Jocs cooperatius amb utilitat transferible

Una d'escurabosses

Tres pispes (1, 2 i 3) consideren com agrupar-se per a cometre robatoris durant una setmana. Si cadascú actua tot sol, no aconsegueix esgarrapar res durant la setmana. Si s'ajunten 1 i 2, plegats aconsegueixen, quan finalitza la setmana, un botí de 10 (en milers d'euros). El mateix botí són capaços d'obtenir 1 i 3 si actuen conjuntament. Si es coalitzen 2 i 3, al cap d'una setmana només en poden aplegar 5. Finalment, si tots tres formen coalició per a delinquir, el botí puja a 12. Es formi el grup (o coalició) que es formi, cada malfactor està interessat en la part del botí que li pertoca i cadascú intenta aconseguir el botí personal més alt possible. Quines coalicions es formen i com es reparteixen el botí els membres de cada coalició? Aquestes són les dues preguntes bàsiques que es planteja la teoria de jocs cooperatius.

Definició de joc cooperatiu

Un joc cooperatiu (amb utilitat transferible i en forma coalicional) consisteix en: (i) un conjunt no buit i finit N de jugadors, els subconjunts dels quals s'anomenen coalicions; i (ii) una funció v (anomenada funció característica) que associa amb cada coalició S (això és, amb cada subconjunt S de N) un nombre real $v(S)$, que representa el pagament (valor, excedent, beneficis) que els membres d'S poden obtenir per ells mateixos i que han de repartir-se entre ells.

S'assumeix que la coalició buida no genera pagaments: $v(\varnothing) = 0$. L'expressió "utilitat transferible" significa que $v(S)$ es pot repartir de qualsevol manera (sense cap restricció) entre els membres d'S (una interpretació és que $v(S)$ és diner). Al conjunt N de tots els jugadors del joc se l'anomena "la gran coalició". Tot i que un joc cooperatiu és un parell (N, v), per a simplificar, s'identificarà v amb el joc (N, v), sobreentenent N. Si no es diu el contrari, s'identificarà N amb $\{1, 2, \dots , n\}$, on n és el nombre de jugadors. Quan $i \in N$, s'escriurà v_i o $v(i)$ en comptes de $v(\{i\})$ i, en general, per a tota coalició $\{i, j, k \dots\}$, s'escriurà $v_{ijk\dots}$ o $v(i, j, k \dots)$ en comptes de $v(\{i, j, k \dots\})$. L'exemple dels escurabosses es pot representar mitjançant el joc v tal que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $v_{12} = v_{13} = 10$, $v_{23} = 5$ i $v_{123} = 12$.

Superadditivitat

Un joc v és superadditiu (satisfà la propietat de superadditivitat) si, per a totes les coalicions S i T tals que $S \cap T = \varnothing$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. Això diu que la unió de dues coalicions disjuntes pot almenys garantir-se un pagament tan gran com la suma de pagaments que obtenen les coalicions per separat. La superadditivitat indica que surt a compte formar coalicions grans: com més gran sigui una coalició, més poden aconseguir els seus membres.

Essencialitat

Un joc és essencial si $v(N) > \sum_{i \in N} v(i)$: el valor $v(N)$ de la gran coalició és més gran que la suma $\sum_{i \in N} v(i)$ del valor que cada jugador pot obtenir per separat.

Imputacions

Una imputació en un joc v amb n jugadors és un vector n-dimensional $(x_1, \dots , x_n)$ tal que: (i) $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$; i (ii) se satisfà la propietat d'individualitat racional, això és, per a tot jugador $i \in N$, $x_i \geq v_i$ (el jugador i obté el que pot aconseguir per si mateix).

Una imputació representa una manera de repartir entre els jugadors el pagament que resulta quan tots es reuneixen i formen la gran coalició, de forma que tot jugador obté almenys el que pot obtenir per sí mateix. La interpretació és que la imputació ($x_1, \dots, x_n$) distribueix el valor $v(N)$ entre tots els jugadors assignant al jugador i el pagament x_i. Un concepte de solució per als jocs cooperatius consisteix en una selecció d'imputacions que es consideren "raonables" o "acceptables" (en general, amb la presumpció que es forma la gran coalició). En aquest tema es presenten dos conceptes de solució: el cor (que típicament selecciona més d'una imputació, si alguna en selecciona) i el valor de Shapley (que consisteix en una única imputació).

