Macroeconomia Avançada · Examen de 30 de gener de 2014

1. Hi ha un únic bé, que es pot produir mitjançant capital K i treball L. La funció de producció del bé és $Y_t = 2 \cdot K_t{}^{1/2} \cdot L_t{}^{1/2}$. Els mercats de capital i treball són competitius. Cada generació t està formada per n individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. Cada individu disposa de 3 unitats de treball en el primer període (quan són joves) i cap en el segon (quan són grans). La funció d'utilitat de cada individu és $u_t\big(c_t(t), c_t(t+1)\big) = c_t(t) \cdot \big(c_t(t+1)\big)^2$.

(i) Calcula l'estoc de capital de l'economia, el salari, el preu del capital i el vector de consum de cada individu d'estat estacionari.

Restricció pressupostària dels joves $\quad c_t + k_{t+1} = 3 \cdot \omega_t$

Restricció pressupostària dels grans $\quad c_{t+1} = \sigma_{t+1} \cdot k_{t+1}$

Restricció pressupostària vital $\quad c_t + \frac{c_{t+1}}{\sigma_{t+1}} = 3 \cdot \omega_t$

Objectiu de cada individu $\quad$ *maximitzar* $c_t \cdot c_{t+1}{}^2$

sotmès a $\quad c_t + \frac{c_{t+1}}{\sigma_{t+1}} = 3 \cdot \omega_t$

Lagrangià del problema $\quad L_t = c_t \cdot c_{t+1}{}^2 + \lambda_t \left[3 \cdot \omega_t - c_t - \frac{c_{t+1}}{\sigma_{t+1}}\right]$

Condicions de primer ordre

(i) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial c_t} = c_{t+1}{}^2 - \lambda_t \Rightarrow \lambda_t = c_{t+1}{}^2$

(ii) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial c_{t+1}} = 2 \cdot c_t \cdot c_{t+1} - \frac{\lambda_t}{\sigma_{t+1}} \Rightarrow \lambda_t = 2 \cdot \sigma_{t+1} \cdot c_t \cdot c_{t+1}$

(iii) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial \lambda_t} = 3 \cdot \omega_t - c_t - \frac{c_{t+1}}{\sigma_{t+1}} \Rightarrow c_t + \frac{c_{t+1}}{\sigma_{t+1}} = 3 \cdot \omega_t$

Combinant (i) i (ii), s'obté $\frac{c_{t+1}}{\sigma_{t+1}} = 2 \cdot c_t$. Substituint a (iii), $3 \cdot c_t = 3 \cdot \omega_t$. Per tant, $c_t = \omega_t$. Atès que $s_t = 3 \cdot \omega_t - c_t$, se segueix que $s_t = 2 \cdot \omega_t$.

Funció d'estalvi individual $\quad s_t = 3 \cdot \omega_t - c_t = 2 \cdot \omega_t$

Funció d'estalvi total del grup $\quad S_t = n \cdot s_t = 2 \cdot n \cdot \omega_t$

Salari $\quad \omega_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{1/2}$

Condició d'equilibri $\quad S_t = K_{t+1} \Rightarrow 2 \cdot n \cdot \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{1/2} = K_{t+1}$

Solució d'estat estacionari ($K = K_{t+1} = K_t$) $\quad 2 \cdot n \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} = K \Rightarrow 2 \cdot n = (K \cdot L)^{1/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot n^2 = K \cdot L \Rightarrow K = 4 \cdot n^2 / L$

Atès que $L = 3 \cdot n$, $\boxed{K = \frac{4}{3} n}$.

Salari d'estat estacionari $\omega = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} = \left(\frac{\frac{4}{3}\cdot n}{3\cdot n}\right)^{1/2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{2}{3}$

Preu del capital d'estat estacionari $\sigma_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \left(\frac{L_t}{K_t}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\omega_t} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\omega} = \frac{3}{2}$

Consum d'estat estacionari $c_t = \omega_t \Rightarrow c_{jove} = \omega = \frac{2}{3}$

$c_{t+1} = 2 \cdot c_t \cdot \sigma_{t+1} \Rightarrow c_{gran} = 2 \cdot c_{jove} \cdot \sigma = 2$

(ii) Calcula l'estoc de capital d'estat estacionari de l'economia si s'implementen les dues següents mesures. D'una banda, s'estableix un impost sobre el capital de manera que acumular k unitats de capital implica pagar, en el mateix període, $\tau \cdot k$ unitats del capital acumulat. D'una altra, la recaptació de l'impost en el període t es distribueix igualitàriament entre els individus que són grans en t.

