Solució proposada de la pregunta 5 de l'examen de 28/11/2014

5. Independència. Hi ha una economia amb únicament un bé, que pot acumular-se només un període en forma de capital (sense depreciació) i que pot produir-se combinant els factors treball i capital. El bé també pot set prestat en un mercat de préstecs. S'assumeix que l'arbitratge iguala la rendibilitat de prestar el bé i d'acumular capital.

Cada generació està formada per dos grups, 1 i 2. El grup 1 està format per $2 \cdot n$ individus idèntics, cadascú amb una unitat de treball de jove i dues unitats de treball de grans. La funció d'utilitat de cada jove del grup 1 en el moment t és $u_t = c_t \cdot (c_{t+1})^\beta$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove, c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran i $0 < \beta < 1$. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum.

El grup 2 està format per n individus idèntics, cadascú amb quatre unitats de treball de jove i dues unitats de treball de grans. La funció d'utilitat de cada jove del grup 2 en el moment t és $u_t = c_t \cdot c_{t+1}$, on c_t és el consum que l'individu fa de jove i c_{t+1} el consum que el mateix individu farà de gran. La funció d'utilitat de cada individu gran coincideix amb el seu consum.

La funció de producció de l'economia en cada moment t és $Y_t = K_t \cdot L_t$, on K_t és el capital total en el moment t i L_t és el volum total de treball ofert en t. Tots els individus d'ambdós grups ofereixen el seu treball, tant de joves com de grans. La remuneració del capital és la meitat de la productivitat marginal del capital. La remuneració del treball és la meitat de la productivitat marginal del treball. S'assumeix que, per arbitratge, la taxa d'interès d'un préstec en el moment t coincideix amb la remuneració del capital en el moment $t + 1$.

(i) Determina l'equació que descriu la trajectòria d'acumulació del capital i representa-la gràficament.

(ii) Imagina que els membres del grup 2 s'independitzen i constitueixen una economia pròpia, separada de l'economia que formarien els membres del grup 1. A cada economia es mantenen les dotacions dels membres dels grups respectius, la funció de producció de l'economia original i les regles que determinen les remuneracions dels factors. Determina l'equació que representa la trajectòria d'acumulació del capital de cada economia i compara-la amb l'obtinguda en l'apartat (i) per a jutjar si a algun dels grups li convé la secessió.

Resposta a la qüestió (i)

Atès que hi ha dos grups amb diferents característiques, hi ha la possibilitat de tenir un mercat de préstecs. A banda de poder prestar, els joves poden acumular capital. Com de costum, la coma volada ($'$) indicarà una variable referida al moment $t+1$ i la seva absència significarà que la variable corresponent es refereix al moment t. [El salari ω no depèn del grup perquè és comú a tots dos grups: és el salari de l'economia. El mateix val per a ω' i σ'.]

Restricció pressupostària de cada membre jove del grup 1 (generació *t*)

$$c_1 + l_1 + k_1' = 1 \cdot \omega$$

Restricció pressupostària de cada membre gran del grup 1 (generació *t*)

$$c_1' = 2 \cdot \omega' + R \cdot l_1 + \sigma' \cdot k_1'$$

Restricció pressupostària vital de cada membre del grup 1 (generació *t*)

$$c_1 + \frac{c_1'}{R} = \omega + \frac{2 \cdot \omega'}{R} + k_1' \cdot \left(\frac{\sigma'}{R} - 1\right)$$

Per la hipòtesi d'arbitratge entre els mercats de préstec i capital, $\sigma' = R$. Com a resultat, la restricció vital esdevé

$$c_1 + \frac{c_1'}{R} = \omega + \frac{2 \cdot \omega'}{R}.$$

Funció de consum d'un jove del grup 1

Per a maximitzar $u_1 = c_1 \cdot {c_1'}^{\beta}$, cal que $\frac{\partial u_1/\partial c_1}{\partial u_1/\partial c_1'} = R$. En conseqüència, $\beta \cdot c_1 = \frac{c_1'}{R}$. Emprant la restricció pressupostària vital, $c_1 + \beta \cdot c_1 = \omega + \frac{2 \cdot \omega'}{R}$. La funció de demanda de consum és $c_1 = \frac{\omega}{1+\beta} + \frac{2 \cdot \omega'}{(1+\beta) \cdot R}$.

