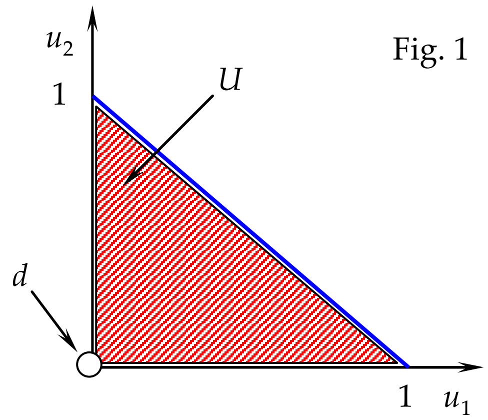
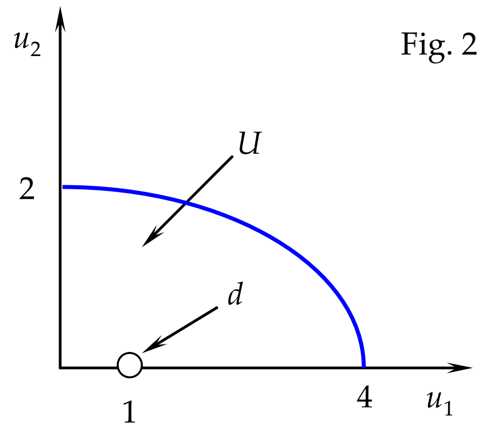
Negociació (*bargaining*)

http://en.wikipedia.org/wiki/Bargaining_Problem

Joc de negociació amb dos jugadors

Un joc (o problema) de negociació amb dos jugadors és un parell (U, d), on U és un subconjunt compacte (tancat i afitat) i convex d'$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ i on $d \in U$. El conjunt U representa el conjunt de vectors de pagaments (u_1, u_2) que són factibles i d representa el punt de desacord: el vector de pagaments que obtenen els jugadors si no arriben a cap acord.



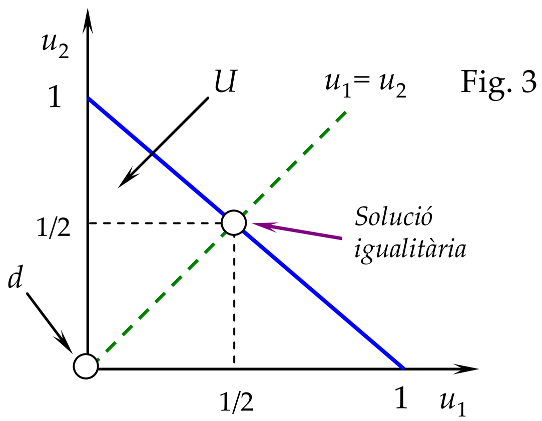


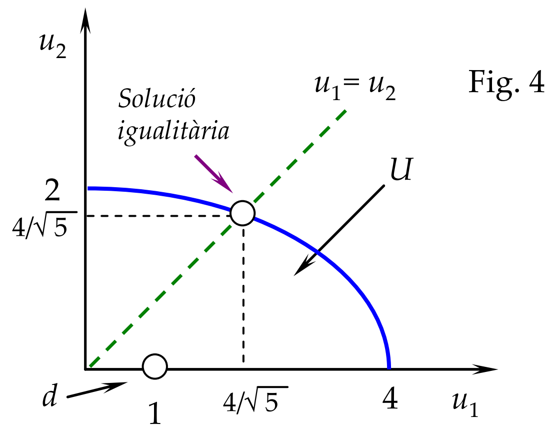
Per exemple, el parell (U, d) tal que $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \colon u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 \text{ i } u_1 + u_2 \leq 1\}$ i $d = (0, 0)$ es pot interpretar com el joc de negociació on dos individus s'han de repartir una unitat de manera que ningú no obté res si no s'arriba a cap acord. La Fig. 1 representa aquest joc. La Fig. 2 mostra el joc de negociació on $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \colon u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 \text{ i } (u_1)^2 + 4(u_2)^2 \leq 16\}$ i $d = (1, 0)$

Solució d'un joc de negociació amb dos jugadors

Una solució per als jocs de negociació amb dos jugadors és una funció s que assigna a cada joc de negociació (U, d) un membre $s(U, d) = (s_1, s_2)$ del conjunt U.