Cor d'un joc cooperatiu

El cor d'un joc cooperatiu v amb n jugadors és el conjunt de totes les imputacions ($x_1, \dots, x_n$) que satisfan, per a tot $S \subseteq N$, $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$.

El cor aplega totes les imputacions que són immunes a objeccions que pugui formular qualsevol coalició. Així, una imputació és al cor si el pagament que correspon a (el total de membres de) la coalició segons la imputació no és inferior al pagament que la coalició pot aconseguir per ella mateixa: si la coalició obtingués menys a la imputació que per ella mateixa, el membres de la coalició tindrien incentiu a separar-se de la gran coalició i aconseguir més per sí mateixos que formant part de la gran coalició rebent els pagaments que els corresponen a la imputació.

Com a il·lustració, sigui el joc v tal que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $v_{12} = 10$, $v_{13} = 15$, $v_{23} = 20$ i $v_{123} = 25$. Aleshores, la imputació $(x_1, x_2, x_3) = (7, 9, 9)$ no pertany al cor, ja que la coalició {2, 3} pot obtenir per si mateixa 20 i en la imputació el total que obtenen els membres de {2, 3} és $9 + 9 = 18 < v_{23}$.

Les jugades que constitueixen un equilibri de Nash en un joc simultani són immunes (estables, robustes) a desviacions dutes a terme per jugadors: en un equilibri de Nash, cap jugador, actuant per separat, no té incentiu a desviar-se de l'estratègia que li assigna l'equilibri i triar una estratègia diferent. De manera similar, les imputacions que estan al cor són immunes (estables, robustes) a desviacions dutes a terme per grups de jugadors (coalicions): cap coalició no té incentiu a rebutjar la proposta de repartiment del valor de la gran coalició i limitar-se a repartir-se entre els seus membres el valor que la coalició pot generar per ella mateixa.

Exemple de càlcul del cor

Calculem el cor del joc dels escurabosses: $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $v_{12} = v_{13} = 10$, $v_{23} = 5$ i $v_{123} = 12$. Per a què el vector (x_1, x_2, x_3) pertanyi al cor de v cal que:

$$x_1 \geq v_1 = 0;\ x_2 \geq v_2 = 0;\ x_3 \geq v_3 = 0;$$

$$x_1 + x_2 \geq v_{12} = 10;\ x_1 + x_3 \geq v_{13} = 10;\ x_2 + x_3 \geq v_{23} = 5;\ \text{i}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = v_{123} = 12.$$

Aïllant $x_2 + x_3$ a $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, s'obté $x_2 + x_3 = 12 - x_1$. Substituint a $x_2 + x_3 \geq 5$, resulta $12 - x_1 \geq 5$; això és, $x_1 \leq 7$. Per tant, a tota imputació que pertany al cor el jugador 1 obté com a màxim 7. Aïllant $x_1 + x_3$ a $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, s'arriba a $x_1 + x_3 = 12 - x_2$. Substituint a $x_1 + x_3 \geq 10$, s'obté $12 - x_2 \geq 10$. D'aquí $x_2 \leq 2$. Això vol dir que a tota imputació que pertany al cor el jugador 2 obté com a màxim 2. Per últim, aïllant $x_1 + x_2$ a $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, s'obté $x_1 + x_2 = 12 - x_3$. Substituint a $x_1 + x_2 \geq$

10, resulta $12 - x_3 \geq 10$. D'aquí $x_3 \leq 2$. En resum: a cap imputació que pertany al cor el jugador 3 obté més de 2. De les tres conclusions obtingudes ($x_1 \leq 7$, $x_2 \leq 2$ i $x_3 \leq 2$) se segueix que $x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 + 2 + 2 = 11$, la qual cosa contradiu la condició $x_1 + x_2 + x_3 = 12$. La conclusió final és que el cor del joc és buit: no hi ha cap vector (x_1, x_2, x_3) que satisfaci les 7 condicions de pertinença al cor.