Funció d'estalvi d'un jove del grup 1

L'estalvi d'un jove del grup 1 es defineix, en aquest cas, com $s_1 = \omega - c_1$. Sabent que $c_1 = \frac{\omega}{1+\beta} + \frac{2 \cdot \omega'}{(1+\beta) \cdot R}$, se'n dedueix que

$$s_1 = \frac{\beta \cdot \omega}{1+\beta} - \frac{2 \cdot \omega'}{(1+\beta) \cdot R}.$$

Funció d'estalvi agregat del grup 1

La funció d'estalvi agregat del grup 1 és

$$\boxed{S_1 = 2 \cdot n \cdot s_1 = \frac{2 \cdot n}{1+\beta} \cdot \left(\beta \cdot \omega - \frac{2 \cdot \omega'}{R}\right).}$$

Restricció pressupostària de cada membre jove del grup 2 (generació t)

$$c_2 + l_2 + k_2' = 4 \cdot \omega$$

Restricció pressupostària de cada membre gran del grup 2 (generació t)

$$c_2' = 2 \cdot \omega' + R \cdot l_2 + \sigma' \cdot k_2'$$

Restricció pressupostària vital de cada membre del grup 2 (generació t)

$$c_2 + \frac{c_2'}{R} = 4 \cdot \omega + \frac{2 \cdot \omega'}{R} + k_2' \cdot \left(\frac{\sigma'}{R} - 1\right)$$

Per la hipòtesi d'arbitratge entre els mercats de préstec i capital, $\sigma' = R$**.** Així, la restricció vital serà

$$c_2 + \frac{c_2'}{R} = 4 \cdot \omega + \frac{2 \cdot \omega'}{R}.$$

Funció de consum d'un jove del grup 2

Per a maximitzar $u_2 = c_2 \cdot c_2'$, cal que $\frac{\partial u_2/\partial c_2}{\partial u_2/\partial c_2'} = R$. Per tant, $c_2 = \frac{c_2'}{R}$. Fent servir la restricció pressupostària vital, $c_2 + c_2 = 4 \cdot \omega + \frac{2 \cdot \omega'}{R}$. La funció de demanda de consum resultant és $c_2 = 2 \cdot \omega + \frac{\omega'}{R}$.

Funció d'estalvi d'un jove del grup 2

L'estalvi d'un jove del grup 2 es defineix com $s_2 = 4 \cdot \omega - c_2$. Sabent que $c_2 = 2 \cdot \omega + \frac{\omega'}{R}$, la conclusió és que

$$s_2 = 2 \cdot \omega - \frac{\omega'}{R}.$$

Funció d'estalvi agregat del grup 2

La funció d'estalvi agregat del grup 2 és

$$\boxed{S_2 = n \cdot s_2 = n \cdot \left(2 \cdot \omega - \frac{\omega'}{R}\right).}$$

Funció d'estalvi agregat

Essent la funció d'estalvi agregada $S = S_1 + S_2$,

$$S = \frac{2 \cdot n}{1 + \beta} \cdot \left(\beta \cdot \omega - \frac{2 \cdot \omega'}{R}\right) + n \cdot \left(2 \cdot \omega - \frac{\omega'}{R}\right) = \frac{n}{1 + \beta} \cdot \left(\omega \cdot 2 \cdot (1 + 2 \cdot \beta) - \frac{\omega'}{R} \cdot (5 + \beta)\right).$$

Per hipòtesi del problema, $\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{2} \cdot K$ i $\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{1}{2} \cdot L$, on $K = K_1 + K_2 = 2 \cdot n \cdot k_1 + n \cdot k_2 = n \cdot (2 \cdot k_1 + k_2)$ i $L = L_1 + L_2 = 2 \cdot n \cdot (1 + 2) + n \cdot (4 + 2) = 12 \cdot n$.

Així doncs, $\omega = \frac{K}{2}$, $\omega' = \frac{K'}{2}$ i $\sigma' = 6 \cdot n$, on $K = n \cdot (2 \cdot k_1 + k_2)$ i $K' = n \cdot (2 \cdot k_1' + k_2')$. D'altra banda, per arbitratge entre préstecs i capital, $R = \sigma'$. En resum, la funció d'estalvi agregat és

$$S = \frac{n}{1+\beta} \cdot \left(K \cdot (1 + 2 \cdot \beta) - \frac{K'}{12 \cdot n} \cdot (5 + \beta) \right).$$

Condició d'equilibri general

$$S = K'$$

Això és,

$$\frac{n}{1+\beta} \cdot \left(K \cdot (1 + 2 \cdot \beta) - \frac{K'}{12 \cdot n} \cdot (5 + \beta) \right) = K'.$$

