Notes sobre jocs seqüencials

1. Jocs seqüencials. Un joc simultani està format per un conjunt de jugadors, un conjunt d'estratègies per a cada jugador i una funció que estableix els pagaments dels jugadors per a cada vector d'estratègies. En essència, un joc seqüencial està format pels mateixos components als quals s'afegeix l'ordre en què juguen els jugadors i la informació que els jugadors tenen quan han de jugar. Les Fig. 1, 2 i 3 mostren exemples de jocs seqüencials, on el node r indica on comença a jugar-se el joc.

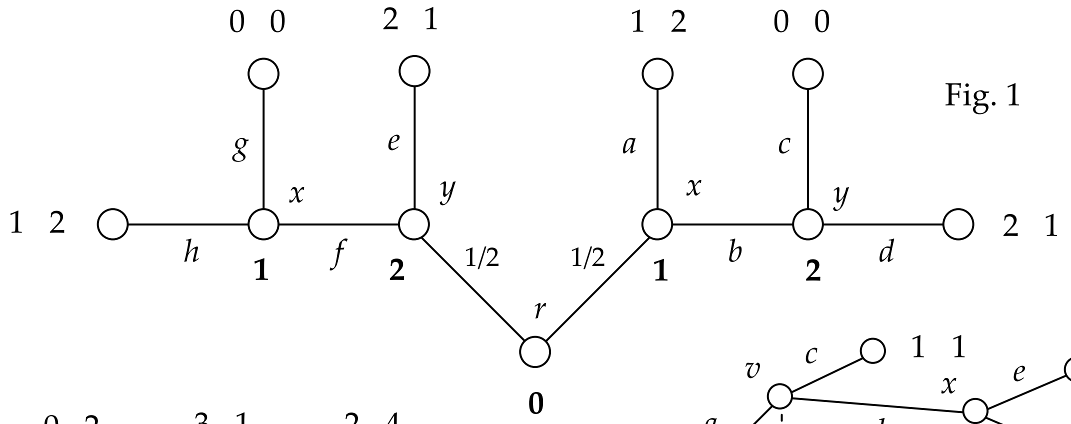


Fig. 1

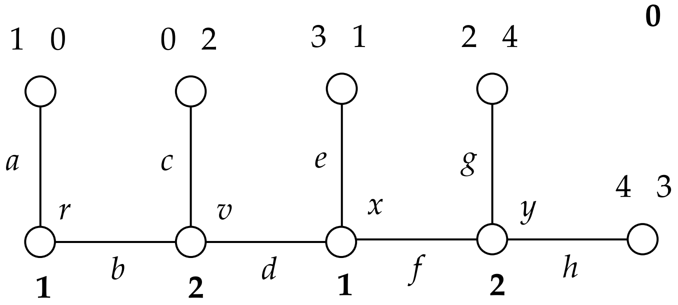


Fig. 2

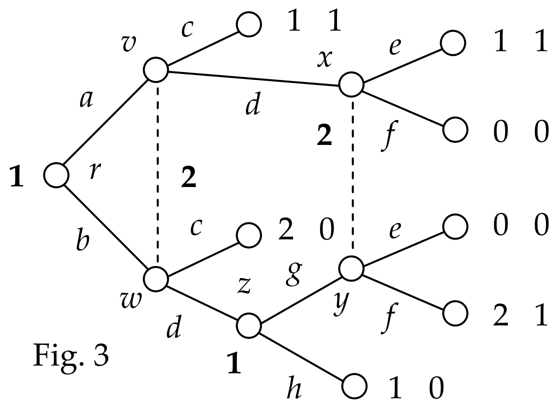


Fig. 3

2. Conjunts d'informació. Un conjunt d'informació (CI) d'un jugador i és un conjunt de nodes de decisió assignats a i entre els quals i no pot distingir. Per tant, i té la mateixa informació a tots els nodes d'un mateix CI. Els conjunts d'informació que contenen més d'un node s'indiquen mitjançant línies discontínues que uneixen els nodes que formen el CI. Un node no unit amb algun altre mitjançant línies discontínues constitueix ell mateix un CI. Per exemple (p.e.), el node x a la Fig. 2 constitueix el conjunt d'informació $\{x\}$: quan el joc arriba al node x, el jugador assignat a aquest node (el jugador 1) sap que es troba en aquell node. A la Fig. 3, $\{x, y\}$ és un CI del jugador 2: quan les decisions dels jugadors porten a algun d'aquests dos nodes, el jugador 2 sap que es troba en algun d'aquests dos nodes però no sap en quin. En tots els nodes d'un mateix conjunt d'informació s'han de tenir les mateixes accions. P.e., tant a x com a y al joc de la Fig. 3 el jugador 2 disposa de les accions e i f: si les accions al node x fossin diferents de les accions a y, 2 podria distingir els nodes x i y en funció de les accions disponibles a cada node, la qual cosa contradiria el fet x i y són part del mateix CI.