Els joves ara destinen la quantitat $3 \cdot \omega_t$ del bé que obtenen a consumir, acumular capital i pagar l'impost. Per tant, $c_t + k_{t+1} + \tau \cdot k_{t+1} = 3 \cdot \omega_t$.

Restricció pressupostària dels joves $c_t + (1+\tau) \cdot k_{t+1} = 3 \cdot \omega_t$

Només els joves paguen l'impost. La recaptació total en el període t és $n \cdot \tau \cdot k_{t+1}$. Aquesta recaptació es divideix a parts iguals entre els grans del període t. Atès que n'hi ha n, cada gran rep $\tau \cdot k_{t+1}$. Això fa que la restricció pressupostària de cada gran sigui $c_{t+1} = \sigma_{t+1} \cdot k_{t+1} + \tau \cdot k_{t+1}$.

Restricció pressupostària dels grans $c_{t+1} = (\sigma_{t+1} + \tau) \cdot k_{t+1}$

Restricció pressupostària vital $c_t + \left(\frac{1+\tau}{\sigma_{t+1}+\tau}\right) \cdot c_{t+1} = 3 \cdot \omega_t$ (s'aïlla k_{t+1} de la restricció dels grans i se substitueix a la dels joves).

Per a simplificar els càlculs, sigui $x_{t+1} = \frac{1+\tau}{\sigma_{t+1}+\tau}$. La restricció vital seria $c_t + x_{t+1} \cdot c_{t+1} = 3 \cdot \omega_t$. L'apartat (i) representaria el cas particular $x_{t+1} = \frac{1}{\sigma_{t+1}}$, que derivaria de $\tau = 0$. L'anàlisi és anàloga a la de l'apartat (i). De fet, com x_{t+1} és un paràmetre per als individus, l'anàlisi és idèntica.

Objectiu de cada individu *maximitzar* $c_t \cdot c_{t+1}{}^2$

sotmès a $c_t + x_{t+1} \cdot c_{t+1} = 3 \cdot \omega_t$

Lagrangià del problema $L_t = c_t \cdot {c_{t+1}}^2 + \lambda_t[\,3 \cdot \omega_t - c_t - x_{t+1} \cdot c_{t+1}]$

Condicions de primer ordre

(i) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial c_t} = {c_{t+1}}^2 - \lambda_t \Rightarrow \lambda_t = {c_{t+1}}^2$

(ii) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial c_{t+1}} = 2 \cdot c_t \cdot c_{t+1} - \lambda_t \cdot x_{t+1} \Rightarrow \lambda_t = \frac{2 \cdot c_t \cdot c_{t+1}}{x_{t+1}}$

(iii) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial \lambda_t} = 3 \cdot \omega_t - c_t - x_{t+1} \cdot c_{t+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_t + x_{t+1} \cdot c_{t+1} = 3 \cdot \omega_t$

Combinant (i) i (ii), s'obté $2 \cdot c_t = x_{t+1} \cdot c_{t+1}$. Substituint a (iii), $3 \cdot c_t = 3 \cdot \omega_t$. Així doncs, $c_t = \omega_t$. Atès que $s_t = 3 \cdot \omega_t - c_t$, se segueix que $s_t = 2 \cdot \omega_t$.

Funció d'estalvi individual $s_t = 3 \cdot \omega_t - c_t = 2 \cdot \omega_t$

Funció d'estalvi total del grup $S_t = n \cdot s_t = 2 \cdot n \cdot \omega_t$

Salari $\omega_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{1/2}$

Condició d'equilibri $S_t = K_{t+1} \Rightarrow 2 \cdot n \cdot \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{1/2} = K_{t+1}$

Solució d'estat estacionari ($K = K_{t+1} = K_t$) $2 \cdot n \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} = K \Rightarrow 2 \cdot n = (K \cdot L)^{1/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot n^2 = K \cdot L \Rightarrow K = 4 \cdot n^2/L$

Atès que $L = 3 \cdot n$, $\boxed{K = \frac{4}{3}n}$.