Aquest exemple demostra que el cor d'un joc pot ser buit. Els jocs cooperatius amb cor buit troben un paral·lel en els jocs no cooperatius que no tenen equilibris de Nash amb estratègies pures: són jocs on no hi ha cap solució (cap imputació als cooperatius; cap jugada amb estratègies pures als no cooperatius) que sigui estratègicament estable.

Condicions suficients per a què el cor sigui buit
El cor d'un joc essencial i de suma constant és buit.

Com a il·lustració del resultat anterior, considerem el joc v tal que $v_1 = 5$, $v_2 = 10$, $v_3 = 15$, $v_{12} = 25$, $v_{13} = 30$, $v_{23} = 35$ i $v_{123} = 40$. Aquest joc és superadditiu, essencial i de suma constant. Per tant, no tindrà cap imputació al cor.

Per a què la imputació (x_1, x_2, x_3) sigui al cor s'han de satisfer set condicions: $x_1 \geq v_1 = 5$; $x_2 \geq v_2 = 10$; $x_3 \geq v_3 = 15$; $x_1 + x_2 \geq v_{12} = 25$; $x_1 + x_3 \geq v_{13} = 30$; $x_2 + x_3 \geq v_{23} = 35$; i $x_1 + x_2 + x_3 = v_{123} = 40$. Però $40 - x_1 = x_2 + x_3 \geq 35$ implica $5 \geq x_1$; i, atès que $x_1 \geq 5$, la conclusió d'això és que, per a què (x_1, x_2, x_3) sigui al cor, $x_1 = 5$. Un raonament similar demostra que $x_2 = 10$ (fent servir $x_1 + x_2 + x_3 = 40$, $x_1 + x_3 \geq 30$ i $x_2 \geq 10$) i $x_3 = 15$ (emprant $x_1 + x_2 + x_3 = 40$, $x_1 + x_2 \geq 25$ i $x_3 \geq 15$). Així, per a pertànyer al cor, (x_1, x_2, x_3) ha de satisfer $x_1 = 5$, $x_2 = 10$ i $x_3 = 15$. Tanmateix, $(x_1, x_2, x_3) = (5, 10, 15)$ no és una imputació, ja que $x_1 + x_2 + x_3 \neq v_{123} = 40$. Per tant, cap (x_1, x_2, x_3) no compleix les set condicions.

Cor no buit amb 3 jugadors
El cor del joc v amb 3 jugadors és no buit si, i només si, se satisfan les següents cinc condicions:

(i) $v_1 + v_2 + v_3 \leq v_{123}$ (ii) $v_1 + v_{23} \leq v_{123}$ (iii) $v_2 + v_{13} \leq v_{123}$

(iv) $v_3 + v_{12} \leq v_{123}$ (v) $v_{12} + v_{23} + v_{13} \leq 2v_{123}$.

Per consegüent, si es compleixen les 5 condicions, el cor no és buit; i si el cor no és buit, es compleixen les 5 condicions.

La lògica del valor de Shapley (1953)
El valor de Shapley selecciona una única imputació $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ a cada joc. Les imputacions del cor es poden entendre com a repartiments dels pagaments que podrien tenir lloc perquè són estables davant possibles objeccions de qualsevol coalició. A la inversa, com passa amb els equilibris de Nash, hi ha motius per a descartar que s'accepti un repartiment que no estigui al cor: almenys alguna coalició tindrà incentiu a rebutjar el repartiment. El valor de Shapley no té aquest caràcter descriptiu d'identificar el que pot ocórrer, sinó un caràcter més aviat normatiu: el valor de Shapley estableix una imputació "justa" basada en pagaments esperats. El valor de Shapley determina un repartiment de referència que es construeix assignant a cada jugador un pagament "mitjà". Hi ha diverses maneres d'entendre aquest pagament mitjà.