La interpretació és que $s(U, d)$ representa l'acord dels jugadors sobre quin punt triar del conjunt U de vectors factibles de pagaments. Per exemple, la solució igualitària assignaria amb (U, d) el punt sobre la frontera d'U que intersecta la diagonal principal $u_1 = u_2$. Les Fig. 3 i 4 mostren la solució igualitària dels jocs representats, respectivament, a les Fig. 1 i 2.





Una altra solució seria la solució igualitària ajustada pel punt de desacord: el punt d'intersecció de la frontera d'U amb la diagonal $u_1 = u_2$ que passa pel punt de desacord d.

Axiomes de la solució de Nash

Una manera de construir solucions consisteix a seleccionar un conjunt de propietats que es consideren raonables per a després identificar totes les solucions que les satisfan. John F. Nash, Jr. (1950) va proposar les següents propietats.
http://en.wikipedia.org/wiki/Nash_bargaining_game

• Pareto eficiència (P). Segons P, la solució (s_1, s_2) del joc (U, d) es troba a la frontera (superior dreta) d'U: si (s_1, s_2) és solució, llavors no existeix $(u_1, u_2) \in U$ tal que $u_1 > s_1$ i $u_2 > s_2$.

P expressa la idea que la solució d'un joc de negociació ha d'exhaurir les possibilitats d'obtenir més pagaments per a tots dos jugadors.

• Simetria (S). Suposem que el joc (U, d) satisfà dues condicions: (i) $d_1 = d_2$; i (ii) $(u_1, u_2) \in U$ si i només si $(u_2, u_1) \in U$. Aleshores la solució (s_1, s_2) del joc (U, d) satisfà $s_1 = s_2$.

Un joc és simètric si satisfà (i) els pagaments del punt de desacord són iguals per als dos jugadors i (ii) intercanviant els pagaments d'un vector d'U el resultat continua sent un vector d'U. Per exemple, el joc de la Fig. 1 és simètric, però el de la Fig. 2 no. Encara que féssim $d = (0, 0)$ al joc de la Fig. 2, el joc no seria simètric, atès que $(4, 0) \in U$ però $(0, 4) \notin U$. L'axioma S diu que, en un joc simètric, els jugadors reben el mateix pagament en la solució.

Si exigim els axiomes P i S, llavors la solució del joc de la Fig. 1 és la solució igualitària representada en la Fig. 3. D'una banda, per P, la solució (s_1, s_2) s'ha de trobar a la frontera; això és, s'ha de tenir que $s_1 + s_2 = 1$, amb $s_1 \geq 0$ i $s_2 \geq 0$. De l'altra, per S, la solució (s_1, s_2) ha de satisfer $s_1 = s_2$. Així doncs, se segueix d'$s_1 + s_2 = 1$ i $s_1 = s_2 \geq 0$ que $s_1 = s_2 = ½$.

• Invariança a transformacions lineals (T). El joc (U', d') és una transformació lineal del joc (U, d) si existeixen nombres reals $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, b_1 i b_2 tals que: (i) U' és el conjunt de parells $(a_1u_1 + b_1, a_2u_2 + b_2)$, on $(u_1, u_2) \in U$; i (ii) $d' = (a_1d_1 + b_1, a_2d_2 + b_2)$. Si (U', d') és una transformació lineal del joc (U, d), amb $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, b_1 i b_2 fent la transformació, i si (s_1, s_2) és la solució del joc (U, d), aleshores la solució del joc (U', d') és $(a_1s_1 + b_1, a_2s_2 + b_2)$.

