c_1 + l_1 = w$ se'n dedueix que $l_1 = w - c_1$. Per tant, la **funció de demanda neta de préstecs d'un individu jove de G1** és

$$\boxed{l_1 = \frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}.}$$

En concret, la funció l_1 s'interpreta com a funció de demanda si $l_1 < 0$ i com a funció d'oferta si $l_1 > 0$.

Definint la funció d'estalvi d'un individu (jove) com la seva dotació (de jove) que resta disponible un cop s'han pagat els imposts i rebudes les transferències (de moment imposts a pagar i transferències a rebre són zero) menys el seu consum, resulta que la **funció d'estalvi d'un individu jove de G1** és $s_1 = w - c_1$. Aquesta funció, en aquest cas, coincideix amb la funció d'oferta de préstecs.

$$\boxed{s_1 = \frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}}$$

• Grup G2

Les restriccions pressupostàries dels membres de G2 són

de jove	$c_2 + l_2 = \delta \cdot w$
de gran	$c_2' = R \cdot l_2$.

Aïllant l_2 a la segona restricció, $l_2 = c_2'/R$. Substituint a la primera, s'obté la restricció pressupostària vital:

$$c_2 + \frac{c_2'}{R} = \delta \cdot w\,. \tag{3}$$

Cada membre de G2 tria el parell (c_2, c_2') que maximitza $u_1 = c_1 \cdot c_1'$ sotmès a (3). Aquest problema es pot resoldre mitjançant el lagrangià

$$L_2 \;=\; c_2 \cdot c_2' \;+\; \lambda \cdot \left(\delta \cdot w \;-\; c_2 \;-\; \frac{c_2'}{R}\right).$$

Les condicions de primer ordre són:

$$0 = \frac{\partial L_2}{\partial c_2} = c_2' - \lambda \qquad 0 = \frac{\partial L_2}{\partial c_2'} = c_2 - \frac{\lambda}{R} \qquad 0 = \frac{\partial L_2}{\partial \lambda} = \delta \cdot w - c_2 - \frac{c_2'}{R}.$$

De la primera condició, $\lambda = c_2'$. Substituint a la segona, $c_2 = \frac{c_2'}{R}$. Substituint a la tercera, $0 = \delta \cdot w - c_2 - c_2$. En resum, la **funció de demanda de consum d'un individu jove de G2** és

$$\boxed{c_2 = \frac{\delta \cdot w}{2}.}$$

De la restricció pressupostària de jove $c_2 + l_2 = \delta \cdot w$ se'n dedueix que $l_2 = \delta \cdot w - c_2$. Així doncs, la **funció de demanda neta de préstecs d'un individu jove de G2** és

$$\boxed{l_2 = \frac{\delta \cdot w}{2}.}$$

En aquest cas, atès que l_2 pren sempre un valor positiu, s'interpreta l_2 com a funció d'oferta de préstecs. La **funció d'estalvi d'un individu jove de G2** és $s_2 = \delta \cdot w - c_2$, que coincideix amb la funció l_2.

• Càlcul de l'equilibri general

La variable clau en l'equilibri general és el preu R d'un préstec.

[El preu del bé es pot interpretar que està sempre normalitzat a la unitat perquè, en cada període, només hi ha un bé amb què expressar els preus. En canvi, el preu d'un préstec no pot ser sempre normalitzat a u perquè R és un preu relatiu entre el bé en el període t i el bé en el període $t + 1$. La possibilitat de tenir el mateix bé en dos moments del temps implica, a la pràctica, tenir dos béns. Els béns es diferencien per les seves característiques i la seva disponibilitat temporal és una d'elles.]

El valor d'R el determina la condició d'equilibri del mercat de préstecs: $l_1 + l_2 = 0$. Atès que $l_1 = s_1$ i $l_2 = s_2$, la condició d'equilibri del mercat de préstecs és equivalent a $s_1 + s_2 = 0$. Aquesta és equivalent a $n \cdot (s_1 + s_2) = 0$. El terme $n \cdot (s_1 + s_2)$ representa l'estalvi agregat S de tots els individus en cada període. Per aquesta raó, també podria fer-se servir la condició

$$S = 0$$

per a calcular el valor d'R en l'equilibri general.

Recuperant la condició $l_1 + l_2 = 0$, en l'equilibri general

$$\left(\frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}\right) + \frac{\delta \cdot w}{2} = 0$$

Aïllant R, s'obté el valor de la **taxa d'interès bruta en l'equilibri general**:

$$\boxed{R = \frac{1}{1 + \delta}.}$$

És de destacar que R no depèn de la riquesa o dotació w. Tampoc no depèn de la dimensió comuna n dels grups. El paràmetre δ és una mesura de la desigualtat entre la riquesa d'un jove de G2 (el més ric) i un jove de G1. En particular, R cau quan la desigualtat de riquesa entre el dos grups s'incrementa $\left(\frac{\partial R}{\partial \delta} = -\frac{1}{(1+\delta)^2} < 0\right)$.

Un cop determinada R, es poden calcular la resta de variables que defineixen l'equilibri general: c_1, c_2, c_1' i c_2' (recordant que $c_1 = \frac{c_1'}{R}$ i que $c_2 = \frac{c_2'}{R}$).

$$c_1 = \frac{w}{2} + \frac{w}{2 \cdot R} = w + \frac{\delta \cdot w}{2} = \frac{w}{2} \cdot (2 + \delta)$$

$$c_2 = \frac{\delta \cdot w}{2}$$

$$c_1' = c_1 \cdot R = \frac{w \cdot (2 + \delta)}{2} \cdot \frac{1}{1 + \delta} = \frac{w}{2} \cdot \left(\frac{2 + \delta}{1 + \delta}\right)$$

$$c_2' = c_2 \cdot R = \frac{\delta \cdot w}{2} \cdot \frac{1}{1 + \delta} = \frac{w}{2} \cdot \left(\frac{\delta}{1 + \delta}\right)$$

Aquests resultats indiquen que un increment de la desigualtat (del paràmetre δ) fa

(i) augmentar el consum dels joves, ja que $\frac{\partial c_1}{\partial \delta} = \frac{w}{2} > 0$ i $\frac{\partial c_2}{\partial \delta} = \frac{w}{2} > 0$;

(ii) disminuir el consum dels grans del grup G1 de joves pobres, atès que

$$\frac{\partial c_1{}'}{\partial \delta} = -\frac{w}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^2 = -\frac{w \cdot R^2}{2} < 0$$

(iii) però augmentar el consum dels grans del grup G2 de joves rics, en la mesura que

$$\frac{\partial c_2{}'}{\partial \delta} = \frac{w}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^2 = \frac{w \cdot R^2}{2} > 0\,.$$

Qüestió 2. Suposem que la situació analitzada en la Qüestió 1 és vàlida per al període $t = 0$. En $t = 1$, el govern de l'economia crea un mercat de bons públics amb l'objectiu d'aconseguir G unitats del bé de la venda de bons. El govern accepta que el preu p del bo es determini competitivament (p s'expressa en unitats del bé per bo). Cada bo emès en $t = 1$ representa la promesa de pagament d'una unitat del bé en $t = 2$ al comprador del bo. El govern distribueix els ingressos de la venda de bons igualitàriament entre tots els grans del període $t = 1$. Quin és l'equilibri general de l'economia en $t = 1$ assumint que la rendibilitat del bo és igual a la rendibilitat del préstec del bé?

