Uno de dos economías y deuda pública

Hay dos economías, E1 y E2, inicialmente autárquicas y en las que se produce un único (el mismo) bien.

Descripción de la economía E1

• <u>Consumidores/trabajadores</u>. Cada generación t está formada por dos grupos, G1 y G2. Cada grupo consta de 60 miembros, que viven dos períodos. Cada uno de los miembros de G1 tiene la función de utilidad $u_t\big(c_t(t), c_t(t+1)\big) = 2 \cdot ln\, c_t(t) + ln\, c_t(t+1)$ y una dotación de factor trabajo $(1, 0)$: cuando joven, el individuo cuenta con una unidad de trabajo; cuando mayor, no cuenta con ninguna. Cada miembro de G2 tiene la función de utilidad $u_t\big(c_t(t), c_t(t+1)\big) = ln\, c_t(t) + 2 \cdot ln\, c_t(t+1)$ y una dotación de factor trabajo $(2, 1)$: cuando joven, el individuo cuenta dos unidades de trabajo; cuando mayor, cuenta con una.

• <u>Productores</u>. El trabajo es el único factor de producción. Son los individuos los que producen el bien en cada período mediante la función de producción $Y = F(L) = L$. El precio de L se normaliza en cada período a 1.

(i) [25 puntos] Calcula el tipo de interés de equilibrio de la economía E1 e indica el correspondiente vector de consumo de los individuos de cada grupo.

Dado que no hay capital, la única alternativa al consumo son los préstamos.

Grupo G1

Restricción presupuestaria de los jóvenes	$c_t + l_t = 1$
Restricción presupuestaria de los mayores	$c_{t+1} = R_t \cdot l_t$
Restricción presupuestaria vital	$c_t + \frac{c_{t+1}}{R_t} = 1$
Condición de tangencia	$\frac{c_{t+1}}{R_t} = \frac{c_t}{2}$
Función de demanda del bien (cuando joven)	$c_t = 2/3$
Función de ahorro individual	$s_t = 1 - \frac{2}{3} = 1/3$
Función de ahorro total del grupo G1	$S_t^1 = 20$

Grupo G2

Restricción presupuestaria de los jóvenes	$c_t + l_t = 2$
Restricción presupuestaria de los mayores	$c_{t+1} = R_t \cdot l_t + 1$

Restricción presupuestaria vital $c_t + \frac{c_{t+1}}{R_t} = 2 + \frac{1}{R_t}$

Condición de tangencia $\frac{c_{t+1}}{R_t} = 2 \cdot c_t$

Función de demanda del bien (cuando joven) $c_t = \frac{2}{3} + \frac{1}{3R_t}$

Función de ahorro individual $s_t = 2 - c_t = \frac{4}{3} - \frac{1}{3R_t}$

Función de ahorro total del grupo G2 $S_t^2 = 80 - \frac{20}{R_t}$

Equilibrio

Función de ahorro de la economía $S_t = S_t^1 + S_t^2 = 100 - \frac{20}{R_t}$

Condición de equilibrio $S_t = 0$

Tipo de interés de equilibrio (para todo t) $R_t = 1/5$

Vectores de consumo en equilibrio

Vector de cada miembro de G1 $(c_t, c_{t+1}) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{15}\right)$

Vector de cada miembro de G2 $(c_t, c_{t+1}) = \left(\frac{7}{3}, \frac{14}{15}\right)$

Descripción de la economía E2

• Consumidores/trabajadores. Cada generación t está formada por 25 individuos idénticos, que viven dos períodos. La dotación de factor trabajo de cada individuo es $(4, 0)$: cuando joven, el individuo cuenta con cuatro unidades de trabajo; cuando mayor, no cuenta con ninguna. La función de utilidad de cada individuo de la generación t es $u_t(c_t(t), c_t(t+1)) = c_t(t) \cdot c_t(t+1)$.

• Empresas. Las empresas son competitivas y todas iguales. La función de producción agregada es $Y(t) = K(t)^{1/2} \cdot L(t)^{1/2}$.

• Mercados. Aparte del mercado del bien, sólo hay dos mercados: el mercado de trabajo y el mercado de capital productivo. Ambos son competitivos.