T diu que la solució d'un joc obtingut per transformació lineal d'un altre s'obté transformant linealment la solució del joc d'origen. Per exemple, considerem els jocs (U, d) i (U', d') tals que $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\colon u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 \text{ i } u_1 + u_2 \leq 1\}$, $d = (0, 0)$, $d' = (1, 3)$ i $U' = \{(u_1', u_2') \in \mathbb{R}^2\colon u_1' \geq 0,\ u_2' \geq 0 \text{ i } u_1'/2 + u_2' \leq 9/2\}$. Llavors (U', d') és una transformació lineal d'(U, d), atès que les transformacions $u_1' = 2u_1 + 1$ i $u_2' = u_2 + 3$ permeten passar d'U' a U i de d a d'. Per tant, si T se satisfà i (s_1, s_2) soluciona (U, d), aleshores $(2s_1 + 1, s_2 + 3)$ soluciona (U', d'). En particular, si se satisfan P, S i T, la solució del joc (U', d') serà $(2, 7/2)$.

• Independència d'alternatives irrellevants (I). Suposem que els jocs (U, d) i (U', d') satisfan $U' \subseteq U$ i $d' = d$, de manera que (U', d') s'obté d'(U, d) restringint U. Si la solució (s_1, s_2) del joc (U, d) pertany a U', aleshores (s_1, s_2) és també la solució del joc (U', d'). Formalment, si $U' \subseteq U$ i $s(U, d) \in U'$, aleshores $s(U', d) = s(U, d)$: si restringim el joc a un subconjunt U' d'U que conté la solució del joc (U, d), aleshores el joc (U', d) té la mateixa solució que el joc (U, d).

L'axioma I diu que si la solució del joc (U, d) pertany al subconjunt U' d'U, aleshores tots els vectors del conjunt $U \setminus U'$ es poden considerar irrellevants. Per això, quan els eliminem i s'obté el joc (U', d), la solució no hauria de canviar. Per exemple, la solució igualitària satisfà l'axioma I. Com a il·lustració, si treiem una part del conjunt U del joc de la Fig. 3 a la qual pertanyi el vector (½, ½), llavors la solució del nou joc continuarà essent (½, ½).

Solució de Nash per als jocs de negociació (*Nash bargaining solution*)
La <u>solució de Nash</u> (n_1, n_2) d'un joc de negociació amb dos jugadors és la solució del problema

$$\begin{array}{llll} \textit{maximitzar} & (u_1 - d_1)(u_2 - d_2) & \textit{sotmès a} & (u_1, u_2) \in U \\ \textit{respecte d'}u_1 \textit{ i } u_2 & & & u_1 \geq d_1 \text{ i } u_2 \geq d_2 \end{array}$$

Geomètricament, (n_1, n_2) és el <u>punt de tangència entre la frontera d'U i la hipèrbola més allunyada de l'origen</u> de la família d'hipèrboles $(u_1 - d_1)(u_2 - d_2) = k$, on k és una constant i les rectes $u_1 = d_1$ i $u_2 = d_2$ són les asímptotes. Les Fig. 5 i 6 mostren la solució de Nash per als jocs de les Fig. 1 i 2, respectivament.

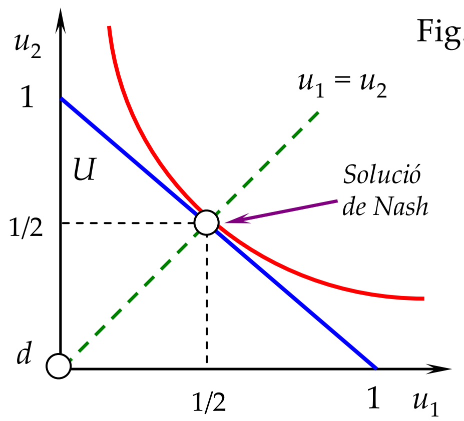


Fig. 5

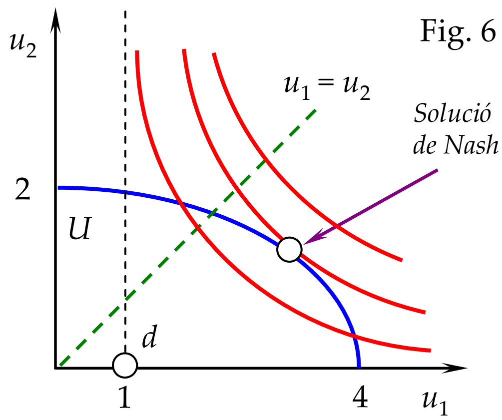


Fig. 6

Caracterització axiomàtica de la solució de Nash
La solució de Nash és l'única solució dels jocs de negociació amb dos jugadors que satisfà P, I, T i S.