• **En $t = 1$ hi ha tres mercats en l'economia**: mercat del bé, mercat de préstecs (privats) i mercat del bo (o mercat de préstecs públics o mercat de deute públic).

Les condicions d'equilibri del mercat del bé i del mercat de préstecs continuen sent vàlides:

$$c_1 + c_2 + c_1' + c_2' = w \cdot (2 + \delta)$$

$$l_1 + l_2 = 0.$$

La condició d'equilibri del mercat del bo estableix que la quantitat total B de bons emesos pel govern ha de ser igual a la quantitat total demandada del bons. Sigui b_i la funció de demanda del bo de cada membre del grup Gi. L'equilibri en el mercat del bo requereix

$$n \cdot (b_1 + b_2) = B.$$

o

$$b_1 + b_2 = \frac{B}{n}\,.$$

La hipòtesi que els ingressos per l'emissió dels B bons financen la despesa G implica

$$p \cdot B = G\,.$$

Aleshores, $B = \frac{G}{p}$ i la condició $n \cdot (b_1 + b_2) = B$ esdevé

$$n \cdot (b_1 + b_2) = \frac{G}{p}$$

o

$$p \cdot n \cdot (b_1 + b_2) = G\,.$$

Sumant aquesta condició amb la condició d'equilibri en el mercat de préstecs, expressada com $n \cdot (l_1 + l_2) = 0$,

$$n \cdot (l_1 + l_2) + p \cdot n \cdot (b_1 + b_2) = G$$

o

$$n \cdot (l_1 + l_2) + p \cdot n \cdot (b_1 + b_2) = p \cdot B$$

o

$$n \cdot (l_1 + p \cdot b_1) + n \cdot (l_2 + p \cdot b_2) = p \cdot B\,. \tag{4}$$

El terme $p \cdot B$ és el valor de l'emissió del bo: el preu de cada bo pel total de bons emesos. És òbviament l'import G a finançar. Per a interpretar el costat esquerre de (4) cal reconstruir les restriccions pressupostàries dels individus.

Les restriccions pressupostàries dels membres de G1 són (on $p \cdot b_1$ representa la despesa en compra de bons)

de jove	$c_1 + l_1 + p \cdot b_1 = w$
de gran	$c_1' = w + R \cdot l_1 + b_1$.

D'aquí que

$$c_1 = w - l_1 - p \cdot b_1\,.$$

La funció d'estalvi corresponent és

$$s_1 = w - c_1 = l_1 + p \cdot b_1\,.$$

La funció d'estalvi agregada dels membres de G1 és

$$S_1 = n \cdot s_1 = n \cdot (l_1 + p \cdot b_1)\,.$$

Les restriccions pressupostàries dels membres de G2 són

$$\text{de jove} \qquad c_2 + l_2 + p \cdot b_2 = \delta \cdot w$$
$$\text{de gran} \qquad c_2' = R \cdot l_2 + \boldsymbol{b_2}.$$ **[Gràcies a l'Ana Campos]**

Així,

$$c_2 = \delta \cdot w - l_2 - p \cdot b_2$$

$$s_2 = \delta \cdot w - c_2 = l_2 + p \cdot b_2$$

$$S_2 = n \cdot s_2 = n \cdot (l_2 + p \cdot b_2)\,.$$

De tot plegat se segueix que el costat esquerre $n \cdot (l_1 + p \cdot b_1) + n \cdot (l_2 + p \cdot b_2)$ de (4) és l'estalvi agregat de l'economia $S = S_1 + S_2$. En resum, la condició (4) diu que

$$\boxed{S = p \cdot B}$$

això és, **l'estalvi agregat ha de finançar l'emissió de bons**.

Caldria ara demostrar que $S = p \cdot B$ captura totes les condicions d'equilibri dels mercats. És a dir, si $S = p \cdot B$ aleshores tots els mercats estan en equilibri i, a la inversa, si tots els mercats estan en equilibri, llavors $S = p \cdot B$.

La implicació "tots els mercats en equilibri $\Rightarrow$ $S = p \cdot B$" ja s'ha demostrat implícitament. Per la llei de Walras, amb tres mercats, si dos estan en equilibri, aleshores el tercer també està en equilibri. Considerem els mercats de préstecs i del bo. Les seves condicions d'equilibri són $n \cdot (l_1 + l_2) = 0$ i $p \cdot n \cdot (b_1 + b_2) = p \cdot B$. De la suma d'aquesta dues equacions n'ha resultat prèviament la condició $S = p \cdot B$.

Per a demostrar la implicació "$S = p \cdot B$ $\Rightarrow$ tots els mercats en equilibri" és convenient expressar (4) com (5).

$$(l_1 + l_2) + p \cdot (b_1 + b_2) = p \cdot \frac{B}{n} \tag{5}$$

Cal verificar que si aquesta condició es compleix: (i) $l_1 + l_2 = 0$ (equilibri en el mercat de préstecs); i (ii) $b_1 + b_2 = \frac{B}{n}$ (equilibri en el mercat del bo). Per la llei de Walras, si aquests dos mercats es troben en equilibri, el tercer mercat (el del bé) també estarà en equilibri.

La demostració es farà pel mètode de demostració per contradicció (*reductio ad absurdum*): si assumir $l_1 + l_2 \neq 0$ porta a una contradicció, llavors la hipòtesi $l_1 + l_2 \neq 0$ ha de ser falsa i, per consegüent, la seva negació $l_1 + l_2 = 0$ serà una afirmació certa.

Assumint (5), suposem que $l_1 + l_2 \neq 0$. Hi ha dues possibilitats.