3. Informació perfecta i informació imperfecta. Un joc seqüencial és un joc amb informació perfecta si cada conjunt d'informació de cada jugador conté només un node. Un joc seqüencial és un joc amb informació imperfecta si hi ha algun conjunt d'informació que estigui format per més d'un node. Els jocs de les Fig. 1 i 2 són jocs amb informació perfecta. El joc de la Fig. 3 és un joc amb informació imperfecta.

4. Accions d'un jugador. Una <u>acció</u> d'un jugador a un dels seus CI és qualsevol de les branques que surt d'algun dels nodes del CI. Cada branca representa una possible decisió del jugador al CI. P.e., el jugador 1 del joc de la Fig. 2 té dues accions al CI $\{r\}$: l'acció a i l'acció b. A la Fig. 3, les accions del jugador 2 al CI $\{x, y\}$ són e i f. El conjunt d'accions d'un jugador a un joc és el conjunt de totes les accions a tots els seus conjunts d'informació. P.e., el conjunt d'accions del jugador 2 de la Fig. 3 és $\{c, d, e, f\}$ i el conjunt d'accions del jugador 1 de la Fig. 1 és $\{a, b, e, f\}$.

5. Estratègies pures d'un jugador. <u>Una estratègia pura d'un jugador és un vector format per una assignació d'una acció a cada conjunt d'informació del jugador</u>. P.e., una estratègia pura del jugador 1 del joc de la Fig. 2 especifica quina acció tria el jugador 1 a cadascun dels seus dos CI. El parell (a, e) seria una estratègia pura, indicant que 1 escolliria a al seu primer CI $\{r\}$ i escolliria e al seu segon CI $\{x\}$. Una estratègia pura del jugador 2 del joc de la Fig. 3 també consistiria en un parell: què triaria 2 al CI $\{v, w\}$ (això és, c o d) i què triaria 2 al CI $\{x, y\}$ (això és, e o f). El seu conjunt d'estratègies pures tindria quatre elements: (c, e), (c, f), (d, e) i (d, f) (per a simplicar, s'escriurà en ocasions ce, cf, de i df).

6. Representació d'un joc seqüencial com a joc simultani. El joc simultani que representa un joc seqüencial està format pel mateix conjunt de jugadors que el joc seqüencial, les estratègies pures de cada jugador (tal com es defineixen en el punt 5) i els pagaments que obtindrien els jugadors si, al joc seqüencial, juguessin els vectors d'estratègies pures corresponents. La Fig. 4 mostra la representació com a joc simultani del joc de la Fig. 1. P.e., el vector de pagaments (1½, 1½) corresponent al vector d'estratègies pures (ag, ce) s'obté de la següent manera. Amb probabilitat ½, es passa del node inicial r al node x, on, aplicant l'estratègia pura (a, g), 1 tria a. En triar a al node x el joc s'acaba i s'arriba al vector de pagaments (1, 2). Per tant, s'obté (1, 2) amb probabilitat ½. D'altra banda, amb probabilitat ½, es passa del node inicial r al node y, on, aplicant l'estratègia pura (c, e), 2 tria e. En triar e al node y el joc s'acaba i s'arriba al vector de pagaments (2, 1). Així, s'obté (1, 2) amb probabilitat ½. El resultat d'obtenir (2, 1) amb probabilitat ½ i (1, 2) amb probabilitat ½ és el vector (1½, 1½) = (1'5, 1'5).

Fig. 4

1 \ 2	*ce*	*cf*	*de*	*df*
ag	1½ 1½	½ 1	1½ 1½	½ 1
ah	1½ 1½	1 2	1½ 1½	1 2
bg	1 ½	0 0	2 1	1 ½
bh	1 ½	½ 1	2 1	1½ 1½

7. Estratègies (mixtes) d'un jugador. <u>Una estratègia mixta (o, simplement, estratègia) d'un jugador és una distribució de probabilitat sobre el conjunt d'estratègies pures del jugador</u>. P.e., l'estratègia σ_2 del jugador 2 del joc de la Fig. 3 tal que $\sigma_2(ce) = ½$, $\sigma_2(cf) = ⅓$, $\sigma_2(de) = ⅙$ i $\sigma_2(df) = 0$ és l'estratègia consistent en triar l'estratègia pura (c, e) amb probabilitat ½, triar (c, f) amb probabilitat ⅓, triar (d, e) amb probabilitat ⅙ i no triar (d, f) (triar-la amb probabilitat 0). Una estratègia que assigna tota la probabilitat a només una estratègia pura s'identifica amb aquesta estratègia pura. P.e., l'estratègia σ_2 del jugador 2 del joc de la Fig. 3 tal que $\sigma_2(ce) = 1$ es considera equivalent a l'estratègia pura (c, e). Una <u>estratègia completament mixta</u> d'un jugador és una que assigna probabilitat positiva a totes les estratègies pures del jugador.