Monotonia
Una solució dels jocs de negociació és <u>monòtona</u> si, per a tot joc (U, d) i superconjunt U' d'U, les solucions (s_1, s_2) del joc (U, d) i (s_1', s_2') del joc (U', d) satisfan $s_1' \geq s_1$ i $s_2' \geq s_2$. Així, $U' \supseteq U$ implica que, per a tot $i \in \{1, 2\}$, $s_i(U', d) \geq s_i(U, d)$.

<u>La monotonia diu que si U es fa més gran, en la nova solució ningú no perd respecte de la solució amb U</u>: més a repartir, ningú no empitjora. Un tret de <u>la solució de Nash</u> és que <u>no és monòtona</u>. Les Fig. 7 i 8 ho demostren. La Fig. 7 representa un problema de <u>bancarrota</u>, on una empresa fa fallida i dos creditors de l'empresa s'han de repartir el valor v de l'empresa, que és insuficient per a compensar els deutes de l'empresa amb els dos creditors. A la Fig. 7, v és el valor de l'empresa i a_i representa el que l'empresa adeuta al jugador i, on $a_1 + a_2 > v$. Amb $d = (0, 0)$, la solució de Nash és $(n_1, n_2) = (v/2, v/2)$. Aquesta solució no té en compte que l'empresa pot deure més a un jugador que a l'altre. Per exemple, si $a_1 > a_2$, seria raonable que 1 rebés una proporció més gran de v que 2. Segons la solució de Nash, tots dos jugadors reben la mateixa proporció del valor de l'empresa.

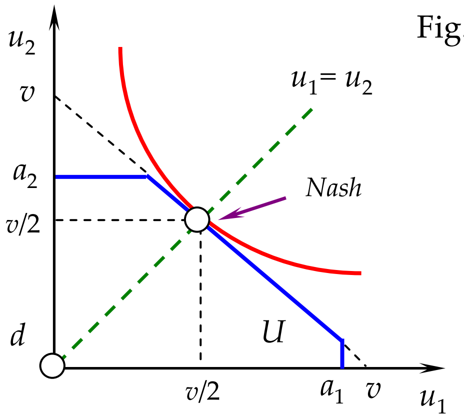


Fig. 7

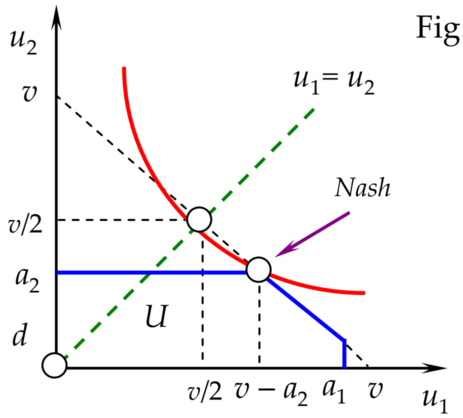


Fig. 8

Suposem que la Fig. 8 representa el joc inicial. En aquest cas, la solució de Nash satisfà $(n_1, n_2) = (v - a_2, a_2)$: el jugador 2 rep tot el valor del seu deute a_2 i el jugador 1 rep el valor restant $v - a_2$ (insuficient per a saldar el deute a_1). Imaginem que es passa del joc de la Fig. 8 al joc de la Fig. 7. El punt de desacord continua sent el mateix, però l'antic U és un subconjunt del nou U. Si la solució de Nash fos monòtona, cap jugador no rebria menys al nou joc. Però la solució de Nash del nou joc, representada a la Fig. 7, dóna menys al jugador 1: a la Fig. 8, 1 rep $v - a_2 > v/2$ (atès que, a la Fig. 8, $a_2 < v/2$), però a la Fig. 7 rep $v/2$. Així, un engrandiment d'U mantenint constant d perjudica al jugador 1, fet que contradiu la propietat de monotonia.

