Versió més simple del model de generacions encavalcades amb herències

Descripció de l'economia

1. Cada unitat de bé només pot existir en un període de temps. Els individus de l'economia només poden consumir, prestar o regalar les unitats de bé de què disposin.

2. Totes les generacions $t \geq 1$ són idèntiques. Cada generació està formada per dos grups: el grup 1 i el grup 2. Cada grup te n membres. La dotació de cada membre del grup 1 és $(0, w)$. La dotació de cada membre del grup 2 és $(w, 0)$.

3. La funció d'utilitat de cada individu i jove en el període t és $u_i(t) = c_i(t) \cdot c_i(t+1)$. Cada individu i gran en el període $t+1$ està vinculat amb un únic individu jove j del mateix període i del seu mateix grup, de manera que cada individu jove d'un grup no està vinculat amb dos individus grans del mateix període i grup (hi ha una bijecció entre els grans d'un grup i el joves del mateix grup).

4. La funció d'utilitat de cada individu i gran en el període t és $v_i(t) = c_i(t) \cdot h_i(t)$, on $h_i(t)$ representa l'herència que l'individu gran i transmet en el període t a l'individu jove del seu mateix grup amb què està vinculat.

Qüestions

1. Quin és l'equilibri general competitiu de l'economia?

2. Determina l'herència que llega cada individu gran.

3. Compara els vectors de consum de cada individu de l'equilibri obtingut en l'apartat 1 amb els vectors de consum de l'equilibri si el grans no poguessin deixar herència (la funció d'utilitat de cada gran del període t podria assumir-se, per exemple, igual a $v_i(t) = c_i(t)$).

Resposta a les qüestions 1 i 2

Per a simplificar, $u_i = c_i \cdot c_i'$ designa la funció d'utilitat d'un individu jove i, on c_i és el consum que i fa de jove i c_i' és el consum que farà de gran. De manera similar, $u_i' = c_i' \cdot h_i$ denota la funció d'utilitat d'un individu gran i, on c_i' és el consum que i fa de gran i h_i és l'herència que lliura a l'individu jove amb qui està vinculat.

La restricció pressupostària de cada jove i és $c_i + l_i = w_i + h_i$, on i no decideix el valor d' h_i. Però el problema a què s'enfronta l'individu gran amb qui i està vinculat per a determinar l'herència h_i és idèntic al problema a què i s'enfrontarà en el futur per a determinar l'herència que i atorgui a l'individu jove amb qui estarà vinculat. Això fa que el valor d' h_i que l'individu jove i hagi de considerar es pugui obtenir del seu problema de maximització de gran.

Problema de maximització d'un membre jove del grup 1

$$max_{c_1,c_1'}\ u_1 = c_1 \cdot c_1{}'$$
$$\text{sotmès a } c_1 + \ l_1 = h_1$$

Problema de maximització d'un membre gran del grup 1

$$max_{c_1',h_1}\ u_1{}' = c_1{}' \cdot h_1$$
$$\text{sotmès a } c_1{}' + \ h_1 = w + R \cdot l_1$$

Solució del problema de maximització d'un membre gran del grup 1

Procedim que inducció cap enrere: primer solucionem el problema de l'individu gran i després el del jove. Aïllant h_1 a la restricció s'obté $h_1 = w + R \cdot l_1 - c_1{}'$. Substituint a la funció objectiu, es tracta de

$$max_{c_1'}\ c_1{}' \cdot (w + R \cdot l_1 - c_1{}')$$

Derivant respecte de $c_1{}'$ i igualant a zero resulta $w + R \cdot l_1 = 2 \cdot c_1{}'$. En resum, la demanda de consum d'un individu gran del grup 1 és

$$c_1{}' = \frac{w + R \cdot l_1}{2}.$$

Sabent que $h_1 = w + R \cdot l_1 - c_1{}'$,

$$c_1{}' = \frac{w + R \cdot l_1}{2} = \ h_1.$$

Solució del problema de maximització d'un membre jove del grup 1

Pel resultat anterior $c_1{}' = \ h_1$, el problema de maximització d'un jove esdevé

$$max_{c_1,c_1'}\ u_1 = c_1 \cdot h_1$$
$$\text{sotmès a } c_1 + \ l_1 = h_1.$$

Atès que $c_1 = \ h_1 - l_1$, es tracta de

$$max_{l_1}\ (h_1 - l_1) \cdot h_1$$

on h_1 és funció d'l_1: $h_1 = \frac{w+R\cdot l_1}{2}$.