Cas 1: $l_1 + l_2 < 0$. Això fa que, per (5),

$$p \cdot (b_1 + b_2) > p \cdot \frac{B}{n}$$

o bé

$$n \cdot (b_1 + b_2) > B \, .$$

El terme $n \cdot (b_1 + b_2)$ és el nombre total de bons comprats. És obvi que aquest número no pot ser superior al nombre total de bons emesos B. D'aquesta contradicció es conclou que $l_1 + l_2 < 0$ no pot ser cert en presència de (5). Així doncs, (5) implica $l_1 + l_2 \geq 0$.

Cas 2: $l_1 + l_2 > 0$. En aquest cas se segueix de (5) que

$$n \cdot (b_1 + b_2) < B \, .$$

Tenir $l_1 + l_2 > 0$ significa que hi ha un excés d'oferta de préstecs en el mercat de préstecs. Tenir $n \cdot (b_1 + b_2) < B$ vol dir que hi ha un excés d'oferta del bo en el mercat del bo. L'excés d'oferta en el mercat del bo equival a un excés de demanda de préstecs del govern.

Ara cal invocar la hipòtesi d'igualtat entre la rendibilitat d'un préstec i d'un bo. Aquesta igualtat comporta que qui ofereix bé en préstec està indiferent entre fer-ho mitjançant un préstec privat o fer-ho mitjançant la compra del bo. Que existeixi un excés d'oferta de préstecs en el mercat de préstecs implica que algun individu voldria prestar alguna unitat del bé i no pot fer-ho en el mercat de préstecs. Però per la indiferència entre prestar a un altre individu o comprar un bo del govern porta a què aquest individu estigui disposat a comprar el bo.

Com a resultat, un excés d'oferta en el mercat de préstecs no pot coexistir amb un dèficit de demanda del bo. Si l'excés d'oferta és més gran que el dèficit de demanda, aquest dèficit s'eliminaria perquè els prestadors que no troben prestatari al mercat de préstecs comprarien el bo: s'arribaria a $l_1 + l_2 > 0$ amb $n \cdot (b_1 + b_2) = B$, la qual cosa contradiu (5).

Si l'excés d'oferta és més petit que el dèficit de demanda, el mateix procés elimarà l'excés, quedant només un residu del dèficit de demanda original. Aquesta situació portaria a tenir $l_1 + l_2 = 0$ i $n \cdot (b_1 + b_2) < B$. Això també contradiu (5).

Si excés i dèficit són iguals, la migració de prestadors cap al mercat del bo farà dissoldre l'excés i el dèficit. En aquest cas, $l_1 + l_2 = 0$ i $n \cdot (b_1 + b_2) = B$. La contradicció provindrà del fet que es va assumir $l_1 + l_2 > 0$ era compatible amb la maximització d'utilitat dels que són prestadors en el mercat de préstecs.

La conclusió última és que $l_1 + l_2 \neq 0$ condueix a una contradicció. Com una proposició certa no pot generar una contradicció, $l_1 + l_2 \neq 0$ ha de ser una proposició falsa. Per consegüent, la seva negació $l_1 + l_2 = 0$ és certa. En tenir $l_1 + l_2 = 0$, el mercat de préstecs es troba en equilibri. Per (5), $l_1 + l_2 = 0$ implica $n \cdot (b_1 + b_2) = B$, que representa l'equilibri en el mercat del bo. Queda així demostrat que **tots els mercats estan en equilibri si, i només si, $\boldsymbol{S = p \cdot B}$**.

• Càlcul de l'equilibri general

Les variables clau en el càlcul de l'equilibri general són are el preu R d'un préstec i el preu p d'un bo.

La rendibilitat d'un bo és $\frac{1}{p}$: el bo dóna en $t = 2$ una unitat del bé a canvi de pagar p unitats en $t = 1$ pel bo. La rendibilitat del préstec és R. La hipòtesi d'igualtat de rendibilitats fa que

$$\frac{1}{p} = R\,. \tag{6}$$

Per aquest motiu, tot tornar a reduir-se a determinar el valor d'R en l'equilibri general. Què canvia respecte del càlcul de l'equilibri de la Qüestió 1? Essencialment, només que la condició d'equilibri passa de ser $S = 0$ a ser $S = p \cdot B$ (de fet, $B = 0$ en $t = 0$). Comprovem-ho.

Per a fer operativa la condició $S = p \cdot B$, o $n \cdot (s_1 + s_2) = p \cdot B$, cal determinar les funcions d'estalvi s_1 i s_2. Aquestes provenen de la maximització de la funció d'utilitat de cada individu sotmesa a la restricció pressupostària vital corresponent.

• Grup G1

Les restriccions pressupostàries dels membres de G1 són

$$\begin{array}{ll} \text{de jove} & c_1 + \overbrace{l_1 + p \cdot b_1}^{s_1} = w \\ \text{de gran} & c_1' = w + R \cdot l_1 + b_1\,. \end{array}$$

Aïllant l_1 a la segona restricció, $l_1 = \frac{c_1'}{R} - \frac{w+b_1}{R}$. Substituint a la primera, s'obté la restricció pressupostària vital:

$$c_1 + \frac{c_1'}{R} = w + \frac{w}{R} + b_1 \cdot \left(\frac{1}{R} - p\right). \tag{7}$$

Gràcies a (6), $\frac{1}{R} - p = 0$. Com a conseqüència d'això, (7) equival a (2). Per a aquest motiu, les relacions trobades en la Qüestió 1 continuen sent vàlides.

$$c_1 = \frac{w}{2} + \frac{w}{2 \cdot R}$$

$$c_1' = c_1 \cdot R$$

$$s_1 = \frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}$$

L'única diferència substancial és que les expressions que defineixen s_1 i l_1 ja no són iguals. Abans, l'única manera de materialitzar l'estalvi era mitjançant un préstec; ara l'estalvi també es pot canalitzar cap a la compra del bo.

De la restricció pressupostària $c_1 + l_1 + p \cdot b_1 = w$ d'un jove, $w - c_1 = l_1 + p \cdot b_1$. Atès que, per definició, $s_1 = w - c_1$, s'obté

$$s_1 = l_1 + p \cdot b_1 \,.$$

Amb tot, aquesta no és una expressió vàlida de la funció d'estalvi perquè l_1 i b_1 són variables endògenes (decidides per cada membre del grup G1). L'expressió vàlida és $s_1 = \frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}$, ja que expressa l'estalvi en funció de variables que són exògenes per a l'individu que estalvia: la dotació w ve donada i la taxa R es determina en un mercat on l'individu és preu-acceptant.