Solució de Kalai-Smorodinsky (1975), o solució KS, per als jocs de negociació

La solució (k_1, k_2) de Kalai-Smorodinsky (Ehud Kalai i Meir Smorodinsky) és el punt sobre la frontera (nord-est) d'U que intersecta la recta $u_2 - d_2 = k(u_1 - d_1)$ on k és el quocient entre el valor màxim d'u_2 que es pot assolir dins d'U i el valor màxim d'u_1 que es pot assolir dins d'U.

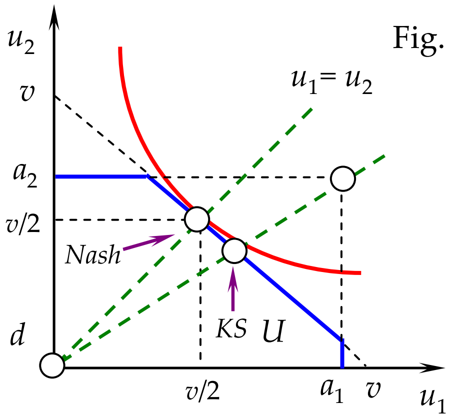


Fig. 9

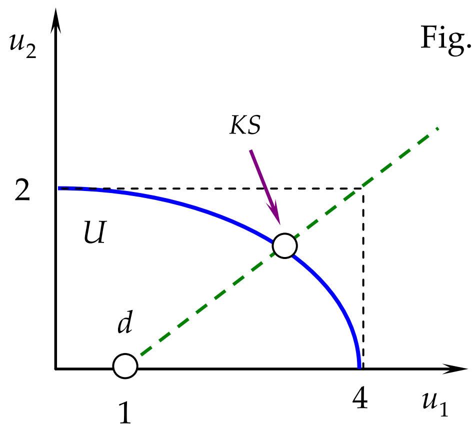


Fig. 10

La Fig. 9 il·lustra com obtenir gràficament la solució. En aquest cas, el valor màxim d'u_2 que es pot assolir dins d'U és a_2 i el valor màxim d'u_1 que es pot assolir dins d'U és a_1. Per tant, atès que $d = (d_1, d_2) = (0, 0)$, la recta $u_2 - d_2 = k(u_1 - d_1)$ pren la forma $u_2 = a_2 \cdot u_1 / a_1$. De manera equivalent, aquesta recta és la que uneix els punts d de desacord i el punt (a_1, a_2). La Fig. 9 mostra que la solució KS dóna un pagament superior al jugador 1 que la solució de Nash, en consonància amb el fet que el deute de l'empresa amb 1 és superior al deute de l'empresa amb 2 (fet que justificaria que 1 rebés més del valor de l'empresa que 2). La Fig. 10 mostra com trobar gràficament la solució KS al joc de la Fig. 2.

Característiques de la solució de Kalai-Smorodinsky

- És una solució monòtona. Satisfà els axiomes P i T. No satisfà l'axioma d'independència I.
- Si el joc es simètric, coincideix amb la solució de Nash.

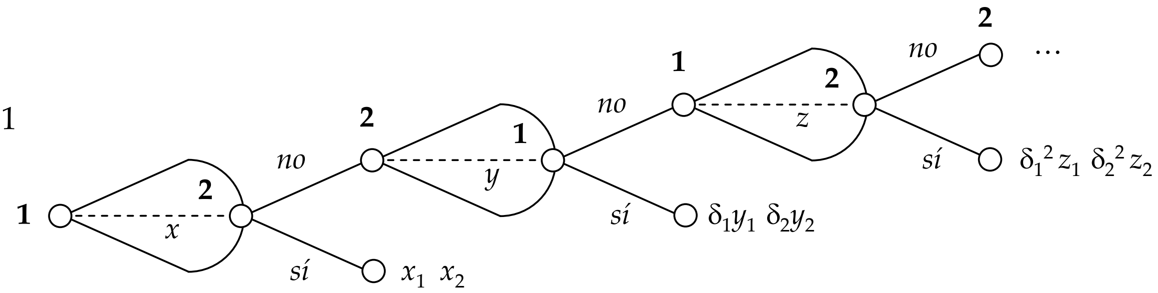
El joc de l'ultimàtum http://en.wikipedia.org/wiki/Ultimatum_game