Derivant ${h_1}^2 - h_1 \cdot l_1$ respecte d'l_1 (aplicant la regla de la cadena) i igualant a zero resulta

$$2 \cdot h_1 \cdot \frac{dh_1}{dl_1} - \left(\frac{dh_1}{dl_1} \cdot l_1 + h_1\right) = 0\,.$$

Com que $\frac{dh_1}{dl_1} = \frac{R}{2}$, l'anterior equació es transforma en

$$2 \cdot \frac{w + R \cdot l_1}{2} \cdot \frac{R}{2} - \left(\frac{R}{2} \cdot l_1 + \frac{w + R \cdot l_1}{2}\right) = 0\,.$$

Aïllant l_1,

$$\boxed{l_1 = \frac{w \cdot (1 - R)}{R \cdot (R - 2)}.}$$

Havent establert que $c_1 = h_1 - l_1$ i que $h_1 = \frac{w+R\cdot l_1}{2}$,

$$\boxed{c_1 = \frac{w}{2 \cdot R}.}$$

La feina quedarà rematada substituint l_1 a l'expressió comuna que establia ${c_1}'$ i h_1 en funció d'l_1 : ${c_1}' = \frac{w+R\cdot l_1}{2} = h_1$. En definitiva, tret d'error o omissió,

$$\boxed{{c_1}' = h_1 = \frac{w}{2} \cdot \left(1 + \frac{1 - R}{R - 2}\right).}$$

Estàtica comparativa

Val la pena de realitzar els exercicis d'estàtica comparativa de les solucions a fi d'esbrinar com es modifiquen consums, préstecs i herències a resultes d'un canvi dels paràmetres (R és un paràmetre des de la perspectiva de cada individu, perquè són preu-acceptants al mercat de préstecs, però R és una variable endògena del model determinada per les condicions de l'equilibri general).

$$\frac{dl_1}{dw} = \frac{1 - R}{R \cdot (R - 2)}$$

Si $0 < R < 1$ o $R > 2$, aleshores $\frac{dl_1}{dw} < 0$: un augment de la riquesa dels grans del grup 1 redueix els préstecs que prenen els joves del grup 1. Si $1 < R < 2$, aleshores $\frac{dl_1}{dw} > 0$: un augment de la riquesa dels grans del grup 1 incrementa els préstecs que prenen els joves del grup 1.

$$\frac{dl_1}{dR} = w \cdot \left(\frac{R^2 - 2 \cdot R + 2}{(R^2 - 2 \cdot R)^2}\right) = w \cdot \left(\frac{1}{R^2 - 2 \cdot R} + \frac{2}{(R^2 - 2 \cdot R)^2}\right)$$

En aquest cas, $R^2 - 2 \cdot R + 2 \gtrless 0$ equival a $\frac{dl_1}{dR} \gtrless 0$. A més, $R^2 - 2 \cdot R + 2 > 0$ equival a $R > 1 \mp \sqrt{-1}$. En resum, per a R suficientment gran, canvis en R alteren l_1 en el mateix sentit.

Es deixa com a exercici establir el signe de les derivades $\frac{dc_1}{dw}$, $\frac{dh_1}{dw}$, $\frac{dc_1}{dR}$ i $\frac{dh_1}{dR}$.

Problema de maximització d'un membre jove del grup 2

$$max_{c_2, c_2'} \ u_2 = c_2 \cdot c_2'$$

$$\text{sotmès a } c_2 + \ l_2 = w + h_2$$

Problema de maximització d'un membre gran del grup 2

$$max_{c_2', h_2} \ u_2' = c_2' \cdot h_2$$

$$\text{sotmès a } c_2' + \ h_2 = R \cdot l_2$$

Aquests problemes es resolen de manera anàloga als problemes dels membres del grup 1. En relació amb els grans del grup 2,

$$c_2' = \frac{R \cdot l_2}{2} = \ h_2.$$

Sabent això, el problema d'un jove del grup 2 es transforma en

$$max_{l_2} \ (w + h_2 - l_2) \cdot h_2$$

o, reemplaçant h_2 per $\frac{R \cdot l_2}{2}$,

$$max_{l_2} \ w \cdot \frac{R \cdot l_2}{2} + \left(\frac{R \cdot l_2}{2}\right)^2 - \frac{R \cdot l_2{}^2}{2} .$$

Després de derivar respecte d'l_2 i igualar a zero, els resultat són

$$\boxed{\begin{gathered} l_2 = \frac{w}{2 - R} \\ c_2' = h_2 = \frac{w}{2} \cdot \frac{R}{2 - R} . \end{gathered}}$$

Passant ara als membres joves, de la seva restricció pressupostària es dedudeix que $c_2 = w + h_2 - l_2$. D'aquí que

$$\boxed{c_2 = w \cdot \left(1 + \left[\frac{1}{R-2}\right] \cdot \left[1 - \frac{R}{2}\right]\right).}$$

Equilibri general competitiu

La condició d'equilibri del mercat de préstecs és que, en termes nets, el volum de préstecs sigui zero: préstecs totals demandats igual a préstecs totals oferts. El volum de préstecs del grup 1 és $L_1 = n \cdot l_1$. El volum de préstecs del grup 2 és $L_2 = n \cdot l_2$. El volum total és $L = L_1 + L_2$. En equilibri, $L = 0$. Per consegüent,

$$0 = L = L_1 + L_2 = n \cdot (l_1 + l_2) = n \cdot \left(\frac{w \cdot (1-R)}{R \cdot (R-2)} + \frac{w}{2-R}\right) = \frac{n \cdot w}{R-2} \cdot \left(\frac{1-R}{R} - 1\right).$$

En conclusió, $\frac{1-R}{R} = 1$. Això és, la taxa d'interès (bruta) d'equilibri és $\boxed{R = 1/2.}$

Donat $R = 1/2$, $l_1 = -\frac{2}{3} \cdot w$ i $l_2 = \frac{2}{3} \cdot w$ (resultats que confirmen que el valor $R = \frac{1}{2}$ equilibra el mercat de préstecs).

