Reparto de bienes indivisibles

Economía con bienes indivisibles

Una economía está formada por cuatro elementos: individuos, objetos (bienes indivisibles), preferencias de los individuos sobre los objetos (representando lo que los individuos quieren) y dotaciones de los individuos (que representan lo que los individuos tienen). Este modelo de una economía con bienes indivisibles se debe a Lloyd Shapley y Herbert Scarf (1974).

• Un conjunto finito $N = \{1, 2, \dots, n\}$ de $n \geq 1$ individuos (consumidores).

• Un conjunto finito X de $n \geq 1$ objetos (por simplicidad se considera el caso en que N y X tienen el mismo número n de elementos).

• Para cada individuo i, una preferencia R_i sobre el conjunto de objetos X. Una preferencia sobre X es una relación binaria sobre X que es completa y transitiva. La relación binaria R_i sobre X es completa si, para todo $x \in X$ e $y \in X$, se tiene $x\ R_i\ y$ o $y\ R_i\ x$ o ambos. La relación binaria R_i sobre X es transitiva si, para todo $x \in X$, $y \in X$ y $z \in X$, tener $x\ R_i\ y$ y tener $y\ R_i\ z$ implica tener $x\ R_i\ z$. La interpretación de $x\ R_i\ y$ es que el individuo i no prefiere estrictamente y a x (de manera equivalente, x es estrictamente preferido o indiferente a y).

Dada una preferencia R_i, P_i designa el componente estricto de R_i: $x\ P_i\ y$ si, y sólo si, $x\ R_i\ y$ pero no $y\ R_i\ x$. Por tanto, $x\ P_i\ y$ significa que x es estrictamente preferido a y.

Dada una preferencia R_i, I_i designa el componente simétrico de R_i: $x\ I_i\ y$ si, y sólo si, $x\ R_i\ y$ y también $y\ R_i\ x$. Así pues, $x\ I_i\ y$ significa que x es indiferente a y (y, por ello, y es indiferente a x).

Un perfil de preferencias es un vector $R = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ que indica la preferencia sobre X correspondiente a cada individuo.

• Una asignación inicial de los objetos a los individuos denominada dotación, en donde una asignación α consiste en una distribución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de los objetos entre los individuos de manera que: (i) cada individuo i recibe un solo objeto α_i; y (ii) ningún objeto se asigna a dos individuos distintos. Una dotación estará representada por un vector $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ tal que $X = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. En la dotación w se interpreta que el individuo i es propietario del objeto w_i.

El problema

El problema que se pretende estudiar es el siguiente: dada una dotación y las preferencias de los individuos, ¿a qué asignaciones puede llegarse si se permite a los individuos intercambiar los objetos que poseen libremente?

A continuación se presentan dos soluciones, inspiradas en dos enfoques opuestos: el enfoque cooperativo (intercambio basado en la negociación y la formación de coaliciones) y el enfoque no cooperativo (intercambio basado en precios y en mercados competitivos). El enfoque cooperativo conduce al concepto de núcleo de una economía; el no cooperativo, al de equilibrio de una economía. Se presentarán también las principales relaciones entre ambos conceptos.

Asignación Paretoeficiente

Una asignación α es Paretoeficiente, dado un perfil de preferencias R, si no hay otra asignación β tal que: (i) para algún individuo i, $\beta(i)\ P_i\ \alpha(i)$; y (ii) para ningún individuo i, $\alpha(i)\ P_i\ \beta(i)$.

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y $X = \{a, b, c, d\}$. Consideremos el siguiente perfil de preferencias

R_1	R_2	R_3	R_4
a	a	b	b
b	c	c	a
c	d	d	d
d	b	a	c

Fig. 1

en donde la columna R_i representa la preferencia (en este caso, estricta) del individuo $i \in N$. Sea α la asignación (b, d, c, a), en donde 1 recibe b, 2 recibe d, 3 recibe c y 4 recibe a. Esta asignación no es Paretoeficiente ya que existe la asignación $\beta = (a, d, c, b)$: comparando α y β, alguien prefiere el objeto recibido en β al recibido en α (por ejemplo, el individuo 1) y nadie prefiere el objeto recibido en α al recibido en β. Intuitivamente, α no es Paretoeficiente porque algún individuo mejora en el paso de α a β (los individuos 1 y 4) y ninguno empeora (1 y 4 mejoran; 2 y 3 se mantienen igual). Es de destacar que el juicio sobre si una asignación es Paretoeficiente no depende de las dotaciones (de cómo los objetos estén repartidos entre los individuos).