• Grup G2

Les restriccions pressupostàries dels membres de G2 són

$$\begin{array}{ll} \text{de jove} & c_2 + \overbrace{l_2 + p \cdot b_2}^{s_2} = \delta \cdot w \\ \text{de gran} & c_2' = R \cdot l_2 + b_2 \,. \end{array}$$

Aïllant l_2 a la segona restricció, $l_2 = \frac{c_1' - b_2}{R}$. Substituint a la primera, s'obté la restricció pressupostària vital:

$$c_2 + \frac{c_2'}{R} = \delta \cdot w + \ b_2 \cdot \left(\frac{1}{R} - p\right). \tag{8}$$

Com en el cas del grup G1, per (6), $\frac{1}{R} - p = 0$. Això fa que (8) equivalgui a (3) i que les relacions trobades en la Qüestió 1 siguin vàlides.

$$c_2 = \frac{\delta \cdot w}{2}$$

$$c_2{}' = c_2 \cdot R$$

$$s_2 = \frac{\delta \cdot w}{2}$$

També com en el cas del grup G1, l'expressió que defineix l_2 (en funció de variables exògenes i paràmetres) no coincideix (si més no, d'entrada) amb la que defineix s_2. En concret, prenent la restricció pressupostària $c_2 + l_2 + p \cdot b_2 = \delta \cdot w$ d'un jove, $\delta \cdot w - c_2 = l_2 + p \cdot b_2$. Donat que, per definició, $s_2 = \delta \cdot w - c_2$, es conclou que

$$s_2 = l_2 + p \cdot b_2 \,.$$

Novament, hi ha dos (potencials) fonts d'estalvi: préstecs fets i bons adquirits.

Recapitulant, la funció d'estalvi agregada és la mateixa que sense el mercat de bons:

$$S = n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = n \cdot \left(\left(\frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}\right) + \frac{\delta \cdot w}{2}\right).$$

Sabent que $p \cdot B = G$, la condició $S = p \cdot B$ es transforma en

$$n \cdot \left(\left(\frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}\right) + \frac{\delta \cdot w}{2}\right) = G\,.$$

Aïllant R, s'obté el valor de la **taxa d'interès bruta en l'equilibri general**.

$$\boxed{R = \frac{n \cdot w}{(1+\delta) \cdot n \cdot w - 2 \cdot G} = \frac{1}{1 + \delta - \frac{2 \cdot G}{n \cdot w}}}$$

Sense el mercat del bo, $R = \frac{1}{1+\delta}$. Degut a què $1 + \delta - \frac{2 \cdot G}{n \cdot w} < 1 + \delta$, **el nou valor d'$R$ és més gran que el valor sense el mercat del bo**. És el que caldria esperar atès que el govern esdevé un prestatari més: més demanda agregada de préstecs, taxa d'interès superior.

La introducció del mercat del bo té un efecte secundari interessant: ara R passa a dependre de la dotació w i de la grandària n dels grups. En concret,

$$\uparrow n \ \text{ o } \uparrow w \ \Rightarrow \ \downarrow \frac{2 \cdot G}{n \cdot w} \ \Rightarrow \ \uparrow 1 + \delta - \frac{2 \cdot G}{n \cdot w} \ \Rightarrow \ \downarrow R \, .$$

L'efecte sobre R de la demanda de finançament del govern també és el que caldria esperar: com més demanda de finançament faci el govern, més pujarà la taxa d'interès.

$$\uparrow G \ \Rightarrow \ \uparrow \frac{2 \cdot G}{n \cdot w} \ \Rightarrow \ \downarrow 1 + \delta - \frac{2 \cdot G}{n \cdot w} \ \Rightarrow \ \uparrow R$$

Amb l'expressió que defineix R es poden determinar les expressions que caracteritzen la resta de variables endògenes: c_1, c_2, c_1', c_2', p, B, l_1, l_2, b_1 i b_2. Per a facilitar la comparació amb la situació sense mercat del bo, sigui

$$\delta' = \delta - \frac{2 \cdot G}{n \cdot w}$$

amb la qual cosa, en $t = 1$,

$$R = \frac{1}{1 + \delta'} \, .$$

Aplicant la nova notació, i tenint present que $\delta' < \delta$, s'obtenen els següents resultats.

$\boldsymbol{t = 0}$	$\boldsymbol{t = 1}$
$R^0 = \dfrac{1}{1+\delta}$	$R^1 = \dfrac{1}{1+\delta'} > R^0$
$c_1^0 = \dfrac{w}{2} \cdot (2 + \delta)$	$c_1^1 = \dfrac{w}{2} \cdot (2 + \delta') < c_1^0$
$c_1'^0 = \dfrac{w}{2} \cdot \left(\dfrac{2+\delta}{1+\delta}\right)$	$c_1'^1 = \dfrac{w}{2} \cdot \left(\dfrac{2+\delta'}{1+\delta'}\right) > c_1'^0$
$c_2^0 = \dfrac{\delta \cdot w}{2}$	$c_2^1 = \dfrac{\delta \cdot w}{2} = c_2^0$
$c_2'^0 = \dfrac{w}{2} \cdot \left(\dfrac{\delta}{1+\delta}\right)$	$c_2'^1 = \dfrac{w}{2} \cdot \left(\dfrac{\delta}{1+\delta'}\right) > c_2'^0$
$u_1^0 = c_1^0 \cdot c_1'^0 = \dfrac{(w \cdot (2+\delta))^2}{4 \cdot (1+\delta)}$	$u_1^1 = c_1^1 \cdot c_1'^1 = \dfrac{(w \cdot (2+\delta'))^2}{4 \cdot (1+\delta')} < u_1^0$
$u_2^0 = c_2^0 \cdot c_2'^0 = \dfrac{w^2 \cdot \delta^2}{4 \cdot (1+\delta)}$	$u_2^1 = c_2^1 \cdot c_2'^1 = \dfrac{w^2 \cdot \delta^2}{4 \cdot (1+\delta')} > u_2^0$

La incorporació del govern al grup de prestataris té efectes secundaris sobre la distribució del consum i la utilitat. En primer lloc, la creació del mercat del bo redueix el consum dels joves del grup G1, els prestataris. Això no és sorprenent: amb la puja de la taxa d'interès, els prestataris han de pagar més per un préstec quan són joves. Per contra, el consum dels joves del grup G2, els prestadors, no es modifica: la raó és que el seu consum no depèn de la taxa d'interès. La utilitat del grup G2 augmenta amb la presència del mercat del bo.