Versió 1 del valor de Shapley: mitjana de contribucions marginals en una coalició

El valor de Shapley d'un joc v amb n jugadors és la imputació ($\phi_1(v)$, $\phi_2(v)$, … , $\phi_n(v)$) tal que, per a tot jugador i,

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \tag{1}$$

on s és el nombre de membres d'S i, per a tot $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. El terme "$k!$" es llegeix "ca factorial" i, per convenció, $0! = 1$. Com a exemple, $4! = 4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 24$.

Il·lustrem el significat de la fórmula (1) a un joc amb 3 jugadors, i, j i k. Prenguem al jugador i. Aquest <u>pot integrar-se a tres tipus de coalicions</u>: les que no contenen cap més jugador, les que contenen un únic jugador i les que contenen dos jugadors. Assumim dues hipòtesis.

• La probabilitat que té i d'incorporar-se a qualsevol dels tres tipus de coalicions és la mateixa per als tres tipus: ⅓.

• El pagament que rep i en integrar-se a la coalició ja formada S és el valor que contribueix i a aquesta coalició: $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

La <u>contribució d'i a la coalició S</u> es defineix com el que s'obté quan i s'incopora a S (això és, el valor $v(S \cup \{i\})$) menys el que S obtenia abans que i s'incorporés (el valor $v(S)$). Sense i, la coalició S obté $v(S)$. Amb i, s'obté $v(S \cup \{i\})$). Per tant, la diferència és la contribució (marginal) d'i: $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Un criteri raonable ("just") és que i rebés, en incorporar-se a S, precisament el que aporta: la seva contribució marginal[1].

Només hi ha una coalició del primer tipus: la coalició buida $\varnothing$. Si i s'incorpora a aquesta coalició la seva contribució és $v_i - v(\varnothing)$. Atès que $v(\varnothing) = 0$, la seva contribució és v_i. Així doncs, la contribució esperada d'i al primer grup de coalicions és $⅓{\cdot}v_i$.

Hi ha dues coalicions del segon tipus: una formada per $\{j\}$ i l'altra per $\{k\}$. La probabilitat d'incorporar-se a alguna coalició d'un determinat tipus s'ha assumit que es distribueix igualitàriament entre totes les coalicions d'aquell tipus. En aquest cas, la probabilitat ⅓ d'incorporar-se a una coalició amb un únic membre es reparteix igualitàriament entre totes les coalicions que tinguin un membre. Per aquesta raó, la probabilitat que i s'integri a la coalició $\{j\}$ és la mateixa que s'integri a $\{k\}$: ⅙ (⅓ multiplicat per ½). Si i s'incorpora a la coalició $\{j\}$, la qual cosa s'assumeix que fa amb probabilitat ⅙, la seva contribució és $v_{ij} - v_j$. Si i s'incorpora a la coalició $\{k\}$, la qual cosa s'assumeix que fa amb probabilitat ⅙, la seva contribució és $v_{ik} - v_k$. Com a result, la contribució d'i esperada al segon tipus de coalició és $⅙(v_{ij} - v_j) + ⅙(v_{ik} - v_k)$.

Per últim, hi ha una única coalició del tercer tipus, $\{j, k\}$. La contribució d'i a aquesta coalició és $v_{ijk} - v_{jk}$ i la seva contribució esperada és $⅓(v_{ijk} - v_{jk})$. En total, la contribució esperada d'i a una coalició és

$$⅓{\cdot}v_i + ⅙(v_{ij} - v_j) + ⅙(v_{ik} - v_k) + ⅓(v_{ijk} - v_{jk}). \tag{2}$$

[1] Aquest criteri és similar al principi de la microeconomia neoclàssica que inspira resultats del tipus "el salari d'un treballador és el valor de la seva productivitat marginal" (el valor de la seva contribució a la producció).