Asignaciones vetables fuertemente

Dado un perfil de preferencias R y un asignación inicial w de los objetos, la coalición de individuos $C \subseteq N$ puede vetar fuertemente la asignación α si existe otra asignación β tal que:

(i) el conjunto $\{x \in X$: para algún $i \in C$, $\beta(i) = x\}$ de los objetos que reciben los miembros de la coalición C en β coincide con el conjunto $\{x \in X$: para algún $i \in C$, $w_i = x\}$ de los objetos que tienen los miembros de C;

(ii) para todo $i \in C$, $\beta(i)\ P_i\ \alpha(i)$.

La asignación α es vetable fuertemente por la coalición C si los miembros de la coalición C tienen alguna manera de repartirse sus dotaciones (no los objetos que les corresponde en α) de manera que todos mejoran con respecto a α.

Conjunto $C(R, w)$ de asignaciones del núcleo

Dado un perfil de preferencias R y un asignación inicial w, el conjunto $C(R, w)$ de asignaciones del núcleo está formada por aquellas asignaciones que ninguna coalición puede vetar fuertemente.

Asignaciones vetables débilmente

Dado un perfil de preferencias R y un asignación inicial w, la coalición de individuos $C \subseteq N$ puede vetar débilmente la asignación α si existe otra asignación β tal que:

(i) $\{x \in X$: para algún $i \in C, \beta(i) = x\} = \{x \in X$: para algún $i \in C, w_i = x\}$;

(ii) para algún $i \in C$, $\beta(i)\ P_i\ \alpha(i)$; y

(iii) para todo $i \in C$, o bien $\beta(i)\ P_i\ \alpha(i)$, o bien $\beta(i)\ I_i\ \alpha(i)$.

La asignación α es vetable débilmente por la coalición C si los miembros de la coalición C tienen alguna manera de repartirse sus dotaciones (no los objetos que les corresponde en α) de manera que alguno mejora y nadie empeora con respecto a α.

Conjunto $C_e(R, w)$ de asignaciones del núcleo estricto

Dado un perfil de preferencias R y un asignación inicial w, el conjunto $C_e(R, w)$ de asignaciones del núcleo estricto está formado por aquellas asignaciones que ninguna coalición puede vetar débilmente. Dado que, obviamente, veto fuerte implica veto débil, se tiene que, para todo R y w, $C_e(R, w) \subseteq C(R, w)$: si una asignación no es vetable débilmente, tampoco es vetable fuertemente.

Conjunto $P(R, w)$ de asignaciones Paretoeficientes

Dado un perfil de preferencias R y un asignación inicial w, el conjunto $P(R, w)$ de asignaciones Paretoeficientes está formado por aquellas asignaciones que la coalición N formada por todos los individuos (la "gran coalición") no puede vetar débilmente.

Ejemplo sobre asignaciones vetables

En el caso representado por la Fig. 1, en donde los círculos representan la dotación, la asignación $\alpha = (b, d, c, a)$ es vetable débilmente por la coalición $\{1, 2\}$. En primer lugar, la coalición $\{1, 2\}$ dispone de los objetos $\{c, b\}$: el individuo 1 aporta c y el 2 aporta b. La coalición $\{1, 2\}$ podrá vetar débilmente la asignación α si 1 y 2 pueden repartirse lo que tienen en la dotación (los objetos c y b) de manera que alguno mejora, y ninguno empeora, con respecto a lo que les corresponde en la asignación α. La idea es que α es meramente una propuesta y, por tanto, 1 y 2 no disponen de los objetos que les toca en α. Precisamente, de lo que se trata es de determinar si 1 y 2 pueden poner alguna objeción al reparto α, es decir, si pueden desligarse de la propuesta α y repartirse entre ellos los objetos con los que inicialmente cuentan (c y b) de manera que alguien gane y nadie pierda con respecto a α. En el reparto de c y b en el que 1 recibe b y 2 recibe c se cumple que alguien mejora (2 mejora con respecto a α) y nadie empeora (1 está igual que en α). Por ello, $\{1, 2\}$ puede vetar débilmente α. En cambio, $\{1, 2\}$ no puede vetar fuertemente α: no hay manera de repartir c y b entre 1 y 2 y conseguir que ambos mejoren con respecto a lo que reciben en α.