Quan els joves es fan grans (en $t = 2$), tots ells augmenten consum i utilitat en relació amb el seu consum i utilitat sense el mercat del bo. En vista de tot plegat, d'una banda, la generació que és jove quan el govern crea el mercat del bo ($t = 1$) no es veu afectada directament per l'ús que el govern fa dels recursos obtinguts de la venda de bons (aquests recursos es transfereixen als que són grans en $t = 1$, que simplement els consumeixen). Però, d'una altra, **la introducció del mercat del bo temporalment (només en $t = 1$) fa indirectament de mecanisme de transferència de benestar dels joves prestataris en el període corrent als que són grans en el següent període (i als prestadors del període corrent)**.

Aquest resultat és paradoxal en el següent sentit. La crítica típica a l'endeutament públic és que s'està passant la factura del consum present a les generacions futures. Seria una mena d'explotació intergeneracional: com que les generacions del futur no tenen veu ni vot en el present, les generacions presents s'aprofiten d'elles carregant-les el finançament del consum present. Malgrat això, en el model considerat, la creació del mercat del bo en $t = 1$ provoca que la generació gran en $t = 2$ estigui millor que no pas sense aquest mercat. Té res a veure que el mercat del bo existeixi només temporalment i no pas permanent?

Pel que fa a p, B, l_1, l_2, b_1 i b_2, s'ha de tenir que

$$l_1 + l_2 = 0$$

$$b_1 + b_2 = \frac{B}{n}$$

$$p = \frac{1}{R} = 1 + \delta'$$

$$B = \frac{G}{p} = G \cdot R = \frac{G}{1 + \delta'}.$$

Recordant que $l_1 + p \cdot b_1 = s_1$ i que $s_1 = \frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}$, se segueix que

$$l_1 + p \cdot b_1 = -\frac{w \cdot \delta'}{2}.$$

Això implica que $l_1 < 0$. Si $l_1 \geq 0$, aleshores cal que $p \cdot b_1 < 0$, la qual cosa requereix un impossible: $b_1 < 0$ (la demanda de bons només pot ser positiva: els individus només poden comprar bons, no vendre'ls). Per $l_1 + l_2 = 0$, $l_1 < 0$ implica $l_2 > 0$.

Per tot l'anterior,

$$p \cdot b_1 = -\frac{w \cdot \delta'}{2} - l_1 = -\frac{w \cdot \delta'}{2} + l_2$$

D'altra banda, atès que $b_1 + b_2 = \frac{B}{n}$, s'obté que $b_1 = \frac{B}{n} - b_2$. Substituint aquesta expressió a l'equació anterior, i sabent que $p = 1 + \delta'$,

$$(1 + \delta') \cdot \left(\frac{B}{n} - b_2\right) = -\frac{w \cdot \delta'}{2} + l_2 \, .$$

Reordenant,

$$l_2 = \frac{B \cdot (1 + \delta')}{n} + \frac{w \cdot \delta'}{2} - (1 + \delta') \cdot b_2 \, . \tag{9}$$

Tot plegat vol dir que **la distribució de la demanda de bons i de préstecs entre els dos grups queda indeterminada en equilibri**. L'equació (9) estableix la condició de la distribució. Primerament es tria un valor de b_2 de la demanda del bo per part del grup G2 (determina quin és el domini de valors admissibles de b_2: el valor més petit d'aquest domini no pot ser inferior a 0 i el valor més gran no pot ser superior a $\frac{B}{n}$). Segon, emprant (9), s'estableix l_2. Tercer, sabent l_2, per la condició $l_1 + l_2 = 0$, s'esbrina l_1. Finalment, per la condició $b_1 + b_2 = \frac{B}{n}$, el valor de b_2 determina el valor de b_1.

Per exemple, sigui $w = 1$, $\delta = 2$, $n = 50$ i $G = 25$. Per tant, $\delta' = 1$. En l'equilibri, $R = 1/2$ i $p = 2$. Verifica que tots els següents casos són compatibles amb l'equilibri.

	b_1	l_1	b_2	l_2
Cas 1	0	$-1/2$	$1/4$	$1/2$
Cas 2	$1/8$	$-3/4$	$1/8$	$3/4$
Cas 3	$1/4$	-1	0	1

Les restriccions que b_1, l_1, b_2 i l_2 han de complir en aquest exemple són, on $p = 2$:

(i) condició d'equilibri del mercat de préstecs $\quad l_1 + l_2 = 0$

(ii) condició d'equilibri del mercat del bo $\quad b_1 + b_2 = \frac{1}{4}$

(iii) distribució de l'estalvi (grup G1) $\quad l_1 + p \cdot b_1 = -\frac{1}{2}\ (= s_1)$

(iv) distribució de l'estalvi (grup G2) $\quad l_2 + p \cdot b_2 = 1\ \ (= s_2)$.

La raó per la qual aquestes quatre equacions no determinen una única assignació de valors a b_1, l_1, b_2 i l_2 és que no són linealment independents: una és redundant (comprova-ho).

Qüestió 3. Continuant amb la Qüestió 2, suposem que el govern no emet més bons en $t = 2$ i liquida el deute públic mitjançant imposts que paguen els joves a parts iguals. Calcula l'equilibri general de l'economia en $t = 2$.

L'objectiu de la qüestió és establir si, malgrat que mercat del bo ja no existeix en $t = 2$, en deixa algun efecte residual. Un sembla clar: la necessitat de pagar el deute.

• Càlcul de l'equilibri general

Tornem al cas on només hi ha dos mercats (la situació tractada en la resposta a la Qüestió 1). Malgrat que en $t = 2$ es produeix el venciment dels bons emesos en $t = 1$, els receptors del pagament són els grans. Aquests individus no participen en el mercat de préstecs i, com a resultat, no incideixen en la determinació d'R.

En canvi, els joves han de finançar, mitjançant imposts, el pagament dels bons. Aquest és l'únic element diferent del model de la Qüestió 1: reducció de les dotacions. Sigui τ l'impost que ha de pagar cada jove. Atès que el govern va emetre $t = 1$ la quantitat $B = G/p = G \cdot R$ de bons, el deute a pagar (en unitats del bé) és també igual a $G \cdot R$ (cada bo emès en $t = 1$ comporta pagar una unitat del bé en $t = 2$). Com que hi ha $2 \cdot n$ joves en $t = 2$ i la distribució de la càrrega impositiva és igualitària, $\tau = \frac{G \cdot R}{2 \cdot n}$, on R és la taxa d'interès d'equilibri del període $t = 1$.

