Model de generacions encavalcades i finançament d'un bé públic

Descripció de l'economia

1. Els individus de l'economia només poden consumir o prestar les unitats de bé de què disposin. Cada generació té 100 membres: 50 d'ells ("els pobres") amb dotació $(1, 0)$ i els altres 50 ("els rics") amb dotació $(4, 1)$. Els consumidors, rics o pobres, empren la dotació en consum c, préstecs (privats) l i contribucions (voluntàries) e a un bé públic.

2. El bé públic només beneficia als consumidors joves. Per consegüent, la gent gran no contribueix al bé públic. La funció d'utilitat del consumidor (jove) i és $u_t^i = c_t^i(t) \cdot c_t^i(t+1) \cdot [1 + g(\sum_{j\epsilon N(t)} e^j)]$, on e^j és la contribució del consumidor jove j. S'entén que e^j no pot ser negativa ni superior a la dotació que j té de jove.

3. Per a simplificar, sigui $g\left(\sum_{j\epsilon N(t)} e^j\right) = \sum_{j\epsilon N(t)} e^j$. Això pot interpretar-se com la funció de producció del bé públic: el total de contribucions $\sum_{j\epsilon N(t)} e^j$ genera el volum $g\left(\sum_{j\epsilon N(t)} e^j\right)$ de bé públic. La intuïció és que cada unitat de bé públic reforça la utilitat del consum privat: el bé públic fa més útil el consum privat del bé.

4. Determina quina és la contribució e^P al bé públic que, en equilibri, fa un consumidor pobre i quina és la contribució e^R que fa un consumidor ric.

Resposta

Restricció pressupostària de cada membre jove del grup P

$$c_P + l_P + e_P = 1$$

Restricció pressupostària de cada membre gran del grup P

$$c_P' = R \cdot l_P$$

Restricció pressupostària vital de cada membre del grup P

$$c_P + \frac{c_P'}{R} = 1 - e_P$$

Anàlisi d'un jove del grup P

Cada jove maximitza $u_P = c_P \cdot c_P' \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_{PR})]$, respecte de c_P, c_P' i e_P, sotmès a $c_P + \frac{c_P'}{R} = 1 - e_P$. El lagrangià corresponent és

$$L_P = c_P \cdot c_P' \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)] + \lambda \cdot \left(1 - e_P - c_P - \frac{c_P'}{R}\right).$$

$$0 = \frac{\partial L_P}{\partial c_P} = c'_P \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)] - \lambda$$

$$0 = \frac{\partial L_P}{\partial c'_P} = c_P \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)] - \frac{\lambda}{R}$$

$$0 = \frac{\partial L_P}{\partial e_P} = 50 \cdot c_P \cdot c'_P - \lambda$$

Aïllant λ a les dues primeres equacions i igualant els dos resultats,

$$c'_P \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)] = R \cdot c_P \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)]\,.$$

Per tant,

$$c_P = \frac{c'_P}{R}\,.$$

Substituint a la restricció pressupostària vital $c_P + \frac{c'_P}{R} = 1 - e_P$,

$$2 \cdot c_P = 1 - e_P.$$

Com a resultat,

$$c_P = \frac{1 - e_P}{2}\,.$$

La funció d'estalvi és

$$s_P = 1 - c_P = \frac{1 + e_P}{2}\,.$$

Aïllant λ a la tercera equació, $\lambda = 50 \cdot c_P \cdot c'_P$. Substituint a la primera,

$$c'_P \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)] - 50 \cdot c_P \cdot c'_P = 0$$

Eliminant c'_P i sabent que $c_P = \frac{1-e_P}{2}$,

$$1 + 50 \cdot e_P + 50 \cdot e_R - 25 \cdot (1 - e_P) = 0.$$

En resum, el que podria denominar-se la funció de reacció (decisió de la seva contribució e_P) d'un membre del grup P donada la contribució e_R de cada membre del grup R és

$$e_P = \frac{24 - 50 \cdot e_R}{75} = \frac{8}{25} - \frac{2}{3} \cdot e_R\,. \tag{1}$$