Comprovem que (2) és el cas particular d'(1) quan $n = 3$. En primer lloc, el conjunt de totes les coalicions S tals que $i \notin S$ té quatre elements: $\varnothing$, $\{j\}$, $\{k\}$ i $\{j, k\}$. Per això, el sumatori (1) consistirà, en aquest cas, en la suma de 4 termes. El terme corresponent a $S = \varnothing$ és

$$\frac{0!(3-0-1)!}{3!}\left[v(\varnothing \cup \{i\}) - v(\varnothing)\right] = \frac{2!}{3!}\left[v(i) - 0\right] = \frac{1}{3}v(i).$$

El corresponent a $S = \{j\}$ és

$$\frac{1!(3-1-1)!}{3!}\left[v(i,j) - v(j)\right] = \frac{1}{6}\left[v(i,j) - v(j)\right].$$

El corresponent a $S = \{k\}$ és

$$\frac{1!(3-1-1)!}{3!}\left[v(i,k) - v(k)\right] = \frac{1}{6}\left[v(i,k) - v(k)\right].$$

I el corresponent a $S = \{j, k\}$ és

$$\frac{2!(3-2-1)!}{3!}\left[v(i,j,k) - v(j,k)\right] = \frac{2!}{3!}\left[v(i,j,k) - v(jk)\right] = \frac{1}{3}\left[v(i,j,k) - v(jk)\right].$$

La fórmula (1) permet interpretar el valor de Shapley del jugador i al joc v com la <u>contribució mitjana d'i a cada coalició</u> quan: (i) particionant les coalicions en grups de coalicions que tenen el mateix nombre de membres, la probabilitat d'i d'incorporar-se a cada grup és sempre la mateixa; i (ii) dins de cada grup de coalicions d'una mateixa dimensió, la probabilitat d'incorporar-se a cada coalició del grup és també sempre la mateixa.

Versió 2 del valor de Shapley: pagaments esperats quan es forma la gran coalició

El valor de Shapley d'un joc v amb n jugadors també pot calcular-se, per a cada jugador i, amb la fórmula (3), on $N(i) = \{S \subseteq N: i \in S\}$ és el conjunt de coalicions de les que forma part el jugador i i on s és la cardinalitat de la coalició S considerada.

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in N(i)} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}\left[v(S) - v(S \setminus \{i\})\right] \qquad (3)$$

Per exemple, amb $n = 3$, el valor de Shapley del jugador i es calcularia, seguint la fórmula (3), considerant totes les coalicions S que contenen a i. Són quatre coalicions: $\{i\}$, $\{i, j\}$, $\{i, k\}$ i $\{i, j, k\}$. Això fa que $\phi_i(v)$ sigui el sumatori de quatre termes. El primer resulta de prendre $S = \{i\}$. En aquest cas, $(n - s)! = (3 - 1)! = 2! = 2$, $(s - 1)! = (1 - 1)! = 0! = 1$, $n! = 3! = 6$ i $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = v_i - v(\varnothing) = v_i$. En resum, el primer terme és $\frac{2}{6} \cdot v_i = \frac{1}{3} \cdot v_i$. Aquest terme coincideix amb el primer terme del valor de Shapley calculat segons (1).

El segon terme resulta de prendre $S = \{i, j\}$. En aquest cas, $s = 2$, $(n - s)!\ (s - 1)! = 1!\ 1! = 1$, $n! = 3! = 6$ i $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = v_{ij} - v_k$. Així, el segon terme és $\frac{1}{6}(v_{ij} - v_j)$. El tercer terme resulta de fer $S = \{i, k\}$

i és ⅙($v_{ik} - v_k$). Finalment, el darrer terme s'obté amb $S = \{i, j, k\}$. Ara $s = 3$, $(n - s)!\ (s - 1)! = 0!\ 2!$ i $v(S) - v(S\backslash\{i\}) = v_{ijk} - v_{jk}$. Per tant, el quart terme és ⅓($v_{ijk} - v_{jk}$), fent que els quatre termes calculats segons (3) siguin iguals als quatre termes calculats segons (1).

La fórmula (3) es basa en la suposició que els jugadors formen la gran coalició seguint un ordre d'incorporació aleatori de manera que totes les ordenacions dels jugadors són igualment probables. El primer jugador i de l'ordre seleccionat obté v_i; el segon jugador j en l'ordre d'incorporació obté la seva contribució marginal $v_{ij} - v_i$; i, en general, el jugador k obté $v(S \cup \{k\}) - v(S)$, on S és la coalició formada per tots els jugadors que precedeixen k en l'ordre en què es forma la gran coalició. Si tots els ordres són equiprobables, el pagament esperat d'un jugador i qualsevol el dóna la fórmula (3).