Les restriccions pressupostàries dels membres de G1 són

$$\begin{array}{ll} \text{de jove} & c_1 + l_1 = w - \tau \\ \text{de gran} & c_1' = w + R \cdot l_1 \,. \end{array}$$

El problema és essencialment el mateix al resolt en tractar la Qüestió 1. La solució al problema de maximització d'utilitat és tal que

$$c_1 = \frac{w - \tau}{2} + \frac{w}{2 \cdot R} \qquad\qquad c_1' = c_1 \cdot R \,.$$

Una diferència important és que la funció d'estalvi convé definir-la descomptant l'impost de la dotació: estalvi igual a dotació disponible [= dotació menys impost] menys consum.

$$s_1 = (w - \tau) - c_1 = \frac{w - \tau}{2} - \frac{w}{2 \cdot R} \,.$$

Les restriccions pressupostàries dels membres de G2 són

$$\begin{array}{ll} \text{de jove} & c_2 + l_2 = \delta \cdot w - \tau \\ \text{de gran} & c_2' = R \cdot l_2\,. \end{array}$$

La solució al problema de maximització és tal que

$$c_2 = \frac{\delta \cdot w - \tau}{2} \qquad c_2' = c_2 \cdot R \qquad s_2 = \delta \cdot w - \tau - c_2 = \frac{\delta \cdot w - \tau}{2}.$$

La condició que defineix l'equilibri torna a ser $S = 0$ o $n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = 0$ o $s_1 + s_2 = 0$. Amb $s_1 + s_2 = \left(\frac{w-\tau}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}\right) + \left(\frac{\delta \cdot w - \tau}{2}\right)$, la taxa d'interès d'equilibri és

$$\boxed{R = \frac{w}{w \cdot (1+\delta) - 2 \cdot \tau} = \frac{1}{1 + \delta - \frac{2 \cdot \tau}{w}}\,.}$$

El pagament de l'impost provoca en $t = 2$ un efecte similar sobre la taxa d'interès al que provocà l'emissió del deute en $t = 1$: la taxa d'interès és més alta que la que es produeix sense la intervenció del govern. Un element novedós és que la taxa d'interès d'equilibri, en comparació amb la taxa resultant $R = \frac{1}{1+\delta}$ en el cas corresponent a la Qüestió 1, depèn de la dotació w.

$$\uparrow w \;\Rightarrow\; \downarrow \frac{2 \cdot \tau}{w} \;\Rightarrow\; \uparrow 1 + \delta - \frac{2 \cdot \tau}{w} \;\Rightarrow\; \downarrow R$$

L'impacte de l'impost també s'ajusta al que és d'esperar.

$$\uparrow \tau \;\Rightarrow\; \uparrow \frac{2 \cdot \tau}{w} \;\Rightarrow\; \downarrow 1 + \delta - \frac{2 \cdot \tau}{w} \;\Rightarrow\; \uparrow R$$

Comparem la taxa d'interès $R_2 = \frac{1}{1+\delta-\frac{2 \cdot \tau}{w}}$ en $t = 2$ i la taxa d'interès $R_1 = \frac{1}{1+\delta-\frac{2 \cdot G}{n \cdot w}}$ en $t = 1$.

$$\boxed{R_2 < R_1} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \delta - \frac{2 \cdot \tau}{w}} < \frac{1}{1 + \delta - \frac{2 \cdot G}{n \cdot w}} \Leftrightarrow 1 + \delta - \frac{2 \cdot \tau}{w} > 1 + \delta - \frac{2 \cdot G}{n \cdot w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot G}{n \cdot w} > \frac{2 \cdot \tau}{w} \Leftrightarrow \boxed{G > \tau \cdot n}$$

En paraules: la taxa d'interès cau en el pas de $t = 1$ a $t = 2$ si l'ingrés per l'emissió de bons en $t = 1$ és superior a la meitat de la recaptació impositiva en $t = 2$ (la recaptació total és $\tau \cdot 2 \cdot n$). Com que la condició sembla un pèl esotèrica, recuperem el fet que $\tau = \frac{G \cdot R_1}{2 \cdot n}$. Així, $\tau \cdot n = G \cdot R_1/2$. Per consegüent, $G > \tau \cdot n$ equival a $G > G \cdot R_1/2$ o bé a $R_1 < 2$.

Conclusió: **la desaparició del mercat del bo i la cancel·lació del deute públic mitjançant imposts que paguen els joves fa minvar la taxa d'interès si, i només si, la taxa d'interès quan estava actiu el mercat del bo és inferior a dos** ($R_1 < 2$).

Recordant que $R_1 = \frac{1}{1+\delta-\frac{2 \cdot G}{n \cdot w}}$, la condició $R_1 < 2$ es compleix si, i només si

$$G < \frac{1}{4} \cdot n \cdot w \cdot (1 + 2 \cdot \delta)\,.$$

Aquesta desigualtat imposa un sostre a la despesa (o al valor de l'emissió de deute) que el govern pot realitzar en $t = 1$, si no es vol provocar una alça de la taxa d'interès a resultes del desmantellament del mercat de deute públic. La condició estableix que, com més població o més riquesa, més marge té el govern. El missatge curiós és que **el govern també té més marge per a triar G com més gran sigui la desigualtat** (mesurada pel paràmetre δ) entre els joves dels dos grups.

Qüestió 4. En la situació definida per la Qüestió 2, calcula l'equilibri general de l'economia en $t = 0$ si, en $t = 0$, els joves anticipen l'actuació que el govern durà a terme en $t = 1$.

L'actuació del govern en $t = 1$ que afecta els individus joves en $t = 0$ és la transferència que rebran del govern de grans. Sigui g la transferència que els joves en $t = 0$ expecten rebre en $t = 1$.

Les restriccions pressupostàries dels membres de G1 són

de jove	$c_1 + l_1 = w$
de gran	$c_1' = w + R \cdot l_1 + g$.

La solució al problema de maximització d'utilitat satisfà

$$c_1 = \frac{w}{2} + \frac{w+g}{2 \cdot R} \qquad c_1' = c_1 \cdot R \qquad s_1 = w - c_1 = \frac{w}{2} - \frac{w+g}{2 \cdot R}.$$

Les restriccions pressupostàries dels membres de G2 són

$$\begin{array}{ll} \text{de jove} & c_2 + l_2 = \delta \cdot w \\ \text{de gran} & c_2' = R \cdot l_2 + g. \end{array}$$

La solució al problema de maximització satisfà

$$c_2 = \frac{\delta \cdot w}{2} + \frac{g}{2 \cdot R} \qquad c_2' = c_2 \cdot R \qquad s_2 = \delta \cdot w - c_2 = \frac{\delta \cdot w}{2} - \frac{g}{2 \cdot R}.$$

La condició que defineix l'equilibri general és $S = 0$. Això és, $n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = 0$. De manera equivalent, $s_1 + s_2 = 0$. Amb $s_1 + s_2 = \left(\frac{w}{2} - \frac{w+g}{2 \cdot R}\right) + \left(\frac{\delta \cdot w}{2} - \frac{g}{2 \cdot R}\right)$, la taxa d'interès d'equilibri és

$$\boxed{R = \frac{w + 2 \cdot g}{w \cdot (1 + \delta)} = \frac{1 + \frac{2 \cdot g}{w}}{1 + \delta}\ .}$$

La taxa d'interès quan no s'anticipa l'actuació del govern és $R = \frac{1}{1+\delta}$. Com a conseqüència, la taxa d'interès si es preveu l'actuació del govern és superior a la que taxa quan s'ignora què farà el govern.