Aïllant K' s'obté la **trajectòria d'acumulació de capital**:

$$\boxed{K' = n \cdot \left(\frac{12 + 24 \cdot \beta}{17 + 13 \cdot \beta} \right) \cdot K\,.}$$

Atès que n i β són constants positives, la funció $K' = n \cdot \left(\frac{12+24 \cdot \beta}{17+13 \cdot \beta} \right) \cdot K$ és una recta que passa per l'origen. El pendent serà més gran que 1 (i, en conseqüència, el capital s'acumula indefinidament) si, i només si, $n \cdot \left(\frac{12+24 \cdot \beta}{17+13 \cdot \beta} \right) > 1$. Aquesta condició equival a

$$\beta > \frac{17 - 12 \cdot n}{24 \cdot n - 13}$$

que es compleix automàticament si $n > 2$: amb $n > 2$ el numerador és negatiu, el denominador és positiu i, per definició, β és un valor positiu.

Resposta a la qüestió (ii)

Si cada grup constitueix una economia separada, les condicions d'equilibri general respectives són $S_1 = K_1'$ i $S_2 = K_2'$, amb $K_1' = 2 \cdot n \cdot k_1'$ i $K_2' = n \cdot k_2'$. Específicament, per a l'economia del grup 1,

$$\frac{2 \cdot n}{1+\beta} \cdot \left(\beta \cdot \omega_1 - \frac{2 \cdot \omega_1'}{R_1} \right) = 2 \cdot n \cdot k_1'$$

on $\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot K_1 = n \cdot k_1$, $\omega_1' = \frac{1}{2} \cdot K_1' = n \cdot k_1'$ i $R_1 = \sigma_1' = \frac{1}{2} \cdot L_1' = 2 \cdot n \cdot (1+2) = 6 \cdot n$. Per consegüent,

$$\frac{1}{1+\beta} \cdot \left(\beta \cdot n \cdot k_1 - \frac{2 \cdot n \cdot k_1'}{6 \cdot n} \right) = k_1'$$

$$\beta \cdot n \cdot k_1 - \frac{k_1'}{3} = (1+\beta) \cdot k_1'$$

$$\boxed{k_1' = n \cdot \frac{3 \cdot \beta}{4 + 3 \cdot \beta} \cdot k_1 \,.}$$

Entenent que la secessió convé si el capital pot acumular-se més ràpidament amb la secessió, al grup 1 li convé la separació si, i només si, el pendent $n \cdot \frac{3 \cdot \beta}{4+3 \cdot \beta}$ de la nova recta que representa la trajectòria d'acumulació de capital és superior al pendent de la recta que representava la trajectòria d'acumulació de l'economia original.

Tenir $n \cdot \frac{3 \cdot \beta}{4+3 \cdot \beta} > n \cdot \left(\frac{12+24 \cdot \beta}{17+13 \cdot \beta} \right)$ equival a tenir $3 \cdot \beta \cdot (17 + 13 \cdot \beta) > (4 + 3 \cdot \beta) \cdot (12 + 24 \cdot \beta)$ i això equival a $51 \cdot \beta + 39 \cdot \beta^2 > 48 + 132 \cdot \beta + 72 \cdot \beta^2$, que no és el cas. Conclusió: al grup 1 no li convé la secessió.

Pel que fa al grup 2, $S_2 = K_2'$ esdevé

$$n \cdot \left(2 \cdot \omega_2 - \frac{\omega_2'}{R_2} \right) = n \cdot k_2'$$

on $\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot K_2 = \frac{n}{2} \cdot k_2$, $\omega_2' = \frac{1}{2} \cdot K_2' = \frac{n}{2} \cdot k_2'$ i $R_2 = \sigma_2' = \frac{1}{2} \cdot L_2' = n \cdot (4+2) = 6 \cdot n$.

En suma,

$$n \cdot k_2 - \frac{n \cdot k_2'}{12 \cdot n} = k_2'$$

d'on es conclou que

$$\boxed{k_2' = \frac{12}{13} \cdot n \cdot k_2 \,.}$$

Convé al grup 2 la secessió si, i només si,

$$\frac{12}{13} > \frac{12 + 24 \cdot \beta}{17 + 13 \cdot \beta}$$

que equival a $\beta < \frac{4}{13}$. En definitiva, per a $\beta < \frac{4}{13}$, convé al grup 2 la secessió.