Asignaciones de equilibrio $E(R, w)$

Dado un perfil de preferencias R y un asignación inicial w, la asignación α es una asignación de equilibrio si existe un vector n-dimensional $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ tal que, para todo individuo $i \in N$:

(i) si i prefiere el objeto w_j que inicialmente posee el individuo j al objeto $\alpha(i)$ que i recibe en α, entonces $p_j > p_i$ (el precio del objeto w_j ha de ser superior al precio del objeto w_i que inicialmente tiene i);

(ii) si $\alpha(i)$ es el objeto w_j que inicialmente posee el individuo j entonces $p_i \geq p_j$.

El conjunto $E(R, w)$ designa el conjunto de asignaciones de equilibrio, dado un perfil R.

En el vector $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, p_i representa el precio del objeto w_i que posee el individuo i. La idea es que la asignación α es una asignación de equilibrio si, para todo individuo i, el objeto α_i que i recibe en α es el objeto más preferido para i entre los objetos con un precio (valor) igual o inferior al del objeto w_i que i posee (intuitivamente, el precio p_i de w_i sería la renta de i: el valor con el que i acude al mercado a comprar un objeto a cambio del que tiene).

Reiterando: cada individuo i posee inicialmente un objeto w_i. Para definir un equilibrio, es preciso determinar el valor de ese objeto. Para ello se define un vector de precios $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, de manera que p_k es el precio del objeto w_k (el objeto poseído por el individuo k). La asignación α será un equilibrio con el vector de precios $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ si, dado el valor de los objetos, todo individuo recibe en α alguno de los objetos más preferidos que es factible conseguir, donde el objeto w_j es factible para i si el precio de w_j no es superior al precio p_i del objeto w_i que posee i.

Ejemplo de obtención de asignaciones de equilibrio

Sea la economía representada en la Fig. 2, en donde los círculos indican el objeto w_i que posee cada individuo i.

R_1	R_2	R_3
a	b	a
b	a	c
c	c	b

Fig. 2

Tomemos una asignación. Por ejemplo, $\alpha = (b, a, c)$. ¿Es una asignación de equilibrio? Para hallar la respuesta, habrá que tratar de encontrar un vector de precios (p_a, p_b, p_c) tal que: (i) b sea el objeto más preferido por 1 entre los que tienen un valor (según el vector de precios) igual o inferior a c (el objeto que posee inicialmente 1); (ii) a sea el objeto más preferido por 2 entre los que tienen un valor igual o inferior a a; y (iii) c sea el objeto más preferido por 3 entre los que tienen un valor igual o inferior a b.

Con respecto a 1, recibe b en α. Dado que, en R_1, 1 prefiere a a b, para que α sea de equilibrio es necesario que 1 no pueda adquirir a con c; es decir, $p_a > p_c$. Por otro lado, dado que 1 tiene c y recibe b en α, se precisa que el valor de c permita adquirir b; esto es, $p_c \geq p_b$. Del mismo modo, dado que 3 tiene b y recibe c en α, se requiere que el valor de b permita adquirir c: $p_b \geq p_c$. Como resultado de $p_c \geq p_b$ y $p_b \geq p_c$ se tiene que $p_b = p_c$. Recordando que $p_a > p_c$, se concluye que $p_a > p_b$. Esto significa que 2 podría adquirir b, que es preferido a lo que obtiene (el objecto a) en α. Como resultado, $\alpha = (b, a, c)$ no es una asignación de equilibrio: no se pueden definir precios que hagan que los objetos más preferidos que puedan comprar los individuos estén dados por α.

Secuencias de ciclos de comercio de los objetos más preferidos

Estas secuencias se basan en un algoritmo, atribuido a David Gale por Shapley y Shubik, que permite determinar las asignaciones de equilibrio. La idea del algoritmo es que cada individuo i "apunte" a un individuo que posea alguno de los objetos más preferidos por i (cuando la preferencia de i es estricta, i apunta a un único individuo, que puede ser él mismo). De este modo se genera una secuencia en la que i_1 apunta a i_2, i_2 apunta a i_3, i_3 apunta a i_4, etc. Dado que el conjunto de individuos es finito, llegará un momento en que alguno de los individuos apunte a otro que ya aparece en la secuencia. Con ello se genera un ciclo $i_1 \to i_2 \to i_3 \to \ldots \to i_r \to i_1$.