☛ Alguna intuïció de per què l'impost no altera el resultat?

---

2. Hi ha un únic bé, que es pot produir mitjançant capital K i treball L. Hi ha dos grups d'individus, G1 i G2, cadascun format per 10 individus idèntics que viuen dos períodes consecutius. La funció d'utilitat de cada individu és $u_t\big(c_t(t), c_t(t+1)\big) = c_t(t) \cdot c_t(t+1)$. Els membres de G1 disposen de 8 unitats de treball en el primer període (quan són joves) i cap en el segon (quan són grans). Els membres de G2 disposen de 12 unitats del bé en el primer període i cap en el segon. No hi ha mercat de préstecs.

Els membres de G1 només poden obtenir el bé de joves venent part de la seva dotació de treball a canvi d'un salari de dues unitats del bé per unitat de treball. La manera en què el membres de G1 poden consumir de grans és tenir fills quan són joves. Cada fill implica un doble cost: esmerçar tant una unitat de treball com una unitat del bé. Per tant, la dotació inicial de treball es reparteix entre tenir fills i treballar i, a més, tenir f fills comporta invertir f unitats del bé. Cada fill tingut de jove garanteix al pare una unitat de consum de gran. Els fills viuen només un període i només treballen per als (són esclaus dels) seus pares.

Els membres de G2 només poden consumir de grans acumulant de joves part de la seva dotació del bé en forma de capital. Aquest capital s'empra en el següent període segons la funció de producció $Y_t = K_t \cdot L_t$, on K_t és l'estoc total de capital acumulat pel grup G2 i L_t és la quantitat total de treball que ofereixen els membres de G1. El consum de gran de cada membre de G2 és la producció total realitzada menys els salaris pagats tot dividit pel nombre de membres de G2.

(i) Calcula el nombre de fills que té cada membre de G1 i l'estoc de capital que acumula cada membre de G2.

Grup G1

Si un individu jove en el període t decideix tenir f_t fills, aleshores disposa de $8 - f_t$ unitats de treball a canvi de les quals obtenir un salari. La restricció pressupostària seria $c_t + f_t = \omega_t \cdot (8 - f_t)$. Reordenant, $c_t + (1 + \omega_t) \cdot f_t = 8 \cdot \omega_t$.

Restricció pressupostària dels joves $\quad c_t + (1 + \omega_t) \cdot f_t = 8 \cdot \omega_t$

Restricció pressupostària dels grans $\quad c_{t+1} = f_t$

Restricció pressupostària vital $\quad c_t + (1 + \omega_t) \cdot c_{t+1} = 8 \cdot \omega_t$

Tot i que $\omega_t = 2$, és interessant trobar la solució en funció de ω_t. El problema és com el de l'exercici 1(ii) amb $x_{t+1} = 1 + \omega_t$.

Objectiu de cada individu $\quad \textit{maximitzar} \; c_t \cdot c_{t+1}$

$\textit{sotmès a} \quad c_t + (1 + \omega_t) \cdot c_{t+1} = 8 \cdot \omega_t$

Lagrangià del problema $\quad L_t = c_t \cdot c_{t+1} + \lambda_t[8 \cdot \omega_t - c_t - (1 + \omega_t) \cdot c_{t+1}]$

Condicions de primer ordre

(i) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial c_t} = c_{t+1} - \lambda_t \Rightarrow \lambda_t = c_{t+1}$

(ii) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial c_{t+1}} = c_t - \lambda_t \cdot (1 + \omega_t) \Rightarrow \lambda_t = \frac{c_t}{1 + \omega_t}$

(iii) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial \lambda_t} = 8 \cdot \omega_t - c_t - (1 + \omega_t) \cdot c_{t+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_t + (1 + \omega_t) \cdot c_{t+1} = 8 \cdot \omega_t$