8. Estratègies de comportament d'un jugador. Una estratègia de comportament d'un jugador és una assignació, a cada conjunt d'informació h del jugador, d'una distribució de probabilitat sobre el conjunt d'accions disponibles al conjunt d'informació h. P.e., una estratègia de comportament β_1 per al jugador 1 del joc de la Fig. 2 seria un parell (β_{1r}, β_{1x}), on β_{1r} és una distribució de probabilitat sobre el conjunt $\{a, b\}$ d'accions del CI $\{r\}$ i β_{1x} és una distribució de probabilitat sobre el conjunt $\{e, f\}$ d'accions del CI $\{x\}$. En concret, β_1 tal que $\beta_{1r}(a) = ½$ i $\beta_{1x}(e) = 1$ seria l'estratègia de comportament tal que 1 triaria l'acció a amb probabilitat ½ al node r (i, per tant, triaria b amb probabilitat ½ al node r) i triaria l'acció e amb probabilitat 1 al node x. Per al jugador 2 de la Fig. 3, l'estratègia de comportament β_2 tal que $\beta_{2h}(c) = 0$ i $\beta_{2h'}(e) = ⅓$, on $h = \{v, w\}$ i $h' = \{x, y\}$, és aquella que faria que 2 triés l'acció d al seu primer conjunt d'informació $h = \{v, w\}$ i triés l'acció e amb probabilitat ⅓ al seu segon conjunt d'informació $h' = \{x, y\}$.

9. Diferència entre estratègies mixtes i de comportament. Les estratègies mixtes i les de comportament expressen dues maneres diferents de randomitzar. A una mixta, primer es combinen les accions a cada conjunt d'informació per a construir les estratègies pures (els possibles plans d'acció a cada CI) i després es randomitza sobre les estratègies pures (una mixta implica correlació). A una de comportament, primer es randomitza dins de cada conjunt d'informació i després es combinen les randomitzacions a cada conjunt d'informació.

10. Estratègies pures d'un jugador compatibles amb conjunts d'informació del mateix jugador. L'estratègia pura s_i del jugador i és compatible amb el conjunt d'informació h del mateix jugador i si existeix una combinació d'estratègies pures s_{-i} dels altres jugadors tal que algun node d'h s'assoleix amb probabilitat positiva quan es juga el vector d'estratègies pures (s_i, s_{-i}). Per al conjunt d'informació h i l'acció a disponible a h, $C(h)$ és el conjunt d'estratègies del jugador assignat a h que són compatibles amb h i $C(h, a)$ és el conjunt d'estratègies del jugador assignat a h que són compatibles i que prescriuen triar a al conjunt d'informació h. P.e., al joc de la Fig. 2, $C(\{x\}) = \{be, bf\}$, de manera que les estratègies pures ae i af no són compatibles amb $\{x\}$: si ae o af es juguen, és impossible que es pugui assolir el node x. Per tant, $C(\{x\}, e) = \{be\}$ i $C(\{x\}, f) = \{bf\}$. En canvi, al mateix joc, $C(\{r\}) = \{ae, af, be, bf\}$: totes les estratègies pures del jugador 1 són compatibles amb $\{r\}$, el CI que conté el node on s'inicia el joc. D'aquí que $C(\{r\}, a) = \{ae, af\}$ i $C(\{r\}, b) = \{be, bf\}$. Al joc de la Fig. 1, totes les estratègies del jugador 1 són compatibles amb tots els conjunts d'informació del jugador 1. Al joc de la Fig. 3, l'estratègia pura (a, g) no és compatible amb el CI $\{z\}$, en tant que l'estratègia pura (c, e) no és compatible amb el CI $\{x, y\}$.