El ciclo anterior define una secuencia (i_1, i_2, i_3, … , i_r), que a su vez permite definir una asignación en la que todos los miembros del ciclo obtienen su objeto más preferido. La idea es que los miembros del conjunto $\{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_r\}$ ponen los objetos que poseen en común y cada uno escoge el objeto más preferido (pensando en el cual habían apuntado a alguien). Por construcción de la secuencia, cada individuo escogerá un único objeto y cada uno de ellos escogerá uno distinto. Eliminados los individuos del ciclo y los objetos que toman, se considera el problema de asignación de los objetos restantes entre los individuos no eliminados y se vuelven a buscar ciclos de comercio. El conjunto de asignaciones obtenidas de esta manera se designan por $CC(R, w)$.

Ejemplo de obtención de ciclos de comercio

Sea la economía de la parte izquierda de la Fig. 3, en donde los círculos indican el objeto w_i que posee cada individuo i.

R_1	R_2	R_3	R_4
a	a	a	b
d	b	b	c
b	d	d	a
c	c	c	d

R_1	R_2
d	d
c	c

Fig. 3

Escojamos un individuo cualquiera; por ejemplo 1. El objeto más preferido de 1 lo tiene 4. Así que 1 apunta a 4: $1 \to 4$. El objeto más preferido de 4 lo tiene 3. Así que 4 apunta a 3: $4 \to 3$. El objeto más preferido de 3 lo tiene 4. Así que 3 apunta a 4: $3 \to 4$. Y ya hemos identificado un ciclo en la secuencia $1 \to 4 \to 3 \to 4$: el ciclo (4, 3, 4). Por tanto, 3 y 4 intercambian sus objetos: 3 se queda con a y 4 se queda con b. Eliminados 3, 4 y sus objetos, se obtiene el problema representado en la parte derecha de la Fig. 3. Ahora se tendría $1 \to 2 \to 2$. El ciclo resultante está formado exclusivamente por 2, que se apunta a sí mismo. Por ello, 2 se queda con d y, como no queda nadie más dispuesto a intercambiar, 1 se queda con c. La asignación resultante del intercambio mediante los ciclos de comercio es $CC(R, w) = \{(c, d, a, b)\}$, con $w = (c, d, b, a)$.

Resultados cuando se permite la indiferencia

- R1 $C_e(R, w) \subseteq E(R, w) \subseteq C(R, w)$
- R2 $C_e(R, w)$ puede estar vacío
- R3 $E(R, w) \neq \varnothing$ y, por R1, $C(R, w) \neq \varnothing$
- R4 $CC(R, w) = E(R, w)$
- R5 $E(R, w) \cap P(R, w)$ puede estar vacío (falla el Primer TF de la Economía del Bienestar)

Resultados con preferencias estrictas

- R6 $C_e(R, w) = E(R, w)$
- R7 $E(R, w)$ consiste en un elemento
- R8 Es posible que $E(R, w) \subset C(R, w)$

Ejemplo 1: Shapley y Scarf (1974)

Hay tres individuos y tres objetos. El individuo i posee el objeto w_i. El perfil R de preferencias es el siguiente.

1	2	3
w_2	w_1 w_3	w_2
w_1 w_3	w_2	w_1 w_3

Para obtener su objeto w_2 más preferido 1 se dirigiría a 2. Para obtener un objeto más preferido 2 se dirigiría a 1 o a 3. Por último, para obtener su objeto w_2 más preferido 3 se dirigiría a 2. Resultan pues dos secuencias de ciclos de comercio de los objetos más preferidos.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 3 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

La primer secuencia la inicia el ciclo de comercio que forma el conjunto {1, 2}. La asignación resultante (w_2, w_1, w_3) es aquélla obtenida cuando 1 y 2 intercambian sus objetos y 3 se queda con el suyo. La primer secuencia la inicia el ciclo que forma el conjunto {2, 3}. La asignación resultante (w_1, w_3, w_2) es aquélla obtenida cuando 2 y 3 intercambian sus objetos y 1 se queda con el suyo. Por tanto, el conjunto $CC(R, w)$ de las asignaciones que se obtienen mediante secuencias de ciclos de comercio de los objetos más preferidos tiene dos elementos: (w_2, w_1, w_3) y (w_1, w_3, w_2).

Por R4, (w_2, w_1, w_3) y (w_1, w_3, w_2) son las únicas asignaciones de equilibrio. ¿Cómo se encontrarían los precios de equilibrio? Escogiendo una secuencia de ciclos de comercio, dando a continuación el mismo precio a los objetos de los individuos que forman parte del mismo ciclo de comercio y un precio inferior a los objetos de los ciclos que vienen después en la secuencia de ciclos. Por ejemplo, en la secuencia ({1, 2}, {3}), los objetos de los individuos 1 y 2 tienen el mismo precio, que ha de ser superior al objeto del individuo 3. Por ello, el vector de precios p tal que $p_1 = p_2 > p_3$ es un vector de precios de equilibrio que hace que (w_2, w_1, w_3) sea una asignación de equilibrio.