Dos jugadors s'han de repartir el valor 1. El jugador 1 inicialment fa una proposta $x = (x_1, x_2)$, on $x_1 + x_2 = 1$. El jugador 2 rep la proposta i decideix si l'accepta o no. Si no l'accepta, el vector de pagaments és (0, 0). En l'únic equilibri perfecte en subjocs d'aquest joc, el jugador 1 fa inicialment la proposta (1, 0) i el jugador 2 accepta totes les propostes del jugador 1.

El model d'Ariel Rubinstein (1982) de negociació seqüencial

Rubinstein proposa la següent extensió del joc de l'ultimàtum. Si un jugador rebutja una proposta, fa a continuació una nova proposta, de manera que el joc es transforma en una seqüència (potencialment infinita) de propostes i contrapropostes. A més, el pagament resultant per al jugador $i \in \{1, 2\}$ si s'accepta una proposta en l'etapa t es multiplica per δ_i^t, on $\delta_i \in (0, 1)$ és el factor de descompte del jugador i (anomenant "etapa 0" l'etapa inicial).
http://en.wikipedia.org/wiki/Rubinstein_bargaining_model

Fig. 11



La Fig. 11 representa aquest model. En l'etapa 0, el jugador fa una proposta x de repartiment. El jugador 2 l'accepta o la rebutja. Si la rebutja, es passa a l'etapa 1, on el jugador 2 fa una altra proposta y. A continuació, el jugador 1 l'accepta o la rebutja. Si l'accepta, el vector de pagaments és $(\delta_1 y_1, \delta_2 y_2)$. Si la rebutja, s'entra en l'etapa 2, on el jugador 1 torna a fer una altra proposta z. Si el jugador 2 l'accepta, el vector de pagaments és $(\delta_1\delta_1 z_1, \delta_2\delta_2 z_2)$. Si la rebutja, es passa a l'etapa 4… i així successivament.

Solució del model de negociació de Rubinstein

El model de negociació de propostes alternatives de Rubinstein té un únic equilibri perfecte en subjocs, definit per les propostes $x = \left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$ i $y = \left(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right)$ tals que:

(i) el jugador 1 sempre proposa x;

(ii) el jugador 1 sempre accepta una proposta p si i només si $p_1 \geq y_1 = \frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}$;

(iii) el jugador 2 sempre proposa y; i

(iv) el jugador 2 sempre accepta una proposta p si i només si $p_2 \geq x_2 = \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}$.

Per tant, el vector de pagaments de l'únic equilibri perfecte s'obté quan el jugador 1 inicialment proposa x i el jugador 2 accepta la proposta. Per a il·lustrar d'on surten els valors que defineixen les propostes x i y, suposem que els jugadors fan servir estratègies estacionàries: cada jugador fa sempre la mateixa proposta i accepta qualsevol proposta que sigui igual o superior a algun determinat llindar. En particular, suposem que hi ha propostes α i α' tals que 1 sempre fa la proposta α i accepta qualsevol proposta p amb $p_1 \geq \alpha'_1$, on α'_1 marca el llindar d'acceptació del jugador 1. De manera anàloga, suposem que hi ha propostes β i β' tals que 2 sempre fa la proposta β i accepta qualsevol proposta p amb $p_2 \geq \beta'_2$, on β'_2 marca el llindar d'acceptació del jugador 2.