(ii) [22 puntos] Determina la ecuación en diferencias que establece la trayectoria del stock de capital en la economía E2.

Dado que todos los individuos son iguales, no hay mercado de préstamos y la única alternativa al consumo es la acumulación de capital. Además, $L_t = 25 \cdot 4 = 100$.

Función de ahorro individual

Restricción presupuestaria de los jóvenes	$c_t + k_{t+1} = 4 \cdot \omega_t$
Restricción presupuestaria de los mayores	$c_{t+1} = \sigma_{t+1} \cdot k_{t+1}$
Restricción presupuestaria vital	$c_t + \frac{c_{t+1}}{\sigma_{t+1}} = 4 \cdot \omega_t$
Condición de tangencia	$\frac{c_{t+1}}{\sigma_{t+1}} = c_t$
Función de demanda del bien (cuando joven)	$c_t = 2 \cdot \omega_t$
Función de ahorro individual	$s_t = 4 \cdot \omega_t - c_t = 2 \cdot \omega_t$

Dinámica de acumulación de capital

Función de ahorro de la economía	$S_t = 25 \cdot s_t = 50 \cdot \omega_t$
Salario competitivo	$\omega_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = \frac{1}{2}\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{K_t}{100}\right)^{1/2} = \frac{{K_t}^{1/2}}{20}$
Función de ahorro de la economía	$S_t = \frac{5}{2} \cdot {K_t}^{1/2}$
Condición de equilibrio	$S_t = K_{t+1}$
Senda de acumulación de capital	$K_{t+1} = \frac{5}{2}{K_t}^{1/2}$

(iii) [6 puntos] Para E2, calcula el stock de capital de estado estacionario que sea positivo, así como el consumo de cada individuo, el capital per cápita, el precio del trabajo y el precio del capital en ese estado estacionario.

Estado estacionario $\bar{K} > 0$

Condición de estado estacionario	$K_{t+1} = K_t$
Valor del estado estacionario	$\bar{K} = \frac{5}{2}\bar{K}^{1/2} \Rightarrow \bar{K} = \frac{25}{4}$
Salario	$\bar{\omega} = \frac{1}{8}$
Precio del capital	$\sigma_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_t}{K_t}\right)^{1/2} = \frac{5}{{K_t}^{1/2}} \Rightarrow \bar{\sigma} = 2$
Consumo individual del estado estacionario	$\bar{c}_{joven} = \frac{1}{4} \qquad \bar{c}_{mayor} = \bar{c}_{joven} \cdot \bar{\sigma} = \frac{1}{2}$
Capital per cápita	$\frac{\bar{K}}{población} = \frac{25/4}{25} = \frac{1}{4}$

Emisión de bonos de deuda pública

En un cierto período t, el gobierno de E1 emite 5 bonos de deuda pública, pero no anuncia que los ingresos de la emisión se repartirán de manera igualitaria entre los miembros de G1 que son mayores en el período t (los mayores en t sin dotación de trabajo). Cada bono se vende a un precio p (en unidades del bien) y paga al comprador 1 unidad del bien en el siguiente período.

(iv) [20 puntos] Calcula (a) la transferencia τ que recibiría cada miembro de G1 y (b) el precio de venta de los bonos si los compradores de los bonos pertenecen a la economía E1.

Que el gobierno no anuncie el uso que se dará a los ingresos de la emisión significa que los individuos tienen en cuenta la posibilidad de comprar bonos pero no incorporan en sus restricciones presupuestarias la transferencia que el gobierno hace a los miembros mayores de G1.

Restricciones presupuestarias cuando los miembros de G1 pueden comprar bonos

Restricción presupuestaria de los jóvenes	$c_t + l_t + p_t \cdot b_t = 1$
Restricción presupuestaria de los mayores	$c_{t+1} = R_t \cdot l_t + b_t$
Restricción presupuestaria vital	$c_t + \frac{c_{t+1}}{R_t} = 1 + b_t\left(\frac{1}{R_t} - p_t\right)$
Condición de arbitraje préstamos-bonos	$R_t = \frac{1}{p_t}$

Como consecuencia, la restricción presupuestaria vital de cada miembro de G1 es $c_t + \frac{c_{t+1}}{R_t} = 1$: la misma que en el apartado (i). La misma conclusión es válida para los miembros de G2: su restricción presupuestaria, una vez incorporada de condición de arbitraje, es la misma que en (i): $c_t + \frac{c_{t+1}}{R_t} = 2 + \frac{1}{R_t}$.