11. Representació d'una estratègia mixta com a estratègia de comportament. Anomenant H el conjunt de conjunts d'informació d'un jugador i, una estratègia de comportament $\beta_i = (\beta_{ih})_{h\in H}$ del jugador i és una representació com a estratègia de comportament de l'estratègia mixta σ_i del mateix jugador si, per a tot conjunt d'informació h del jugador i i per a tota acció a disponible al conjunt d'informació h

$$\beta_{ih}(a)\ [\textstyle\sum_{s_i\in C(h)} \sigma_i(s_i)] = \sum_{s_i\in C(h,a)} \sigma_i(s_i) \qquad (1)$$

on $\beta_{ih}(a)$ és la probabilitat que l'estratègia de comportament assigna a l'acció a al conjunt d'informació i $\sigma_i(s_i)$ és la probabilitat que l'estratègia mixta σ_i assigna a l'estratègia pura s_i. La condició (1) expressa la idea que, per a tota acció a disponible al CI h, $\beta_{ih}(a)$ és la probabilitat condicional d'escollir a a h donades les probabilitats establertes per σ_i. Si no hi ha cap estratègia pura d'i compatible amb el seu CI h, llavors $\sum_{s_i \in C(h)} \sigma_i(s_i) = \sum_{s_i \in C(h,a)} \sigma_i(s_i) = 0$ i qualsevol distribució de probabilitat β_{ih} sobre el conjunts d'accions al CI h satisfà (1). P.e., considerem l'estratègia mixta σ_1 del jugador 1 de la Fig. 2 tal que $\sigma_1(ae) = 1/6$, $\sigma_1(af) = 2/6$, $\sigma_1(be) = 3/6$ i $\sigma_1(bf) = 0$. Calculem l'estratègia de comportament (β_{1r}, β_{1x}) que representa σ_1. D'entrada, $C(\{r\}) = \{ae, af, be, bf\}$ i $C(\{r\}, a) = \{ae, af\}$. Aplicant (1),

$$\beta_{1r}(a)\,[\sigma_1(ae) + \sigma_1(af) + \sigma_1(be) + \sigma_1(bf)] = \sigma_1(ae) + \sigma_1(af),$$

ja que, en aquest cas, $\sum_{s_i \in C(h)} \sigma_i(s_i) = \sigma_1(ae) + \sigma_1(af) + \sigma_1(be) + \sigma_1(bf)$ i $\sum_{s_i \in C(h,a)} \sigma_i(s_i) = \sigma_1(ae) + \sigma_1(af)$. Atès que $\sigma_1(ae) + \sigma_1(af) + \sigma_1(be) + \sigma_1(bf) = 1/6 + 2/6 + 3/6 + 0 = 1$ i que $\sigma_1(ae) + \sigma_1(af) = 1/6 + 2/6 = 1/2$, resulta que $\beta_{1r}(a) = 1/2$. Com que β_{ir} és una distribució de probabilitat sobre el conjunt d'accions a $\{r\}$ i com que $\{a, b\}$ és aquest conjunt, $\beta_{1r}(b) = 1 - \beta_{1r}(a) = 1 - 1/2 = 1/2$. Amb això queda calculada β_{1r}. En relació amb β_{1x}, $C(\{x\}) = \{be, bf\}$ i $C(\{x\}, e) = \{be\}$. Aplicant (1),

$$\beta_{1x}(e)\,[\sigma_1(be) + \sigma_1(bf)] = \sigma_1(be).$$

Atès que $\sigma_1(be) + \sigma_1(bf) = 3/6 + 0 = 3/6$ i que $\sigma_1(be) = 3/6$, resulta que $\beta_{1x}(e)\cdot 3/6 = 3/6$ i, per tant, $\beta_{1x}(e) = 1$ i, donat que β_{1x} és una distribució de probabilitat sobre el conjunt $\{e, f\}$, $\beta_{1x}(f) = 0$. En resum, l'estratègia de comportament que representa l'estratègia mixta σ_1 tal que $\sigma_1(ae) = 1/6$, $\sigma_1(af) = 2/6$, $\sigma_1(be) = 3/6$ i $\sigma_1(bf) = 0$ estableix que 1 ha de triar l'acció a amb probabilitat $1/2$ al seu conjunt d'informació $\{r\}$ i ha de triar l'acció e amb probabilitat 1 al seu segon conjunt d'informació $\{x\}$.