Si la secuencia de ciclos de comercio que determina el reparto de objetos es ({2, 3}, {1}), el vector de precios p tal que $p_2 = p_3 > p_1$ es un vector de precios de equilibrio que hace que (w_1, w_3, w_2) sea una asignación de equilibrio.

Para determinar las asignaciones que pertenecen al núcleo $C(R, w)$, podemos considerar las 6 posibles asignaciones y verificar una por una que ninguna coalición puede vetar la asignación.

• Asignación 1: (w_1, w_2, w_3). Esta asignación no pertenece al núcleo dado que los miembros de la coalición {2, 3} pueden repartirse sus dotaciones y obtener ambos un objeto más preferido que el que obtienen en la asignación (w_1, w_2, w_3). De hecho, si 2 y 3 intercambian sus dotaciones, se obtiene (w_1, w_3, w_2), en donde tanto 2 como 3 obtienen un objeto más preferido que en (w_1, w_2, w_3). Por ello, la coalición {2, 3} puede vetar (w_1, w_2, w_3). Como resultado, $(w_1, w_2, w_3) \notin C(R, w)$.

• Asignación 2: (w_1, w_3, w_2). Ninguna coalición que contenga a 3 puede vetar esta asignación, puesto que 3 obtiene su objeto más preferido. Ninguna coalición que contenga a 2 puede vetar esta asignación, puesto que 2 obtiene uno de sus objetos más preferidos, de modo que no hay manera de hacerle mejorar. Esto deja a {1} como la única coalición que podría vetar (w_1, w_3, w_2). Pero como la asignación (w_1, w_3, w_2) asigna a 1 el objeto de que dispone la coalición {1}, {1} no puede vetar (w_1, w_3, w_2). Conclusión: $(w_1, w_3, w_2) \in C(R, w)$.

El problema de (w_1, w_3, w_2) es que no pertenece al núcleo estricto, ya que la coalición {1, 2} puede vetar débilmente (w_1, w_3, w_2) mediante la asignación (w_2, w_1, w_3). Si 1 y 2 intercambian sus dotaciones, se consigue la asignación (w_2, w_1, w_3). Comparando (w_1, w_3, w_2) y (w_2, w_1, w_3) reultando obvio que 1 mejora y 2 no empeora, lo que hace que $(w_1, w_3, w_2) \notin C_e(R, w)$.

- <u>Asignación 3</u>: (w_2, w_1, w_3). Ninguna coalición que contenga a 1 puede vetar esta asignación, puesto que 1 obtiene su objeto más preferido. Ninguna coalición que contenga a 2 puede vetar esta asignación, puesto que 2 obtiene uno de sus objetos más preferidos. Esto deja a {3} como la única coalición que podría vetar (w_2, w_1, w_3). Pero {3} no puede hacerlo porque, en (w_2, w_1, w_3), 3 recibe el objeto de que dispone la coalición {3}. Así pues, $(w_2, w_1, w_3) \in C(R, w)$. Pero, como en el caso de la asignación 2, $(w_2, w_1, w_3) \notin C_e(R, w)$.

- <u>Asignación 4</u>: (w_2, w_3, w_1). En este caso, $(w_2, w_3, w_1) \in C(R, w)$ pero $(w_2, w_3, w_1) \notin C_e(R, w)$.

- <u>Asignación 5</u>: (w_3, w_2, w_1). En este caso, $(w_3, w_2, w_1) \notin C(R, w)$ y $(w_3, w_2, w_1) \notin C_e(R, w)$.

- <u>Asignación 6</u>: (w_3, w_1, w_2). En este caso, $(w_3, w_1, w_2) \in C(R, w)$ pero $(w_3, w_1, w_2) \notin C_e(R, w)$.

La conclusión final es que $C(R, w)$ contiene 4 elementos (las asignaciones 2, 3, 4 y 6), pero que $C_e(R, w)$ está vacío. Este ejemplo demuestra el resultado R2.

Ejemplo 2: Shapley y Scarf (1974)
Hay tres individuos y tres objetos. El individuo i posee el objeto w_i. El perfil R de preferencias es el siguiente.