Restricció pressupostària de cada membre jove del grup R

$$c_R + l_R + e_R = 4$$

Restricció pressupostària de cada membre gran del grup R

$$c'_R = 1 + R \cdot l_R$$

Restricció pressupostària vital de cada membre del grup R

$$c_R + \frac{c'_R}{R} = 4 - e_R + \frac{1}{R}$$

Anàlisi d'un jove del grup R

Cada jove maximitza $u_R = c_R \cdot c'_R \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)]$, respecte de c_R, c'_R i e_R, sotmès a $c_R + \frac{c'_R}{R} = 4 - e_R + \frac{1}{R}$. El lagrangià corresponent és

$$L_R = c_P \cdot c'_P \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)] + \mu \cdot \left(4 - e_R + \frac{1}{R} - c_R - \frac{c'_R}{R}\right).$$

$$0 = \frac{\partial L_R}{\partial c_R} = c'_R \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)] - \mu$$

$$0 = \frac{\partial L_R}{\partial c'_R} = c_R \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)] - \frac{\mu}{R}$$

$$0 = \frac{\partial L_R}{\partial e_R} = 50 \cdot c_R \cdot c'_R - \mu$$

L'anàlisi és anàloga a la d'un jove del grup P. Els resultats són els següents.

$$c_R = \frac{c'_R}{R}$$

$$c_R = 2 - \frac{e_R}{2} + \frac{1}{2 \cdot R}$$

$$s_R = 4 - c_R = 2 + \frac{e_R}{2} - \frac{1}{2 \cdot R}$$

$$1 + 50 \cdot e_P + 50 \cdot e_R - 50 \cdot \left(2 + \frac{e_R}{2} - \frac{1}{2 \cdot R}\right) = 0.$$

Aïllant e_R a la darrera equació, resulta la funció de reacció (decisió de la seva contribució e_R) d'un membre del grup R donada la contribució e_P de cada membre del grup P.

Gràcies a l'Alfred Romero per detectar un error a (2)

$$e_R = \frac{99 - \frac{25}{R} - 50 \cdot e_P}{25} = \frac{99}{25} - \frac{1}{R} - 2 \cdot e_P \qquad (2)$$

Taxa d'interès d'equilibri

Només hi ha dos mercats: del bé i de préstecs (seria un pèl forçat interpretar que les contribucions defineixen un tercer mercat, però podria intentar-se). Això fa que la condició d'equilibri general sigui la condició $S = 0$, on $S = 50 \cdot (s_P + s_R)$ és l'estalvi agregat.

Se segueix d'

$$s_P + s_R = 0$$

que

$$\left(\frac{1 + e_P}{2}\right) + \left(2 + \frac{e_R}{2} - \frac{1}{2 \cdot R}\right) = 0$$

i d'aquí se'n dedudeix que

$$R = \frac{1}{5 + e_P + e_R}.$$

Contribucions

Introduint el resultat anterior en (2),

$$e_R = \frac{\mathbf{99}}{25} - (\mathbf{5 + e_P + e_R}) - \mathbf{2} \cdot e_P$$

Després de tornar a aïllar e_R,

$$e_R = -\frac{\mathbf{26}}{\mathbf{50}} - \frac{3}{\mathbf{2}} \cdot e_P\,.$$

Però $e_P \geq 0$, per la qual cosa $e_R < 0$. Això contradiu la hipòtesi que $e_R \geq 0$. La conclusió de tota l'anàlisi anterior és que **no hi ha cap solució interior per a tots dos grups**, això és, tal que $0 < e_P < 1$ i $0 < e_R < 4$. Caldria ara analitzar les possibles solucions de cantonada.

[Tot i que s'ha assumit que la contribució d'un individu no pot superar la seva dotació, seria possible que la contribució d'algun individu la superès, ja que hi ha préstecs. En tal cas, el valor màxim d'una contribució seria $1 + 4 = 5$. Aquesta nova situació no alteraria el resultat anterior de manca de solució interior. L'única diferència seria el valor màxim que podria tenir una solució de cantonada.]

Contribució d'un individu del grup P

En relació amb e_P, el valors possibles d'una solució de cantonada són $e_P = 0$ i $e_P = 1$.

- Cas 1: $e_P = 1$. El problema de maximització esdevé maximitzar $u_P = c_P \cdot c_P' \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)]$, respecte de c_P i c_P', sotmès a $c_P + \frac{c_P'}{R} = 1 - e_P = 0$. Un cop es trobi el candidat a solució, restaria verificar que l'individu no augmenta la seva utilitat disminuint $e_P = 1$ (per exemple, comprovant que, amb els valors obtinguts, $\frac{\partial L_P}{\partial e_P} > 0$). Aquest cas es deixa com a exercici.

- Cas 2: $e_P = 0$. El problema de maximització esdevé maximitzar $u_P = c_P \cdot c'_P \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)]$, respecte de c_P i c'_P, sotmès a $c_P + \frac{c'_P}{R} = 1 - e_P = 1$. Un cop es trobi el candidat a solució, restaria verificar que l'individu no augmenta la seva utilitat augmentant $e_P = 0$ (per exemple, comprovant que, amb els valors obtinguts, $\frac{\partial L_P}{\partial e_P} < 0$).