12. Representació d'una estratègia de comportament com a estratègia mixta. La representació com a estratègia mixta d'una estratègia de comportament $\beta_i = (\beta_{ih})_{h \in H}$ del jugador i que té H com a conjunt de conjunts d'informació és l'estratègia mixta σ_i del jugador i tal que, per a tota estratègia pura s_i del jugador i,

$$\sigma_i(s_i) = \prod_{h \in H} \beta_{ih}(s_{ih}) \tag{2}$$

on $\sigma_i(s_i)$ és la probabilitat que l'estratègia mixta σ_i assigna a l'estratègia pura s_i, s_{ih} és l'acció que l'estratègia pura s_{ih} selecciona al conjunt d'informació h, $\beta_{ih}(s_{ih})$ és la probabilitat que l'estratègia de comportament β_i assigna a l'acció s_{ih} i $\prod_{h \in H}$ representa el producte de les probabilitats $\beta_{ih}(s_{ih})$. P.e., considerem l'estratègia de comportament $\beta_1 = (\beta_{1r}, \beta_{1x})$ calculada al punt 11: $\beta_{1r}(a) = \beta_{1r}(b) = 1/2$, $\beta_{1x}(e) = 1$, $\beta_{1x}(f) = 0$. Aplicant (2), l'estratègia mixta τ_1 que representaria β_1 satisfaria: $\tau_1(ae) = \beta_{1r}(a)\cdot\beta_{1x}(e) = 1/2$, $\tau_1(af) = \beta_{1r}(a)\cdot\beta_{1x}(f) = 1/2\cdot 0 = 0$, $\tau_1(be) = \beta_{1r}(b)\cdot\beta_{1x}(e) = 1/2$ i $\tau_1(bf) = \beta_{1r}(b)\cdot\beta_{1x}(f) = 1/2\cdot 0 = 0$. És fàcil comprovar que τ_1 és una distribució de probabilitat sobre el conjunt d'estratègies pures $\{ae, af, be, bf\}$, perquè $\tau_1(ae) + \tau_1(af) + \tau_1(be) + \tau_1(bf) = 1/2 + 0 + 1/2 + 0 = 1$. Si invertim el procés i busquem l'estratègia de comportament que representa l'estratègia mixta τ_1, recuperarem l'estratègia de comportament original β_1. Anomenem γ_1 l'estratègia de comportament que representa la mixta τ_1. Aplicant (1),

$$\gamma_{1r}(a)\,[\tau_1(ae) + \tau_1(af) + \tau_1(be) + \tau_1(bf)] = \tau_1(ae) + \tau_1(af).$$

Això és, $\gamma_{1r}(a)\,[1/2 + 0 + 1/2 + 0] = 1/2 + 0$, d'on resulta $\gamma_{1r}(a) = 1/2 = \beta_{1r}(a)$. Tornant a aplicar (1), $\gamma_{1x}(e)\,[\tau_1(be) + \tau_1(bf)] = \tau_1(be)$. D'aquí, $\gamma_{1x}(e)\,[1/2 + 0] = 1/2 + 0$. En suma, $\gamma_{1x}(e) = 1 = \beta_{1x}(e)$ i, en conseqüència, γ_1 és la mateixa estratègia de comportament que β_1. A més, β_1 representa tant a σ_1 com a τ_1.

13. Joc seqüencial amb memòria perfecta. Un joc seqüencial és un joc amb (o que té) memòria perfecta si es compleix el següent per a tot jugador i: si un node x del jugador i és precedit per l'acció a presa a un node v assignat també al jugador i, aleshores cada node y del conjunt d'informació del que forma part x ha de ser precedit per la mateixa acció a presa a algun node w que pertany al mateix conjunt d'informació que v. La propietat de memòria perfecta expressa la idea que un jugador sempre recorda les decisions preses anteriorment: si prendre l'acció a a un node v d'un conjunt d'informació h del jugador i pot portar a un segon conjunt d'informació h' del mateix jugador aleshores prendre l'acció a a qualsevol altre node d'h també ha de poder portar a h'. Les Fig. 5 i 6 mostren casos d'incompliment de la propietat memòria perfecta.

Fig. 5

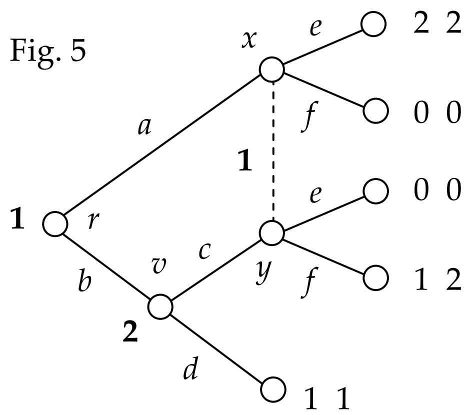
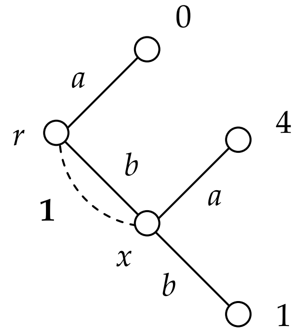


