Lista de ejercicios 3 · Modelo de Solow y Swan

1. Teorema de Euler. Demuestra el teorema de Euler. [Sugerencia: partiendo de la definición de homogeneidad de grado h, deriva ambos lados de la ecuación con respecto al parámetro λ y considera el valor $\lambda = 1$; para la segunda parte del teorema, deriva ahora con respecto a K y divide por λ.]

2. Cobb-Douglas. Considera la función Cobb-Douglas $Y = F(A, K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, con $A > 0$ y $0 < \alpha < 1$.

(i) Comprueba si se satisfacen todas las condiciones impuestas sobre la función de producción en modelo (productividades, rendimientos, Inada).

(ii) Definiendo $y = \frac{Y}{L}$ y $k = \frac{K}{L}$, obtén la expresión correspondiente $y = f(k)$ (esto es, determina f).

(iii) Asumiendo mercados competitivos de K y L, indica la fórmula que expresa σ en términos de k y la que expresa ω en términos de k.

3. Función $f(k)/k$. En el caso sin crecimiento de la población ni progreso tecnológico, demuestra que $\frac{f(k)}{k}$ es una función decreciente de k.

4. Precios de los factores. (i) Suponiendo que no hay crecimiento de la población ni progreso tecnológico, explica porqué, si $k(1) < \bar{k}$, la secuencia de salarios $\{\omega(t)\}$ es una secuencia creciente y la secuencia $\{\sigma(t)\}$ de precios del factor capital es decreciente ($\bar{k} \neq 0$ es el valor de k en el estado estacionario). (ii) Muestra que $\{\omega(t)\}$ es decreciente y $\{\sigma(t)\}$ creciente si $k(1) > \bar{k}$.

5. Solución modelo. Considera el modelo de Solow sin crecimiento de la población ni progreso tecnológico con $y = k^{1/3}$, tasa de depreciación 0'1 y tasa de ahorro 0'4.

(i) Calcula los valores de la producción per cápita, el consumo per cápita, la inversión per cápita y la depreciación per cápita en el estado estacionario. Señala estos valores en una representación gráfica del modelo.

(ii) Indica en la representación gráfica cómo variarían esos valores si (a) la tasa de depreciación aumentara; (b) la tasa de ahorro aumentara; (c) se produjeran simultánemante (a) y (b).

(iii) Obtén la tasa de ahorro y el consumo per cápita correspondientes a la regla de oro. ¿Es la economía dinámicamente ineficiente si inicialment k es 20?

(iv) Representa gráficamente la tasa de crecimiento de k en función de k.

(v) Respón a las preguntas anteriores si la tasa de crecimiento de la población (en tanto por uno) es 0′1.

6. Análisis gráfico de estática comparativa. Muestra gráficamente el efecto sobre el capital per cápita $\bar{k}$ de estado estacionario (así como de la producción per cápita y el consumo per cápita de estado estacionario) si: (i) aumenta δ; (ii) aumenta $\mathbb{s}$; (iii) tiene lugar progeso tecnológico; (iv) ocurren al mismo tiempo (ii) y (iii); (v) ocurren al mismo tiempo (i) y (ii); (vi) disminuye δ y aumenta $\mathbb{s}$; y (vii) se produce un regreso tecnológico al mismo tiempo que disminuye $\mathbb{s}$.

7. Progreso tecnológico. Verifica que los tres tipos de progreso tecnológico neutral (en el sentido de Harrod, de Hicks y de Solow) son equivalentes en la función de producción Cobb-Douglas $F(A,K,L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, con $A > 0$ y $0 < \alpha < 1$.

8. Harrod-Domar. (i) En el modelo de Harrod-Domar cuando K es el factor limitante, calcula la tasa de crecimiento del capital per cápita si la población crece a la tasa (neta) $n > 0$. (ii) En el modelo de Harrod-Domar cuando L es el factor limitante y no crece, calcula la tasa de crecimiento del stock de capital.

9. Modelo de Solow y Swan con capital humano. Verifica que la expresión de la diapositva SS·52 que representa la condición $\Delta h(t) = 0$ es correcta.

10. Progreso tecnológico y crecimiento de la población. Considera el modelo de Solow con crecimiento de la población y progreso tecnológico con función de producción $Y(t) = A(t) \cdot K(t)^{1/2} \cdot L(t)^{1/2}$. La población crece a la tasa constante $n > 0$ y la tecnología se acumula a la tasa constante $a > 0$, de manera que $L(t+1) = (1+n) \cdot L(t)$ y $A(t+1) = (1+a) \cdot A(t)$. Define el capital per cápita como como $k(t) = \frac{K(t)}{A(t) \cdot L(t)}$ y la producción per cápita como $y(t) = \frac{Y(t)}{A(t) \cdot L(t)}$.

(i) Determina la ecuación en diferencias que establece la dinámica del capital per cápita, la fórmula del capital per cápita en el estado estacionario y la fórmula de la tasa de ahorro que cumple con la regla de oro.

(ii) Respón a las mismas preguntas si $a = n$.

11. Función de producción. Verifica que, para una función de producción Cobb-Douglas F, $F_{LL} \cdot L + F_{LK} \cdot K = 0$. Prueba que, para la expresión per cápita f de F, $\sigma = f'$ y $\omega = f - \sigma \cdot f'$.