En un equilibri perfecte en subjocs és raonable esperar que $\beta_1 \geq \alpha'_1$: la proposta del jugador 2 satisfà el llindar d'acceptació del jugador 1. De manera similar, $\alpha_2 \geq \beta'_2$: la proposta del jugador 1 satisfà el llindar d'acceptació del jugador 2. Si tinguéssim $\beta_1 > \alpha'_1$, el jugador 2 podria millorar el seu pagament oferint una mica menys de β_1 però una mica més d'α'_1. Per tant, s'ha de tenir $\beta_1 = \alpha'_1$. El mateix raonament s'aplica a la desigualtat $\alpha_2 \geq \beta'_2$: s'ha de tenir $\alpha_2 = \beta'_2$. Així doncs, assumim l'existència de propostes α i β tals que:

(i) el jugador 1 sempre proposa α i accepta la proposta p si i només si $p_1 \geq \beta_1$; i
(ii) el jugador 2 sempre proposa β i accepta la proposta p si i només si $p_2 \geq \alpha_2$.

Ara considerem qualsevol subjoc que arrenca amb la decisió de 2 sobre la proposta α d'1 i calculem els pagaments suposant que tot s'inicia en el subjoc. Si 2 accepta la proposta, rep α_2. Si 2 rebutja la proposta α d'1, a continuació, per (ii), 2 proposarà β i, per (i), 1 l'acceptarà. Això farà que 2 rebi $\delta_2\beta_2$, perquè des de l'arrel del subjoc fins a l'acceptació del jugador 1 ha passat una etapa.

Atès que busquem un equilibri perfecte en subjocs, s'ha de tenir que $\alpha_2 = \delta_2\beta_2$. Si $\alpha_2 > \delta_2\beta_2$, 1 està oferint massa a 2: oferint qualsevol valor entre α_2 i $\delta_2\beta_2$, 2 encara acceptaria la proposta d'1 i 1 s'emportaria més amb la nova proposta. Si $\alpha_2 < \delta_2\beta_2$, aleshores oferir $\delta_2\beta_2$ en comptes d'α_2 domina feblement a oferir α_2. D'una banda, si 2 no accepta, atès que 1 acaba acceptant la proposta β que 2 fa a continuació, 1 s'emportaria el mateix que si ofereix α_2: $\delta_1\beta_1 = \delta_1(1 - \beta_2) = \delta_1 - \delta_1\beta_2$. D'altra banda, si 2 accepta $\delta_2\beta_2$, aleshores 1 rep $1 - \delta_2\beta_2$. Verifiquem que $1 - \delta_2\beta_2 > \delta_1 - \delta_1\beta_2$. Això passa si i només si $\beta_2 < (1 - \delta_1)/(\delta_2 - \delta_1)$. Per hipòtesi, $\delta_2 < 1$. En conseqüència, $1 - \delta_1 > \delta_2 - \delta_1$ i, per tant, $(1 - \delta_1)/(\delta_2 - \delta_1) > 1$. En resum, per a què la proposta $\delta_2\beta_2$ domini feblement la proposta α_2 quan $\alpha_2 < \delta_2\beta_2$ cal que β_2 sigui més petit que un número més gran que 1. Per definició, $\beta_2 \leq 1$, de manera que queda demostrat que proposar $\delta_2\beta_2$ domina feblement proposar α_2 quan $\alpha_2 < \delta_2\beta_2$.

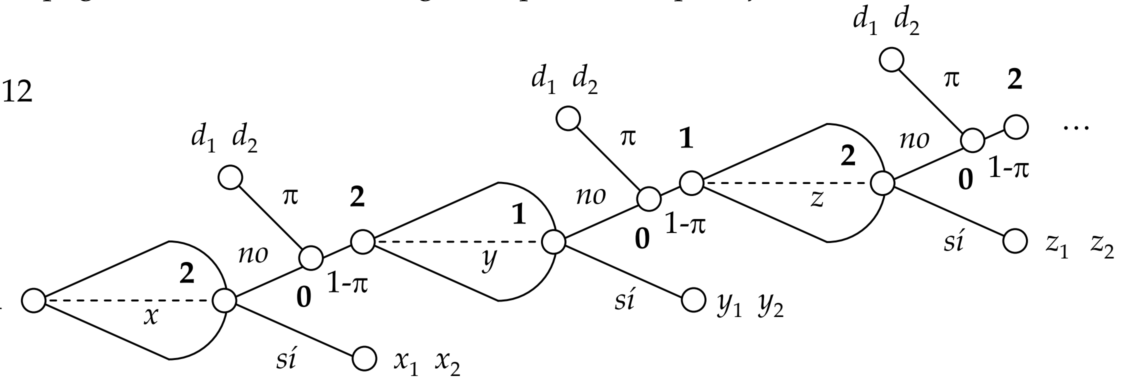
Per simetria entre 1 i 2, aquest mateix raonament aplicat al cas on el subjoc arrenca amb una decisió d'1 sobre la proposta β de 2 porta a la conclusió que $\beta_2 = \delta_1\alpha_1$. Combinant les equacions $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$, $\alpha_2 = \delta_2\beta_2$ i $\beta_2 = \delta_1\alpha_1$, s'arriba a la proposta $\alpha = x$ i $\beta = y$ que defineix l'únic equilibri perfecte en subjocs.