L'assignació de consum d'equilibri és tal que, per a cada individu del grup 1, $(c_1, c_1{}') = \left(w, \frac{w}{3}\right)$ i, per a cada individu del grup 2, $(c_2, c_2{}') = \left(\frac{w}{2}, \frac{w}{6}\right)$.

Resposta a la qüestió 3

Si els grans no tinguessin la possibilitat (o el desig) de deixar herències i només es preocupessin del seu consum, el model resultant seria l'estàndard, on només els joves prenen decisions.

En aquest cas, les funcions de consum i d'estalvi de cada membre del grup 1 serien $c_1 = \frac{w}{2 \cdot R}$ i $s_1 = -\frac{w}{2 \cdot R}$ i les funcions de consum i d'estalvi de cada membre del grup 2 serien $c_2 = \frac{w}{2}$ i $s_2 = \frac{w}{2}$.

L'equilibri s'obtindiria de la condició $n \cdot s_1 + n \cdot s_2 = 0$. Així doncs, $\frac{w}{2 \cdot R} = \frac{w}{2}$ determina que $R = 1$ en equilibri. Els vectors de consum serien $(c_1, c_1{}') = (c_2, c_2{}') = \left(\frac{w}{2}, \frac{w}{2}\right)$. La Taula 1 resumeix els resultats amb i sense herències.

	grup	dotació	consum sense herències	amb herències		
				consum	herència	préstecs rebuts
individu gran	1	w	$w/2$	$w/3$		
	2	0	$w/2$	$w/6$		
individu jove	1	0	$w/2$	w	$w/3$	$2 \cdot w/3$
	2	w	$w/2$	$w/2$	$w/6$	$-2 \cdot w/3$

Taula 1. Consum en equilibri i dotació de cada individu en cada període t

Segons la Taula 1, amb herències, un individu jove del grup 1 (que no té dotació) aconsegueix consumir més que un individu jove del grup 2 (que té dotació). En concret, un jove del grup 1 consumeix w: $w/3$ prové de l'herència que rep i $2 \cdot w/3$ prové del mercat de préstecs.

Pel que fa a un jove del grup 2, comença amb una dotació w, rep herència de $w/6$ i presta $2 \cdot w/3$. De tot plegat, resulta un consum de $w/2$.

Respecte de la situació sense herències, els joves de grup 2 es queden igual en termes de consum. Els joves de grup 1 aconsegueixen augmentar el seu consum (de w a $w/2$). Tots els gran el redueixen, ja sigui de $w/2$ a $w/3$ o de $w/2$ a $w/6$.

A escala agregada, <u>les herències han incrementat les desigualtats</u>, tant en termes intra com intergeneracionals. D'una banda, sense herències, el consum total dels grans és $n \cdot \frac{w}{2} + n \cdot \frac{w}{2} = n \cdot w$ mentre que el consum total dels joves és $n \cdot \frac{w}{2} + n \cdot \frac{w}{2} = n \cdot w$. D'una altra, amb herències, el consum total dels grans és $n \cdot \frac{w}{3} + n \cdot \frac{w}{6} = \frac{n \cdot w}{2}$ en tant que el consum total dels joves és $n \cdot w + n \cdot \frac{w}{2} = \frac{3 \cdot n \cdot w}{2}$. Com a conseqüència, en el pas de la situació sense a la situació amb herències, el consum total dels grans es redueix un 50 % (d'$n \cdot w$ a $\frac{n \cdot w}{2}$) i el consum total dels joves augmenta un 50 % (d'$n \cdot w$ a $\frac{3 \cdot n \cdot w}{2}$).

Considerant el que succeeix dins de cada grup, sense herències, el consum total de cada grup és $n \cdot \frac{w}{2} + n \cdot \frac{w}{2} = n \cdot w$. Amb herències, el grup 1 passa a consumir $n \cdot w + n \cdot \frac{w}{3} = \frac{4 \cdot n \cdot w}{3}$ i el grup 2 passa a consumir $n \cdot \frac{w}{6} + n \cdot \frac{w}{2} = \frac{2 \cdot n \cdot w}{3}$. Això diu que el grup 1 incrementa el seu consum un 33,33 % al temps que el grup 2 el redueix també en un 33,33 %.

L'exemple suggereix, doncs, que <u>les herències es poden considerar un mecanisme generador o intensificador de desigualtat</u> (en les possibilitats de consum).