De lo anterior se deduce que las funciones de ahorro individuales y agregadas no se modifican. En particular, la función de ahorro total sigue siendo $S_t = S_t^1 + S_t^2 = 100 - \frac{20}{R_t}$.

Equilibrio (t es el período en que se emiten los bonos)

Función de ahorro de la economía	$S_t = 100 - \frac{20}{R_t}$
Condición de equilibrio	$S_t = p_t \cdot B$ (con $B = 5$ y $p_t = \frac{1}{R_t}$)
Tipo de interés de equilibrio	$R_t = 1/4$
Precio de los bonos	$p_t = \frac{1}{R_t} = 4$
Recaudación por la venta de bonos	$p_t \cdot B = 4 \cdot 5 = 20$
Transferencia a cada mayor de G1 (60)	$\tau = \frac{p_t \cdot B}{60} = \frac{1}{3}$

(v) [4 puntos] Tomando el apartado (i) como situación inicial, explica el cambio que experimenta el tipo de interés de equilibrio.

La emisión de bonos es una demanda indirecta de préstamos. Un desplazamiento hacia la derecha de la función de demanda de préstamos en un mercado competitivo estándard tiende a provocar un aumento del tipo de interés. Los resultados son consistentes con esta intuición: el tipo de interés aumenta de $1/5 = 0'20$ a $1/4 = 0'25$.

(vi) <u>Opcional</u>. Calcula la transferencia $\tilde{\tau}$ que recibiría cada miembro de G1 si los bonos los compran los integrantes de la economía E1 y el gobierno anuncia el destino de los ingresos de la emisión.

La diferencia con respecto al caso anterior es que la restricción presupuestaria de los mayores de G1 incluye la transferencia: $c_{t+1} = R_t \cdot l_t + b_t + \tilde{\tau}$. Como resultado, la función de consumo de cada miembro de G1 pasa a ser

$$c_t = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\tilde{\tau}}{R_t}$$

y la correspondiente función de ahorro

$$s_t = 1 - c_t = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\tilde{\tau}}{R_t}.$$

Las funciones de ahorro de los miembros de G2 no se ven afectadas puesto que ninguno de ellos recibe la transferencia. Así pues, la nueva función de ahorro total es

$$S_t = 60\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\tilde{\tau}}{R_t}\right) + \left(80 - \frac{20}{R_t}\right) = 100 - \frac{20 + 2\tilde{\tau}}{R_t}.$$

En equilibrio, $S_t = p_t \cdot B$. Por tanto, $100 - \frac{20+2\tilde{\tau}}{R_t} = \frac{1}{R_t} \cdot 5$. Por otro lado, $\tilde{\tau} = \frac{p_t \cdot B}{60} = \frac{5}{60 \cdot R_t} = \frac{1}{12 \cdot R_t}$. En resumen, $100 = \frac{25}{R_t} + \frac{2\tilde{\tau}}{R_t} = \frac{25}{R_t} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(R_t)^2}$. Multiplicando todo por $6 \cdot (R_t)^2$,

$$600 \cdot {R_t}^2 - 150 \cdot R_t - 1 = 0\,.$$

La solución con $R_t > 0$ es $R_t = \frac{1}{8} + \sqrt{\frac{83}{4800}} \approx 0'125 + 0'13149 = 0'25649$.