1	2	3
w_3	w_1	w_2
w_2	w_2	w_3
w_1	w_3	w_1

En este caso hay una única secuencia de ciclos de comercio: 1 se dirige a 3, 3 se dirige a 2 y 2 se dirige a 1. Por tanto, la secuencia es ({1, 2, 3}) y la asignación resultante es (w_3, w_1, w_2). Por R4, $E(R, w) = \{(w_3, w_1, w_2)\}$, de modo que (w_3, w_1, w_2) es la única asignación de equilibrio. Sin embargo, $C(R, w) \neq E(R, w)$, lo que probaría R8. De hecho, $(w_2, w_1, w_3) \in C(R, w)$.

Ejemplo 3: Wako (1999)
Hay tres individuos y tres objetos. El individuo i posee el objeto w_i. El perfil R de preferencias es el siguiente.

1	2	3
w_2	w_1 w_3	w_2
w_3	w_2	w_1
w_1		w_3

Las secuencias de ciclos de comercio son las mismas que en el Ejemplo 1: ({1, 2}, {3}) y ({2, 3}, {1}). La secuencia de ciclos ({1, 2}, {3}) da lugar a la asignación (w_2, w_1, w_3), en tanto que la secuencia ({2, 3}, {1}) da lugar a la asignación (w_1, w_3, w_2). Éstas dos constituyen las únicas asignaciones de equilibrio: $E(R, w) = \{(w_2, w_1, w_3), (w_1, w_3, w_2)\}$. Pero ninguna de ellas es

Paretoeficiente, esto es, $(w_2, w_1, w_3) \notin P(R, w)$ y $(w_1, w_3, w_2) \notin P(R, w)$. El hecho de que $(w_2, w_1, w_3) \notin P(R, w)$ se debe a que existe la asignación (w_2, w_3, w_1). Comparando ambas asignaciones, se observa que 1 y 2 están indiferentes en ambas, pero que 3 está mejor en la segunda.

El Ejemplo 3 demuestra R5, a saber, que el Primer Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar puede fallar cuando los bienes son indivisibles: una asignación de equilibrio no necesariamente es una asignación Paretoeficiente. Lo grave del ejemplo es que puede ser que ninguna asignación de equilibrio sea Paretoeficiente.

Bibliografía

- Kamijo, Yoshio y Kawasaki, Ryo (2009): "Dynamics, stability, and foresight in the Shapley-Scarf housing market", Fondazione Eni Enrico Mattei, Working Paper 312.
- Shapley, Lloyd y Scarf, Herbert (1974): "On cores and indivisibility", *Journal of Mathematical Economics* 1, 23–37.
- Wako, Jun (1999): "Coalition-proofness of the competitive allocations in an indivisible goods market", en Myrna H. Wooders (ed): *Topics in Mathematical Economics and Game Theory. Essays in Honor of Robert J. Aumann*, American Mathematical Society, pp. 277-83.

Emparellament (matching)

Una de caçafortunes

En una celebració de l'alta societat, hi ha quatre vídues acabalades (A, B, C i D) i quatre gigolós (a, b, c i d) a la caça d'alguna d'aquestes vídues. La millor oportunitat la tenen en ocasió d'un ball, moment en què cada gigoló proposarà de ballar a alguna de les vídues. Cada vídua prefereix ballar amb algun dels gigolós a no ballar. Les preferències dels gigolós sobre les vídues, i d'elles sobre ells, són

a	*b*	*c*	*d*
A	*A*	*A*	*B*
B	*C*	*C*	*C*
C	*B*	*D*	*A*
D	*D*	*B*	*D*

A	*B*	*C*	*D*
d	*c*	*c*	*a*
c	*b*	*a*	*d*
b	*a*	*d*	*b*
a	*d*	*b*	*c*

on cada columna expressa un ordre de preferència estricta, de més preferit a menys preferit. Per exemple, la segona columa significa que el gigoló b prefereix la vídua A a totes les altres, la vídua C a les D i B i, finalment, la vídua D a la B. Una parella de ball (x, X) formada per l'home x i la vídua X és estable si no hi ha cap altra parella (y, Y) tal que: (i) x i Y prefererien ballar junts abans que ballar amb la parella que ara tenen; o bé (ii) y i X prefererien ballar junts abans que ballar amb la parella que ara tenen. Existeix alguna parella de ball estable?
http://en.wikipedia.org/wiki/Stable_marriage_problem

L'algorisme de Gale i Shapley (1962)