Combinant (i) i (ii), s'obté $c_t = (1 + \omega_t) \cdot c_{t+1}$. Substituint a (iii), $2 \cdot c_t = 8 \cdot \omega_t$. En conseqüència, $c_t = 4 \cdot \omega_t$. Sabent això, se segueix de $c_t = (1 + \omega_t) \cdot c_{t+1}$ que $c_{t+1} = \frac{4 \cdot \omega_t}{1 + \omega_t}$. Com per la restricció pressupostària dels grans $c_{t+1} = f_t$, la conclusió és que $f_t = \frac{4 \cdot \omega_t}{1 + \omega_t}$. Amb $\omega_t = 2$, $\boxed{f_t = \frac{8}{3}}$. El vector d'utilitats de cada individu seria $(u_{jove}, u_{gran}) = \left(\frac{64}{3}, u(\frac{8}{3})\right)$.

L'anterior era el camí llarg. Un camí curt consisteix a expressar consum present i futur en termes del nombre de fills i substituir a la funció d'utilitat. En aquest cas, es maximitza respecte del nombre de fills i s'obté el resultat directament.

De la restricció de joves $c_t = 16 - 3 \cdot f_t$

De la restricció de grans $c_{t+1} = f_t$

Funció d'utiliat $u_t = c_t \cdot c_{t+1} = (16 - 3 \cdot f_t) \cdot f_t$

Maximització d'utiliat $\frac{\partial u_t}{\partial f_t} = 16 - 6 \cdot f_t = 0 \Rightarrow f_t = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

Grup G2

Restricció pressupostària dels joves $c_t + k_{t+1} = 12$

La producció realitzada en el període $t+1$ és $K_{t+1} \cdot L_{t+1}$, on $K_{t+1} = 10 \cdot k_{t+1}$ i $L_{t+1} = 10 \cdot (8 - f_t) = \frac{160}{3}$. El salaris pagats en el període $t+1$ pugen a $\omega_t \cdot 10 \cdot (8 - f_t) = 2 \cdot \frac{160}{3} = \frac{320}{3}$.

Restricció pressupostària dels grans $c_{t+1} = \frac{1}{10} \cdot (K_{t+1} \cdot L_{t+1} - 2 \cdot L_{t+1}) = \frac{1}{3}(160 \cdot k_{t+1} - 32)$

Restricció pressupostària vital $c_t + \frac{3 \cdot c_{t+1} + 32}{160} = 12$ o bé $c_t + \frac{3}{160} \cdot c_{t+1} = 12 - \frac{1}{5} = \frac{59}{5}$

Objectiu de cada individu *maximitzar* $c_t \cdot c_{t+1}$

sotmès a $c_t + \frac{3}{160} \cdot c_{t+1} = \frac{59}{5}$

Lagrangià del problema $L_t = c_t \cdot c_{t+1} + \lambda_t \left[\frac{59}{5} - c_t - \frac{3}{160} \cdot c_{t+1}\right]$

Condicions de primer ordre

(i) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial c_t} = c_{t+1} - \lambda_t \Rightarrow \lambda_t = c_{t+1}$

(ii) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial c_{t+1}} = c_t - \lambda_t \cdot \frac{3}{160} \Rightarrow \lambda_t = \frac{160}{3} \cdot c_t$

(iii) $0 = \frac{\partial L_t}{\partial \lambda_t} = \frac{59}{5} - c_t - \frac{3}{160} \cdot c_{t+1} \Rightarrow c_t + \frac{3}{160} \cdot c_{t+1} = \frac{59}{5}$

Combinant (i) i (ii), s'obté $c_t = \frac{3}{160} \cdot c_{t+1}$. Substituint a (iii), $2 \cdot c_t = \frac{59}{5}$. Això és, $c_t = 5'9$. Per la restricció pressupostària de jove, $\boxed{k_{t+1} = 12 - c_t = 6'1}$.

(ii) Compara la utilitat de cada individu amb la què s'obtindria si existís mercat de préstecs però els membres de G1 no poguessin tenir fills.