Moraleja: el tipo de interés és mayor cuando el gobierno anuncia qué va a hacer con lo que obtiene por la venta de los bonos (política hecha pública en todos sus detalles) que cuando oculta esa información (política no anunciada o poco transparente). En la medida en que el precio de los bonos es la inversa del tipo de interés, una política imperfectamente conocida por el público genera más ingresos que una política conducida transparentemente. Antes (sin transparencia), $p_t = 4$; ahora (con transparencia), $p_t \approx \frac{1}{0'25649} \approx 3'898$. Si el gobierno pretende maximizar el ingreso por la emisión de bonos, la mejor opción para el gobierno es engañar al público no revelando todos los extremos de la política aplicada.

(vii) [23 puntos] Si los compradores de los bonos pertenecieran a la economía E2, calcula la transferencia τ' que, en el estado estacionario de E2, recibiría cada miembro de G1, y el precio de los bonos. Explica la diferencia con respecto a la situación descrita en (iv).

De manera análoga al caso del apartado (iv), la inclusión de los bonos no altera las restricciones presupuestarias, si se asume la condición de arbitraje entre inversión en bonos e inversión en capital productivo: $\sigma_{t+1} = \frac{1}{p_t}$. Por consiguiente, la función de ahorro total es la misma que en el apartado (ii): $S_t = \frac{5}{2} \cdot K_t^{1/2}$.

Sin embargo, la condición de equilibrio ahora es $S_t = K_{t+1} + p_t \cdot B$, donde $B = 5$ y $p_t = \frac{1}{\sigma_{t+1}}$. Resumiendo:

$$\frac{5}{2} \cdot K_t^{1/2} = K_{t+1} + \frac{5}{\sigma_{t+1}}.$$

Sabiendo que $\sigma_{t+1} = \frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{L_{t+1}}{K_{t+1}}\right)^{1/2} = \frac{5}{K_{t+1}^{1/2}}$,

$$\frac{5}{2} \cdot K_t^{1/2} = K_{t+1} + K_{t+1}^{1/2}.$$

Si el problema informara sobre el valor de K_t (que es conocido en el período t por cuanto se determina en $t-1$), se podría obtener el valor de K_{t+1} empleando la expresión anterior.

Conociendo K_{t+1}, podría averiguarse σ_{t+1}. Con σ_{t+1}, podría determinarse p_t. Y con p_t, podría calcularse τ', que es igual a $5p_t/60$.

El enunciado propone como alternativa considerar el valor $\bar{K}$ del stock de capital en el estado estacionario. Este valor se obtendría resolviendo

$$\frac{5}{2} \cdot \bar{K}^{1/2} = \bar{K} + \bar{K}^{1/2}\,.$$

Específicamente, $\bar{K} = \frac{9}{4}$ [esto da respuesta a la pregunta del apartado (viii)]. En consecuencia, $\bar{\sigma} = \frac{5}{\bar{K}^{1/2}} = \frac{10}{3}$ y $\bar{p} = \frac{1}{\bar{\sigma}} = \frac{3}{10}$. En este caso, los ingresos por la venta de los bonos son $\frac{3}{10} \cdot 5 = 1'5$ y $\tau' = \left(\frac{3}{10} \cdot 5\right)/60 = \frac{1}{40}$. Está claro que el recurso al mercado internacional genera una menor transferencia: en (iv), la transferencia era $\frac{1}{3}$ (fruto de unos ingresos de 20); ahora, la transferencia es $\frac{1}{40}$ (fruto de unos ingresos de $1'5$).

<u>Intuición del resultado</u>. Según se mostró en (iii), en el estado estacionario de E2, la tasa de interés implícita (el precio del capital) es $\bar{\sigma} = 2$; en cambio, en E1, según se mostró en (i), es $1/5$. Dada la relación inversa entre el precio del bono y el tipo de interés, la opción más atractiva para el gobierno de E1 es emitir los bonos en la economía con un menor tipo de interés (en este caso, la economía propia E1). De hecho, la demanda de ahorro que realiza el gobierno de E1 en E2 produce el mismo efecto que se encontró en (iii): subida del tipo de interés (el precio del capital aumenta, en estado estacionario, de 2 a $\frac{10}{3}$). Esta subida agrava el efecto adverso sobre el precio del bono.

(viii) <u>Opcional</u>. En el caso del apartado (vi), ¿cuál seria el stock de capital de E2 en el estado estacionario (en el que el stock es positivo)?