L'algorisme (d'acceptació diferida) de Gale i Shapley permet de determinar un emparellament estable a problemes del tipus anterior. Segons l'algorisme, a la primera etapa, cada home s'adreça a la dona que considera més preferida. Si totes les dones són sol·licitades per algun proponent, l'algorisme s'acaba i cada home és emparellat amb la dona sol·licitada. En cas contrari, les dones que reben més d'una proposta, mantenen a la reserva al proponent més preferit i rebutgen definitivament als altres. A la segona etapa, els homes rebutjats s'adrecen a la segona dona més preferida. Si totes les dones tenen un sol·licitant (els homes en la reserva es consideren sol·licitants), l'algorisme acaba. Si no totes en tenen algun, aleshores cada dona amb algun proponent manté en la reserva el més preferit i rebutja definitivament els demés. Aquest mateix procediment s'aplica a les següents etapes, fins que totes les dones tinguin algun sol·licitant, moment en què l'algorisme finalitza i s'emparella cada dona amb el seu únic sol·licitant. Per a il·lustrar com funciona l'algorisme, apliquem-lo al cas dels gigolós i les vídues.

A l'etapa 1, els gigolós proposen de ballar a les vídues més preferides.

A	*B*	*C*	*D*
a b c	*d*		

L'anterior representa el següent: *A* rep les propostes d'*a*, *b* i *c*; *B* rep la proposta de *d*; i ni *C* ni *D* reben cap proposta. Atès que no totes les dones tenen un pretendent, l'algorisme no termina. Llavors identifiquem les dones amb més d'una proposta (en aquest cas, *A*), mantenim a la reserva el seu proponent més preferit entre els qui la sol·liciten (*c*) i eliminem els altres (*a* i *b*).

A	*B*	*C*	*D*
~~*a*~~ ~~*b*~~ *c*	*d*		

S'inicia ara l'etapa 2, on *A* manté *c* a la reserva, *B* manté *d* a la reserva i *a* i *b* s'adrecen a les seves segones opcions més preferides: *B* en el cas d'*a* i *C* en el cas de *b*.

A	*B*	*C*	*D*
c	*d a*	*b*	

Ara és *B* qui té dos sol·licitants. Aleshores, manté a la reserva el més preferit dels dos (l'*a*) i dóna carbasses a l'altre (el *d*).

A	*B*	*C*	*D*
c	~~*d*~~ *a*	*b*	

A l'etapa 3, en haver estat rebutjat per la seva primera opció *B*, *d* passa a sol·licitar a la seva segona millor opció, *C*.

A	*B*	*C*	*D*
c	*a*	*b d*	

En tenir *C* dos sol·licitants, manté a la reserva el més preferit dels dos (*d*) i rebutja l'altre (*b*).

A	*B*	*C*	*D*
c	*a*	~~*b*~~ *d*	

A l'etapa 4, l'únic gigoló rebutjat (*b*), s'adreça a la vídua més preferida entre aquelles que no l'han rebutjat: *B*.

A	*B*	*C*	*D*
c	*a b*	*d*	

Dels seus dos sol·licitants, *B* prefereix *b* a *a*. Per tant, manté *b* i es desfà d'*a*.

A	*B*	*C*	*D*
c	~~*a*~~ *b*	*d*	

A l'etapa 5, després d'haver estat rebutjat, *a* proposa a la vídua més preferida entre aquelles que no l'han rebutjat: *C*.

A	*B*	*C*	*D*
c	*b*	*a d*	

C manté a *a* i rebutja *d*.

A	B	C	D
c	*b*	*a* ~~*d*~~	

A l'etapa 6, el rebutjat *d* s'adreça a *A*.

A	B	C	D
c *d*	*b*	*a*	

A manté a *d* i rebutja *c*. I s'arriba a una primera conclusió: *d* s'emparellarà amb *A*, ja que *d* és el gigoló més preferit per la vídua *A*, de manera que *A* rebutjarà a qualsevol altre gigoló que la pretengui.

A	B	C	D
~~*c*~~ *d*	*b*	*a*	

A l'etapa 7, després d'haver estat rebutjat per la seva primera opció *A*, *c* s'adreça a la seva segona opció, *C*.

A	B	C	D
d	*b*	*a* *c*	

En la mesura que *C* prefereix *c* a *a*, *a* és rebutjat per *C*.

A	B	C	D
d	*b*	~~*a*~~ *c*	

A l'etapa 8, *a* sol·licita a l'única vídua que no l'ha rebutjat: *D*.