Val la pena destacar que la taxa d'interès torna a dependre de la dotació w. D'altra banda, atès que $\frac{\partial R}{\partial w} < 0$ i que $\frac{\partial R}{\partial g} > 0$, la diferència entre la taxa amb anticipació i la taxa sense anticipació es fa més gran com més petita sigui la dotació w i com més gran sigui la transferència expectada g.

Es deixa com a exercici la comparació de consums i utilitats entre les dues situacions, amb i sense anticipació de la política del govern. El fet que la taxa d'interès sigui més alta amb anticipació suggereix que els prestataris surten perdent en relació amb el resultat sense anticipació.

Qüestió 5. Partint de la situació descrita en la Qüestió 2, analitza la dinàmica del deute públic si, des de $t = 2$, l'única política que duu a terme el govern cada període és refinançar el deute públic acumulat emetent més bons.

En aquest cas, la solució de la Qüestió 2 s'hauria d'aplicar a cada període amb l'única diferència que l'import a finançar no és un valor constant G sinó el valor nominal dels bons emesos en el període anterior. En concret, la funció d'estalvi agregat seria la mateixa que s'indica a la pàgina 14: $S = n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = n \cdot \left(\left(\frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R}\right) + \frac{\delta \cdot w}{2}\right)$.

La condició d'equilibri en el període t seria

$$S_t = B_{t-1}$$

on B_{t-1} representa el deute públic a pagar en el període t (coincideix amb el nombre de bons emesos en el període $t-1$).

De la condició d'equilibri

$$n \cdot \left(\left(\frac{w}{2} - \frac{w}{2 \cdot R_t}\right) + \frac{\delta \cdot w}{2}\right) = B_{t-1}\,.$$

Aïllant R_t,

$$\boxed{R_t = \frac{n \cdot w}{n \cdot w \cdot (1+\delta) - 2 \cdot B_{t-1}} = \frac{1}{1 + \delta - \dfrac{2 \cdot B_{t-1}}{n \cdot w}}.} \tag{10}$$

Pel fet que el deute B_{t-1} es refinança en el període t, el valor de la nova emissió de bons ha de coincidir amb B_{t-1}.

$$p_t \cdot B_t = B_{t-1}$$

Assumint la condició d'arbitratge entre el mercat del bo i el de préstecs,

$$R_t = \frac{1}{p_t}.$$

Per tant, $p_t \cdot B_t = B_{t-1}$ esdevé

$$B_t = R_t \cdot B_{t-1}\,.$$

Combinant aquesta equació amb (10) s'arriba a l'expressió (11), que traça la **dinàmica del deute públic**.

$$\boxed{B_t = \frac{n \cdot w \cdot B_{t-1}}{n \cdot w \cdot (1+\delta) - 2 \cdot B_{t-1}}\,.} \tag{11}$$

Un **estat estacionari** de la dinàmica anterior és tot valor $\bar{B}$ tal que $B_t = B_{t-1} = \bar{B}$. Fent $B_t = B_{t-1} = \bar{B}$ a (11) s'obté

$$\bar{B} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot w \cdot \delta\,.$$

El valor $\bar{B}$ indica el deute que es pot refinançar a si mateix contínuament i representa un estat de deute sostenible: cada període el deute públic roman constant (amb valor $\bar{B}$).

Si en algun període el deute a finançar és inferior a $\bar{B}$, aleshores el deute públic convergeix cap a zero: el refinançament continuat del deute permet d'eixugar-lo completament. Per contra, si en algun període el deute a finançar és superior a $\bar{B}$, llavors la dinàmica d'acumulació del deute es torna explosiva: el deute creix exponencialment i, eventualment, l'economia serà incapaç de finançar-lo. Quan s'arriba a aquesta situació, el govern fa fallida perquè no pot pagar el deute.

Els paràmetres que defineixen el valor de $\bar{B}$ permeten d'identificar de què depèn el sostre endeutament sostenible del govern. Aquest sostre és més alt com més alta sigui la dotació w (la riquesa de l'economia), el nombre de membres n de cada grup (la població de l'economia) i el grau de desigualtat δ.

Aplicant (10), la taxa d'interès de l'estat estacionari on el deute és positiu i constant és

$$\bar{R} = \frac{n \cdot w}{n \cdot w \cdot (1+\delta) - 2 \cdot \bar{B}} = \frac{n \cdot w}{n \cdot w \cdot (1+\delta) - n \cdot w \cdot \delta} = 1\,.$$

Amb tot, tenir $R = 1$ implica que no hi ha mercat de préstecs. De fet, la maximització d'utilitat d'un membre de G1 requereix $c_1 = \frac{c_1'}{R}$ (pàgina 5). Si $R = 1$, llavors tota combinació (c_1, c_1') que maximitza la utilitat satisfà $c_1 = c_1'$. La dotació vital (w, w) de cada membre de G1 ja permet d'assolir aquesta combinació. Per consegüent, cada individu de G1 no té necessitat d'anar al mercat de préstecs o al mercat del bo. Atès que els membres de G2 només estan disposats a ser prestadors en el mercat de préstecs (han d'estalviar perquè de grans no tenen dotació), la conclusió és que **el mercat de préstecs desapareix per manca de prestataris**.

Se segueix d'aquesta anàlisi que un deute públic constant permanent es menja el mercat de préstecs: tenir un deute públic perpetu (sostenible) implica l'eliminació del mercat de préstecs, en la mesura que **el govern absorbeix tot l'estalvi de l'economia**.

Si no hi ha deute a finançar ($B_{t-1} = 0$), aleshores (10) dóna la taxa d'interès obtinguda en la Qüestió 1 (només mercat de béns i de préstecs): si $B_{t-1} = 0$, $R_t = \frac{1}{1+\delta-\frac{2\cdot 0}{n\cdot w}} = \frac{1}{1+\delta}$.