La raó és que la probabilitat que s jugadors donats entrin a la gran coalició abans que els altres $n - s$ jugadors és $\frac{(n-s)!s!}{n!}$. I la probabilitat que, entre aquests s jugadors, un cert i sigui l'últim a incorporar-se a la gran coalició és $\frac{1}{s}$. El producte $\frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}$ d'aquestes dues probabilitats representa la probabilitat que i obtengui el pagament $v(S) - v(S\backslash\{i\})$. D'aquí que (3) es pugui interpretar com el pagament esperat d'i quan tots els ordres de formació de la gran coalició són equiprobables i i obté la seva contribució marginal a la coalició dels jugadors que el precedeixen en l'ordre.

Exemple de càlcul del valor de Shapley segons (3)

El joc $v_1 = 5$, $v_2 = 10$, $v_3 = 15$, $v_{12} = 25$, $v_{13} = 30$, $v_{23} = 35$ i $v_{123} = 40$ té el cor buit. Calculem el valor de Shapley seguint la versió 2. Amb 3 jugadors, hi ha 6 formes de construir la gran coalició, cadascuna lligada amb els 6 ordres d'incorporació (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) i (3, 2, 1), on tots els ordres tenen la mateixa probabilitat de ser seleccionats. Considerem el jugador 1. Amb l'ordre (1, 2, 3), a 1 li correspondria el pagament $v_1 = 5$, atès que 1 és el primer. També rebria 5 si l'ordre fos (1, 3, 2). Amb l'ordre (2, 1, 3), correspondria a 1 el pagament $v_{12} - v_2 = 15$. Si fos (2, 3, 1), $v_{123} - v_{23} = 5$. Si fos (3, 1, 2), $v_{13} - v_3 = 15$. I si fos (3, 2, 1), $v_{123} - v_{23} = 5$. Com que els sis valors són igualment probables, el pagament esperat és la mitjana: $[v_1 + v_1 + (v_{12} - v_1) + (v_{123} - v_{23}) + (v_{13} - v_3) + (v_{123} - v_{23})]/6 = (5 + 5 + 15 + 5 + 15 + 5)/6 = 25/3$.

Versió 3 del valor de Shapley: valor obtingut de la retirada i dissolució de coalicions

El valor de Shapley és també el resultat d'un procés de liquidació de coalicions on les coalicions s'ordenen de més petites a més grans, es van retirant en aquest ordre i, quan S es retira, es descompta el seu valor $v(S)$ de totes les altres coalicions que inclouen S, repartint-se $v(S)$ a parts iguals entre els seus membres. Per a exemplificar aquest procés, sigui $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$, $v_{12} = 5$, $v_{13} = 6$, $v_{23} = 7$ i $v_{123} = 9$. Suposem que primer es retira {1}. Aleshores tenim el següent, on la penúltima fila representa el joc inicial i l'última fila indica el joc que resulta quan se satisfà la reclamació de la coalició {1} de rebre el seu valor.

coalició que es retira	*valor de les coalicions*							*pagaments*		
	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	1	2	3
∅	1	2	3	5	6	7	9	–	–	–
{1}	1 – 1 = 0	2	3	5 – 1 = 4	6 – 1 = 5	7	9 – 1 = 8	1	0	0

Partint del joc generat per la retirada d'{1}, fem el mateix quan es retira {2}.

coalició que es retira	*valor de les coalicions*							*pagaments*		
	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	1	2	3
{1}	0	2	3	4	5	7	8	1	0	0
{2}	0	2 – 2 = 0	3	4 – 2 = 2	5	7 – 2 = 5	8 – 2 = 6	0	2	0

Partint del joc generat per la retirada d'{1} i de {2}, fem el mateix quan es retira {3}.

coalició que es retira	*valor de les coalicions*							*pagaments*		
	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	1	2	3
{2}	0	0	3	2	5	5	6	0	2	0
{3}	0	0	3 – 3 = 0	2	5 – 3 = 2	5 – 3 = 2	6 – 3 = 3	0	0	3