Fig. 6



14. Jocs amb memòria imperfecta. Al joc de la Fig. 5, el jugador 1 no pot recordar al seu segon conjunt d'informació $h = \{x, y\}$ si va triar l'acció a o l'acció b al seu primer conjunt d'informació $\{r\}$: atès que 1 not distingir x d'y, quan s'arriba a h, 1 no sap si es troba a x (i, per tant, va triar a a l'arrel del joc r) o si es troba a y (i, per tant, va triar b a r i, a continuació, 2 va triar c al node v). El joc de la Fig. 6, degut a Michele Piccione i Ariel Rubinstein, representa el cas d'un conductor desmemoriat. El jugador 1 és un individu que es troba en un bar planejant el retorn a casa. De camí cap a casa, l'individu ha de circular per una carretera i sortir quan es trobi a la segona cruïlla. Si surt (acció a) a la primera cruïlla (node r) va a parar a un lloc amb un alt cost de retorn cap a la carretera (pagament 0). Si surt a la segona cruïlla (node x) obté el pagament més alt: 4. Si no surt a la segona cruïlla (acció b) va a parar a un lloc amb un menor cost de retorn a la carretera (pagament 1). El problema, del qual l'individu és conscient quan planeja el viatge, és que quan arribi a una cruïlla no se'n recordarà de si és la primera o la segona. Per tant, per a l'individu, els nodes r i x són indistingibles. Això implica que, quan és a x, ha oblidat que prèviament ha decidit no sortir ; i que, quan és a r, no pot establir si ja ha passat per la primera cruïlla. Aquesta situació té algunes conseqüències estranyes. Per exemple, si l'individu només tria una estratègia pura (això és, a = sortir o b = continuar), és impossible que arribi a casa.

Atès que el jugador de la Fig. 6 només té un conjunt d'informació, estratègies mixtes i de comportament coincideixen. Quina estratègia mixta maximitza el seu pagament esperat? La funció de pagaments esperats, expressada en termes de la probabilitat b de continuar, és $U(b) = (1 - b)\cdot 0 + b\cdot[4\cdot(1 - b) + 1\cdot b] = 4b - 3b^2$. Per a maximitzar respecte de b, s'iguala la derivada $\frac{\partial U(b)}{\partial b}$ a zero. D'aquí, $4 - 6b = 0$ i $b = 2/3$. Per tant, no sortir amb probabilitat $2/3$ maximitza el pagament esperat, que seria $4/3$ quan $b = 2/3$.

15. Teorema de Kuhn (Harold W. Kuhn, 1953). *En un joc seqüencial, sigui* β *el vector d'estratègies de comportament que representen les estratègies mixtes del vector* σ *d'estratègies mixtes. Aleshores, per a tot jugador i, el pagament esperat d'i quan es juga* β *coincideix amb el pagament esperat d'i quan es juga* σ *si, i només si, el joc té memòria perfecta.*

16. Il·lustració del Teorema de Kuhn. El següent exemple demostra que la hipòtesi de memòria perfecta és necessària per a la validesa del Teorema de Kuhn. Al joc de la Fig. 5, considera l'estratègia mixta σ_1 del jugador 1 tal que $\sigma_1(ae) = \sigma_1(bf) = ½$. La seva representació com a estratègia de comportament β_1 satisfà $\beta_{1r}(a) = \beta_{1h}(e) = ½$, on $h = \{x, y\}$. Però quan el jugador 2 juga l'estratègia mixta σ_2 tal que $\sigma_2(c) = ½$, el pagament esperat d'1 triant σ_1 és $3/2$, en tant que el seu pagament esperat triant β_1 és $7/8$. Pel Teorema de Kuhn, el joc de la Fig. 5 no pot tenir memòria perfecta, que és efectivament el que succeeix.

17. Importància del Teorema de Kuhn (TK). Quan el joc té memòria perfecta, el TK liquida el debat sobre si a un jugador li convé més triar estratègies mixtes o de comportament. En principi, una estratègia mixta és més general (permet més coses) que una de comportament. Però les estratègies són instruments per a aconseguir un fi: els pagaments. Pel TK, si el joc té memòria perfecta, per a cada estratègia mixta hi ha una estratègia de comportament que proporciona el mateix pagament, de manera que no s'hi guanya res seleccionant estratègies mixtes en comptes d'estratègies de comportament. Per tant, no cal que un jugador es preocupi de correlacionar les seves decisions a diferents conjunts d'informació sinó que pot enfrontar-se al problema de què jugar localment, això és, considerant la decisió de què triar a cada conjunt d'informació per separat. Pel TK, no hi ha cap pèrdua de generalitat si els jocs amb memòria perfecta s'analitzen en termes d'estratègies de comportament, que són més fàcils de visualitzar i entendre a una joc seqüencial que les estratègies mixtes. L'anàlisi en termes d'estratègies de comportament porta associada una complicació: quan un jugador decideix què fer a un conjunt d'informació amb més d'un node necessita formar una creença sobre el node en què es troba.