Qüestió 6. El govern vol que l'economia s'assoleixi l'equilibri general de la situació descrita en la Qüestió 2 sense crear un mercat de bons. L'instrument per a aconseguir l'objetiu són imposts (positius o negatius) que recauen sobre els dos grups. Determina aquests imposts (l'impost que recau sobre cada jove i cada gran de cada grup).

Una estratègia per a replicar amb imposts l'equilibri general obtingut amb bons en la Qüestió 2 és dissenyar els imposts de manera que les restriccions pressupostàries de tots els individus siguin les mateixes en tots dos casos.

Les restriccions pressupostàries dels membres de G1 són

	amb bons	amb imposts
de jove	$c_1 + l_1 + p \cdot b_1 = w$	$c_1 + l_1 + \tau_1 = w$
de gran	$c_1' = w + R \cdot l_1 + b_1$	$c_1' + \tau_1' = w + R \cdot l_1$ (o bé $c_1' = w + R \cdot l_1 - \tau_1'$).

Per a fer equivalents les restriccions, n'hi ha prou amb triar τ_1 i $\tau_1{}'$ tals que

$$p \cdot b_1 = \tau_1 \qquad \text{i} \qquad b_1 = -\tau_1'.$$

Les restriccions pressupostàries dels membres de G2 són

	amb bons	amb imposts
de jove	$c_2 + l_2 + p \cdot b_2 = \delta \cdot w$	$c_2 + l_2 + \tau_2 = \delta \cdot w$
de gran	$c_2' = R \cdot l_2 + b_2$	$c_2' + \tau_2' = R \cdot l_2$ (o bé $c_2' = R \cdot l_2 - \tau_2'$).

Per a fer equivalents les restriccions, n'hi ha prou amb triar τ_2 i $\tau_2{}'$ tals que

$$p \cdot b_2 = \tau_2 \qquad \text{i} \qquad b_2 = -\tau_2'.$$

Amb aquestes eleccions d'imposts, la compra $p \cdot b_i$ de bons per part de cada jove i equival al pagament d'un impost τ_i, en tant que el pagament b_i que cada gran i rep al venciment dels bons equival a una transferència $-\tau_i$ (impost negatiu) del govern. Atès que els imposts han de finançar la despesa G, la restricció pressupostària del govern (en el període inicial) seria

$$n \cdot \tau_1 + n \cdot \tau_2 = G.$$

Atès que en la Qüestió 2 l'anàlisi se centrava en $t = 1$, **es va passar per alt com finança el govern en $t = 2$ el pagament del deute**. Si els que són grans en $t = 2$ han de contribuir al finançament, aleshores tota la solució s'hauria de refer, ja que la restricció pressupostària dels grans no estaria ben definida. Si el finançament de la liquidació dels bons prové dels que són joves en $t = 2$, aleshores no cal de què preocupar-se. En tot cas, caldria especificar la restricció pressupostària del govern en $t = 2$.

• Verificació de l'equivalència en $t = 1$

Les restriccions pressupostàries vitals amb imposts són

$$c_1 + \frac{c_1'}{R} = w - \tau_1 + \frac{w - \tau_1'}{R} \qquad\qquad c_2 + \frac{c_2'}{R} = \delta \cdot w - \tau_2 - \frac{\tau_2'}{R}.$$

La maximització de les respectives funcions d'utilitat porta als següents resultats.

$$c_1 = \frac{w - \tau_1}{2} + \frac{w - \tau_1'}{2 \cdot R} \qquad\qquad c_2 = \frac{\delta \cdot w - \tau_2}{2} - \frac{\tau_1'}{2 \cdot R}$$

$$c_1' = c_1 \cdot R \qquad\qquad c_2' = c_2 \cdot R$$

$$s_1 = w - c_1 - \tau_1 = \frac{w - \tau_1}{2} - \frac{w - \tau_1'}{2 \cdot R} \qquad\qquad s_2 = \delta \cdot w - c_2 - \tau_2 = \frac{\delta \cdot w - \tau_2}{2} + \frac{\tau_1'}{2 \cdot R}$$

Amb la redefinició de les funcions d'estalvi com $s_1 = w - c_1 - \tau_1$ (en comptes d'$s_1 = w - c_1$) i $s_2 = \delta \cdot w - c_2 - \tau_2$ (en comptes d'$s_2 = \delta \cdot w - c_2$), la condició d'equilibri esdevé

$$n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = 0\,.$$

[Si s'hagués mantingut la definició original, en equilibri, l'estalvi agregat ha de finançar les imposts. La condició d'equilibri seria $n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = n \cdot \tau_1 + n \cdot \tau_2 = G$. Amb bons, $G = p \cdot B$, amb la qual cosa s'obtindria la mateixa condició utilitzada en la resolució de la Qüestió 2: $n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = p \cdot B$. Amb la redefinició de les funcions d'estalvi amb imposts, es com si el terme $p \cdot B$ passés a l'esquerra de l'equació i s'integrés dins de les funcions s_1 i s_2.]

Així, en equilibri, $s_1 + s_2 = 0$. Per tant,

$$\left(\frac{w - \tau_1}{2} - \frac{w - \tau_1'}{2 \cdot R}\right) + \left(\frac{\delta \cdot w - \tau_2}{2} + \frac{\tau_1'}{2 \cdot R}\right) = 0.$$

Aïllant R,

$$R = \frac{w - \tau_1' - \tau_2'}{w \cdot (1 + \delta) - \tau_1 - \tau_2} = \frac{1 - \dfrac{\tau_1' + \tau_2'}{w}}{1 + \delta - \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{w}}.$$

Sabent que

$$n \cdot (\tau_1 + \tau_2) = G = p \cdot B = B/R \qquad\qquad \tau_1' + \tau_2' = b_1 + b_2 = B/n,$$

$$R = \frac{1 - \dfrac{\tau_1' + \tau_2'}{w}}{1 + \delta - \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{w}} = \frac{1 - \dfrac{B/n}{w}}{1 + \delta - \dfrac{G/n}{w}} = \frac{1 - \dfrac{G \cdot R/n}{w}}{1 + \delta - \dfrac{G/n}{w}}.$$

Així doncs,

$$R \cdot \left(1 + \delta - \frac{\frac{G}{n}}{w} \right) = 1 - \frac{R \cdot \frac{G}{n}}{w}.$$

Tornat a aïllar R,

$$R = \frac{1}{1 + \delta - \frac{2 \cdot G}{n \cdot w}}.$$

que és el valor d'equilibri amb bons.

La verificació que l'assignació de consum és la mateixa que amb bons es deixa com a exercici.