Ara continuem retirant les coalicions amb dos jugadors (en qualsevol ordre). Suposem que l'ordre és {1, 2}, {1, 3} i {2, 3}. Finalment, es retira la gran coalició. El resultat total és el següent.

coalició que es retira	*valor de les coalicions*							*pagaments*		
	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	1	2	3
∅	1	2	3	5	6	7	9	–	–	–
{1}	0	2	3	4	5	7	8	1	0	0
{2}	0	0	3	2	5	5	6	0	2	0
{3}	0	0	0	2	2	2	3	0	0	3
{1, 2}	0	0	0	0	2	2	1	1	1	0
{1, 3}	0	0	0	0	0	2	–1	1	0	1
{2, 3}	0	0	0	0	0	0	–3	0	1	1
{1, 2, 3}	0	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1
							Pagament total	**2**	**3**	**4**

El valor de Shapley $\phi_i(v)$ de cada jugador i és la suma dels pagaments d'i al final del procés.

Virtuts i inconvenients del valor de Shapley

- *Tot joc cooperatiu (N, v) té un únic valor de Shapley.*
- *El valor de Shapley d'un joc cooperatiu (N, v) pot no pertànyer al cor del joc.*
- *El valor de Shapley d'un joc superadditiu és individualment racional però no és en general cert que el valor de Shapley d'un joc sigui individualment racional.*

Pertinença del valor de Shapley al cor

El valor de Shapley de tot joc convex pertany al cor del joc. Per tant, el cor d'un joc convex no és buit.

Un joc és convex si, per a tot $S \subseteq N$ i tot $T \subseteq N$, $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$. Aquesta condició és equivalent a què, per a tot $i \in N$ i tot $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$. La segona condició diu que, com més gran és la coalició, més gran és la contribució marginal d'un individu a la coalició i, en conseqüència, més incentiu hi ha a formar coalicions grans.

Caracterització axiomàtica del valor de Shapley
El valor de Shapley és l'únic concepte de solució per als jocs cooperatius que satisfà els axiomes EFI, SIM, NUL i ADD.

• EFI. Eficiència. La suma del que reben tots els jugadors ha de ser $v(N)$.

L'axioma d'eficiència diu que el valor $v(N)$ es reparteix entre tots els jugadors.

• SIM. Simetria. Tots els jugadors simètrics d'un joc han de rebre el mateix pagament, on i i j són jugadors simètrics al joc v si, per a tota coalició S que no conté ni i ni j, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Dos jugadors són simètrics si sempre podem reemplaçar un jugador per l'altre i el valor de la coalició no canvia: per a tota coalició S que no conté ni i ni j, la contribució que fa i en incorporar-se a S sigui igual que la contribució que fa j. Per exemple, al joc dels escurabosses, 2 i 3 són simètrics: les dues úniques coalicions que no contenen ni 2 ni 3 són $\varnothing$ i $\{1\}$, i afegir 2 a cadascuna d'elles té el mateix efecte que afegir 3: $v_2 = v_3$ i $v_{12} = v_{13}$. En canvi, 1 i 3 no són simètrics, ja que $v_{12} \neq v_{23}$: incorporar 1 a la coalició $\{2\}$ no produeix el mateix valor que incorporar 3 a la mateixa coalició $\{2\}$. Dos jugadors simètrics són igualment "productius" a cada coalició (del tipus indicat). L'axioma SIM diu que han de tenir el mateix "salari".

• NUL. Jugadors nuls. Tot jugador nul del joc ha de rebre el pagament 0, on el jugador i és nul al joc v si, per a tota coalició S que no conté a i (inclosa la coalició buida), $v(S \cup \{i\}) = v(S)$.

Un jugador és nul si la seva incorporació a qualsevol coalició és incapaç de fer augmentar el valor de la coalició. Un jugador nul no aporta res a cap coalició. Per tant, sembla raonable requerir que un jugador nul no tingui recompensa: pagament nul.