18. Creences. Una creença π_i d'un jugador i és una assignació, a cada conjunt d'informació h del jugador, una distribució de probabilitat sobre els nodes que formen h. Un sistemes de creences π és una assignació d'una creença π_i a cada jugador i. P.e., una creença π_2 del jugador 2 del joc de la Fig. 3 serà un parell $(\pi_{2h}, \pi_{2h'})$, on $h = \{v, w\}$ i $h' = \{x, y\}$, tal que π_{2h} és una distribució de probabilitat sobre h i $\pi_{2h'}$ és una distribució de probabilitat sobre h'. La creença tal que $\pi_{2h}(v) = ⅓$, $\pi_{2h}(w) = ⅔$, $\pi_{2h'}(x) = 1$ i $\pi_{2h'}(y) = 0$ significa que, quan s'arriba al conjunt d'informació $h = \{v, w\}$, el jugador 2 creu que la probabilitat de trobar-se al node v és ⅓ (i, per tant, la probabilitat de trobar-se al node w és ⅔) i que, quan s'arriba al conjunt d'informació $h' = \{x, y\}$, el jugador 2 creu que la probabilitat de trobar-se al node x és 1 (i, per tant, 2 creu que es troba al node x). La creença a un CI resumeix el que el jugador assignat al CI creu que passat abans d'arribar al CI.

19. Consistència de les creences amb vectors d'estratègies de comportament. Donat un vector β d'estratègies de comportament (incloent-hi, si n'hi ha, les eleccions del jugador 0: la naturalesa), el sistema de creences π és consistent amb β si, per a tot jugador i, tot conjunt d'informació h d'i i tot node x pertanyent a h, la probabilitat $\pi(x)$ que el sistema de creences assigna al node x satisfà (3)

$$\pi(x) \cdot \sum_{y \in h} p(y|\beta) \;=\; p(x|\beta) \qquad (3)$$

on, per a tot node v del conjunt d'informació h, $p(v|\beta)$ és la probabilitat d'arribar al node v des de l'arrel quan es juga d'acord amb β: el producte de les probabilitats de les branques que connecten l'arrel amb v. La fórmula (3) no és sempre útil: si la probabilitat d'arribar a h és 0, $\sum_{y\in h} p(y|\beta) = p(x|\beta) = 0$ i qualsevol valor de $\pi(x)$ satisfà (3). En canvi, si hi ha una probabilitat positiva d'arribar al CI h des de l'arrel, aleshores $\sum_{y\in h} p(y|\beta) > 0$ i $\pi(x) = p(x|\beta) \,/\, \sum_{y\in h} p(y|\beta)$.

P.e., suposem que, al joc de la Fig. 3, el vector β d'estratègies de comportament satisfà $\beta_{1r}(a) = \frac{1}{3}$, $\beta_{2h}(c) = \frac{1}{2}$, $\beta_{1z}(g) = \frac{1}{4}$ i $\beta_{2h'}(e) = \frac{1}{5}$, on $h = \{v, w\}$ i $h' = \{x, y\}$. La Fig. 7 mostra aquestes probabilitats. Es tracta de determinar quins sistemes de creences π són compatibles amb β. D'entrada, per als conjunts d'informació que només tenen un node només es pot definir una creença: assignar probabilitat 1 al node. Per tant, atès que cadascun dels dos CI del jugador 1 té un únic node, el jugador 1 només pot tenir una creença: la creença π_1 tal que $\pi_{1r}(r) = \pi_{1z}(z) = 1$. D'altra banda, les creences del jugador 2, per a ser consistents amb β, han de satisfer (3). Apliquem primer (3) per a determinar la creença π_{2h} de 2 al CI $h = \{v, w\}$. Prenent el node v, (3) implica que

$$\pi_{2h}(v) \cdot [p(v|\beta) + p(w|\beta)] = p(v|\beta).$$

Atès que $p(v|\beta)$ representa la probabilitat d'arribar a v (partint de l'arrel r) quan es juga β, és clar que $p(v|\beta) = \beta_{1r}(a) = \frac{1}{3}$. De manera anàloga, $p(w|\beta) = \beta_{1r}(b) = \frac{2}{3}$. Així, $\pi_{2h}(v)\cdot[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}] = \frac{1}{3}$, d'on es dedueix que $\pi_{2h}(v) = \frac{1}{3}$ i, com a resultat, $\pi_{2h}(w) = \frac{2}{3}$. Passant ara a determinar a creença $\pi_{2h'}$ de 2 al CI $h' = \{x, y\}$, prenguem, p.e., el node x. Per (3), s'ha de tenir que