Quan δ_1 i δ_2 són valors molt propers a zero (jugadors molt impacients), $x \approx (1, 0)$ i $y \approx (0, 1)$, que es corresponen amb les solucions del joc de l'ultimàtum. D'altra banda, quan $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ (factors de descompte iguals), les propostes de l'únic equilibri perfecte en subjoc es transformen en $x = \left(\frac{1}{1+\delta}, \frac{\delta}{1+\delta}\right)$ i $y = \left(\frac{\delta}{1+\delta}, \frac{1}{1+\delta}\right)$.

Relació entre la solució de Nash i el model de propostes alternatives

Considerem una variació del model de Rubinstein on no hi ha factors de descompte però, amb una probabilitat $\pi > 0$, el joc s'acaba quan una proposta es rebutja. Quan això passa, el vector de pagaments és (d_1, d_2). La Fig. 12 representa aquest joc.

Fig. 12



Un raonament similar a l'aplicat al model de Rubinstein demostra que, a tot subjoc on 2 decideix sobre la proposta d'1, s'ha de tenir $\alpha_2 = (1 - \pi)\beta_2 + \pi d_2$. I que a tot subjoc on 1 decideix sobre la proposta de 2, s'ha de tenir $\beta_1 = (1 - \pi)\alpha_1 + \pi d_1$. Aïllant els valors d'$\alpha_1$ i β_1,

$$\alpha_1 = \frac{1 - d_2 + (1-\pi)d_1}{2-\pi} \quad \text{i} \quad \beta_1 = \frac{(1-\pi)(1-d_2) + d_1}{2-\pi}.$$

Quan π és molt proper a zero, α_1 és molt proper a β_1. Per tant, quan la probabilitat π de col·lapse del procés de negociació tendeix cap a zero, les propostes que es fan en l'únic equilibri perfecte en subjocs són molt properes a $(d_1 + ½\cdot[1 - d_1 - d_2], d_2 + ½\cdot[1 - d_1 - d_2])$. En aquesta proposta, els jugadors es reparteixen a parts iguals l'excedent $(1 - d_1 - d_2)$ que resta quan es treu el que reben si el procés de negociació s'atura. A més, aquesta proposta és la <u>solució de Nash</u> del joc (U, d) on U és el conjunt de parells (u_1, u_2) tals que $u_1 + u_2 = 1$ i $d = (d_1, d_2)$ representa el vector de pagaments quan la negociació es trenca. Així que <u>la solució de Nash és, en essència, l'únic equilibri perfecte en subjocs d'un joc de negociació basat en propostes alternatives on la probabilitat que la negociació s'aturi exògenament sense arribar a un acord és infinitesimalment petita</u>.

Bibliografia

- Nash, John Forbes, Jr. (1950): "The bargaining problem", *Econometrica* 18, 155–162.
- Kalai, Ehud i Smorodinsky, Meir (1975): "Other solutions to Nash's bargaining problem", *Econometrica* 43, 513–518.
- Rubinstein, Ariel (1982): "Perfect equilibrium in a bargaining model", *Econometrica* 50, 97–109.
- Osborne, Martin J. (2004): *An Introduction to Game Theory.* Oxford University Press: Nova York, capítol 16.
- Aliprantis, Charalambos i Chakrabarti, Subir K. (2000): *Games and Decision Making*, Oxford University Press: Nova York, capítol 7.