• ADD. Additivitat. Si el joc v és la suma dels jocs u i w, aleshores la solució de v ha de ser la suma de la solució d'u i w, on v és la suma d'u i w si: (i) tots tres jocs tenen el mateix conjunt de jugadors; i (ii) per a tota coalició S, $v(S) = u(S) + w(S)$.

ADD expressa una propietat de descomposició: si el joc v es pot descompondre en dos jocs u i w, aleshores la solució de v s'ha d'obtenir reunint les solucions d'u i w.

Jocs de votació (amb pesos i quota)
El joc de votació $[q; p_1, \dots, p_n]$ amb quota q i pesos $p_1, \dots, p_n$ és el joc amb n jugadors v tal que, per a tota coalició S, $v(S) = 1$ si la suma dels pesos dels membres d'S és igual o superior a la quota q i $v(S) = 0$ en cas contrari. La interpretació de $v(S) = 1$ és que S és una coalició guanyadora en la votació (imposa el seu criteri) i la de $v(S) = 0$, que S és perdedora.

Per exemple, el joc de votació [2; 1, 1, 1] representa el joc de amb 3 jugadors on cada jugador té un vot i la quota està en 2 vots: $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ i $v_{12} = v_{13} = v_{23} = v_{123} = 1$. Per tant, [2; 1, 1, 1] no és més que la votació per majoria simple amb 3 votants.

Definició d'índex de poder de Shapley i Shubik (1954)
L'índex de poder π_i de Shapley i Shubik del jugador i a un joc de votació està definit per la fórmula (4), on $N(i) = \{S \subseteq N: i \in S\}$ és el conjunt de coalicions de les que forma part el jugador i. L'índex π_i coincideix amb el valor de Shapley d'i en el joc de votació, ja que (4) és un cas particular de (3).

$$\pi_i = \sum_{S \in N(i)} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \tag{4}$$

L'índex π_i expressa la probabilitat que el jugador i sigui decisiu, això és, que la incorporació d'i a una coalició perdedora la transformi en guanyadora. El "poder" d'i es mesura en termes de la probabilitat de ser un membre pivot d'una coalició guanyadora: que la seva sortida de la coalició la transformi en perdedora.

Com a il·lustració, prenguem el joc [2; 1, 1, 1]. El jugador 1 només és decisiu quan s'incorpora a la coalició {2} o a la {3}. Per aquest motiu, 1 és pivot en dues ocasions. Per la simetria del joc, passa el mateix amb 2 i 3: 2 només és decisiu en incorporar-se a {1} o a {3}, i 3 només ho és en incorporar-se a {1} o {2}. La conclusió és que tots tres són igualment "poderosos" o decisius. O, més exactament, la probabilitat que un qualsevol d'ells sigui decisiu és la mateixa que la probabilitat que ho sigui un altre. Capturant aquest raonament, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = ⅓$. Com a segon exemple, sigui [5; 4, 4, 1]. Podria pensar-se que el poder d'1 i 2 és superior al de 3. No és així: en aquest joc, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = ⅓$.

L'índex de poder permet avaluar la "bondat" de determinats mètodes de votació, en el sentit de poder establir la capacitat real de cada votant d'influir en el resultat de la votació. Els exercicis 16 i 17 de la llista d'exercicis il·lustren aquest punt.

Bibliografia

- Gura, Ein-ya i Maschler, Michael B. (2008): *Insights into Game Theory: An Alternative Mathematical Experience*. Cambridge University Press: Cambridge, capítol 3.
- Harsanyi, John C. (1977): *Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations*. Cambridge University Press: Cambridge.
- Luce, Duncan i Raiffa, Howard (1957): *Games and Decisions*. John Wiley: Nova York.
- Ordeshook, Peter C. (1986): *Game Theory and Political Theory*. Cambridge University Press: Cambridge.
- Shapley, Lloyd S. (1953): "A value for n-person games", a Kuhn, Harold W. i Tucker, Albert W. (eds): *Contributions to the Theory of Games*, volum II. Princeton University Press: Princeton, pp. 307–317.
- Shapley, Lloyd S. i Shubik, Martin (1954): "A method for evaluation of the distribution of power in a commettee system", *The American Political Science Review* 48, 787–792.