A	B	C	D
d	*b*	*c*	*a*

Però ara totes les vídues tenen un pretendent i l'algorisme finalitza amb l'emparellament anterior: *A–d*, *B–b*, *C–c* i *D–a* (coses de la vida: el mal tràngol de *D* en no haver estat demanada per ningú fins a l'últim moment es compensa amb el fet d'emparellar-se amb el seu gigoló més preferit).

Verifiquem que es tracta d'un emparellament estable. Comencem per la parella (*d*, *A*). És evident que, per a *A*, aquest emparellament és estable, ja que *d* és el gigoló més preferit per *A*. Amb relació a *d*, *A* és la tercera vídua favorita. Per tant, cal verificar que cap de les altres dues vídues més preferides que *A* (*B* i *C*) no prefereix ballar amb *d* que amb la parella respectiva (*b* en el cas de *B* i *c* en el cas de *C*).

Considerem primer la possible parella (*d*, *B*). És clar que *d* prefereix aquest emparellemant a l'emparellament (*d*, *A*), però també es clar que *B* prefereix mantenir la parella (*b*, *B*) a trencar-la en favor de (*d*, *B*), perquè *B* prefereix qualsevol gigoló abans que *d*. Amb la segona possible parella (*d*, *C*) passa el mateix: *C* prefereix *c* (la parella que li toca a l'emparellemant construït per l'algorisme) a *d*. Conclusió: (*d*, *A*) és una parella estable.

L'algorisme de Gale i Shapley s'ha presentat en la versió "els homes proposen". També es pot definir en la versió alternativa "les dones proposen", on tot és igual tret que són les dones les que sol·liciten els homes i són aquests qui accepten o rebutgen. En general, però, les dues versions de l'algorisme no sempre generen el mateix emparellament.

Solucions de problemes d'assignació
L'algorisme d'acceptació diferida (*deferred acceptance algorithm*, de David Gale i Lloyd Shapley) i l'algorisme dels cicles de comerç (*top-trading cycle algorithm*, de David Gale) constitueixen els dos principals algorismes per a solucionar problemes d'assignació de béns indivisibles.

Estabilitat i optimalitat dels emparellaments
Un emparellament és estable si, per a totes les parelles (x, X) i (y, Y), no és el cas que (i) x prefereix Y a X i Y prefereix x a y o que (ii) X prefereix y a a i y prefereix X a Y. Un emparellament E és òptim per a l'home (o dona) α si no existeix cap emparellament estable E' tal que α prefereix la parella que li assigna E' a la parella que li assigna E.

Propietats de l'algorisme de Gale i Shapley
• *Tant en la versió on proposen els homes com en la versió on proposen les dones, l'algorisme finalitza en un màxim d'*$n^2 - 2n + 2$ *etapes, on n és el nombre d'homes (i de dones).*

• *Tant en la versió on proposen els homes com en la versió on proposen les dones, l'algorisme finalitza amb un emparellament estable.*

• *Si la versió on proposen els homes i la versió on proposen les dones generen el mateix emparellament, aleshores aquest emparellament és l'únic emparellament estable.*

Per exemple, els únics emparellaments estables amb les preferències indicades a continuació són: (i) A–a, B–d, C–b i D–c; (ii) A–d, B–b, C–c i D–a; i (iii) A–a, B–b, C–c i D–d. Considerem la dona D. Aquesta dona prefereix l'emparellament (ii) al (iii) i el (iii) a l'(i). Això fa que ni (i) ni (iii) siguin òptims per a D. Per a D, només (ii) és òptim. En canvi, per a C, tant (ii) com (iii) són òptims, ja que de les parelles que obté a algun emparellament estable (b i c), el més preferit de totes dues (c) s'obté tant a (ii) com a (iii).

a	b	c	d
B	C	D	C
A	B	A	B
D	A	C	D
C	D	B	A

A	B	C	D
d	c	a	a
b	b	c	d
a	d	b	c
c	a	d	b

Optimalitat dels emparellaments de l'algorisme de Gale i Shapley
L'emparellament generat per l'algorisme de Gale i Shapley quan els homes proposen és òptim per a tots els homes. L'emparellament generat per l'algorisme quan les dones proposen és òptim per a totes les dones.

Bibliografia

• Gura, Ein-ya i Maschler, Michael B. (2008): *Insights into Game Theory: An Alternative Mathematical Experience*. Cambridge University Press: Cambridge, capítol 1.

• Gale, David i Shapley, Lloyd S. (1962): "College admissions and the stability of marriage", *American Mathematical Monthly* 69, 9–15.