Els resultats són

$$c_P = \frac{1}{2} \qquad\qquad s_P = 1 - c_P = \frac{1}{2}.$$

Aquesta anàlisi només presuposa que la contribució dels membres del grup P és de cantonada. La dels membres del grup R poden ser interior o de cantonada. Es deixa com a exercici les possibles solucions de cantonada, $e_R = 0$ i $e_R = 4$. Per a determinar una possible solució interior cal recuperar les funcions prèviament calculades on e_R és una incògnita. En particular,

$$s_R = 4 - c_R = 2 + \frac{e_R}{2} - \frac{1}{2 \cdot R}.$$

Aplicant la condició d'equilibri general, en versió simplificada, $s_P + s_R = 0$, s'obté

$$\frac{1}{2} + \left(2 + \frac{e_R}{2} - \frac{1}{2 \cdot R}\right) = 0$$

i es conclou que

$$R = \frac{1}{5 + e_R}.$$

Sabent que

$$c_R = 2 - \frac{e_R}{2} + \frac{1}{2 \cdot R}$$

resulta que

$$c_R = 2 - \frac{e_R}{2} + \frac{5 + e_R}{2} = \frac{9}{2}.$$

D'altra banda, $s_P = \frac{1}{2}$ implica $l_P = \frac{1}{2}$. Segons la condició d'equilibri en el mercat de préstecs, $50 \cdot (l_P + l_R) = 0$. Per consegüent, $l_R = -\frac{1}{2}$. Per la restricció pressupostària d'un jove del grup R, $c_R + e_R = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. Conclusió: $e_R = 0$. En suma, ningú no fa cap contribució (verifica que, donat $e_R = 0$, la millor resposta de cada membre del grup P és $e_P = 0$).

Contribució d'un individu del grup R

L'anàlisi és similar a la del grup P. En relació amb e_R, el valors possibles d'una solució de cantonada són $e_R = 0$ i $e_R = 4$.

• Cas 1: $e_R = 4$. La resolució es deixa com a exercici.

• Cas 2: $e_R = 0$. El problema de maximització esdevé maximitzar $u_P = c_P \cdot c'_P \cdot [1 + 50 \cdot (e_P + e_R)]$, respecte de c_R i c'_R, sotmès a $c_R + \frac{c'_R}{R} = 4 - e_R + \frac{1}{R} = 4 + \frac{1}{R}$. Els resultats són

$$c_R = 2 + \frac{1}{2 \cdot R}$$

$$s_R = 4 - c_R = 2 - \frac{1}{2 \cdot R}$$

Aquesta anàlisi només presuposa que la contribució dels membres del grup R és de cantonada. La dels membres del grup P poden ser interior o de cantonada. Es deixa com a exercici les possibles solucions de cantonada, $e_P = 0$ i $e_P = 1$. Per a determinar una possible solució interior cal recuperar les funcions prèviament calculades on e_P és una incògnita. Específicament, per (1),

$$e_P = \frac{8}{25} - \frac{2}{3} \cdot e_R = \frac{8}{25}.$$

A més, sabent que

$$s_P = 1 - c_P = \frac{1 + e_P}{2}$$

i aplicant la condició d'equilibri general, en versió simplificada, $s_P + s_R = 0$, s'obté

$$\left(\frac{1 + e_P}{2}\right) + \left(2 - \frac{1}{2 \cdot R}\right) = 0\,,$$

d'on es conclou que

$$R = \frac{1}{5 + e_P} = \frac{1}{5 + \frac{8}{25}} = \frac{25}{133}.$$

Com a conseqüència,

$$c_R = 2 + \frac{1}{2 \cdot R} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{133}{25} = \frac{233}{50}$$

i

$$l_R = 4 - c_R = -\frac{33}{50}.$$

Per l'equilibri en el mercat de préstecs, $l_P = -l_R = \frac{33}{50}$. Atès que $c_P + l_P + e_P = 1$ i $e_P = \frac{8}{25}$, s'ha de tenir que $c_P = 1 - \frac{8}{25} - \frac{33}{50} = \frac{1}{50}$. Però

$$c_P = \frac{1 - e_P}{2}$$

i, per tant, $c_P = \frac{17}{50}$: contradicció.

D'aquesta contradicció es conclou que, en equilibri, no pot ser que cap membre del grup R contribueixi $e_R = 0$ i algun membre del grup P contribueixi un valor e_P tal que $0 < e_P < 1$. Resumint, pendent l'anàlisi sobre els casos deixats com a exercici, de moment **no s'ha trobat cap solució on la contribució d'algun individu sigui positiva**.