$$\pi_{2h'}(x) \cdot [p(x|\beta) + p(y|\beta)] = p(x|\beta).$$

Com que arribar al node x des de l'arrel r requereix triar les accions a i d, $p(x|\beta) = \beta_{1r}(a)\cdot\beta_{2h}(d) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. A més, com que arribar al node y des de l'arrel r requereix triar les accions b, d i g, $p(y|\beta) = \beta_{1r}(b)\cdot\beta_{2h}(d)\cdot\beta_{1z}(g) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. En suma, cal que $\pi_{2h'}(x)\cdot[\frac{1}{6} + \frac{1}{12}] = \frac{1}{6}$. Aïllant $\pi_{2h'}(x)$, s'arriba a $\pi_{2h'}(x) = \frac{1}{6} \,/\, (\frac{1}{6} + \frac{1}{12}) = \frac{2}{3}$. Per tant, la creença π_2 del jugador 2 consistent amb el vector β d'estratègies de comportament satisfà $\pi_{2h}(v) = \frac{1}{3}$, $\pi_{2h}(w) = \frac{2}{3}$, $\pi_{2h'}(x) = \frac{2}{3}$ i $\pi_{2h'}(y) = \frac{1}{3}$.

Com a segon exemple, considerem β tal que $\beta_{1r}(b) = \beta_{1z}(h) = 1$. Aleshores, $p(v|\beta) = \beta_{1r}(a) = 0$. Això fa que $\pi_{2h}(v) = 0$. Equivalentment, atès que $p(w|\beta) = \beta_{1r}(b)$, $\pi_{2h}(w) = 1$. Però ara resulta que $p(x|\beta) = \beta_{1r}(a)\cdot\beta_{2h}(d) = 0$ i que $p(y|\beta) = \beta_{1r}(b)\cdot\beta_{2h}(d)\cdot\beta_{1z}(g) = 0$, de manera que qualsevol valor $\pi_{2h'}(x)$ satisfà (3). Aquest resultat significa que qualsevol creença al CI $\{v, w\}$ és consistent amb β: per a tot $\lambda \in [0, 1]$, $\pi_{2h'}$ tal que $\pi_{2h'}(x) = \lambda$ i $\pi_{2h'}(y) = 1 - \lambda$ és consistent amb β.

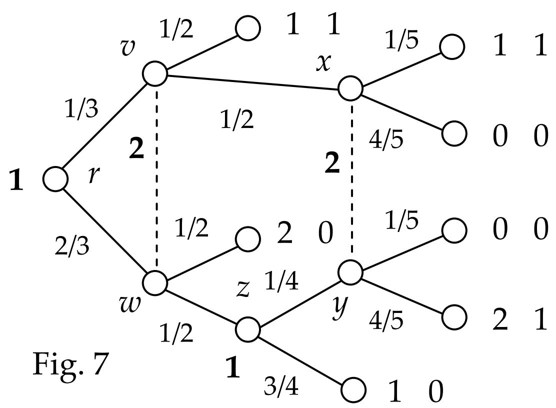


Fig. 7

20. Seqüencialitat racional. Donat un vector β d'estratègies de comportament, l'estratègia β_{ih} corresponent al jugador i assignat al conjunt d'informació és <u>seqüencialment racional</u> al conjunt d'informació h, respecte d'un sistema de creences π i respecte de β, si β_{ih} maximitza el pagament esperat d'i, donades les creences especificades per π, assumint que h s'assoleix i que els jugadors que juguen després del jugador i juguen d'acord amb β.

P.e., considerem el vector β representat a la Fig. 7 i el sistema de creences π tal que $\pi_{2h}(v) = 1/6$, on $h = \{v, w\}$. Per a què $\beta_{2h}(c) = \beta_{2h}(d) = 1/2$ sigui seqüencialment racional a h respecte de π i β, cal que triar c i d amb probabilitat ½ sigui una millor resposta al que β especifica més enllà d'h, donat que la creença de 2 a h sintesitza el que 2 creu que ha passat abans d'arribar a h (això és, que 1 ha triat a i b amb probabilitat ½; al punt 19 s'ha comprovat que aquesta creença no és consistent amb β, però aquest fet ara no ve al cas). Atès que $\beta_{2h}(c) = \beta_{2h}(d) = 1/2$ significa que 2 randomitza al CI h, tant c com d han de donar el mateix pagament esperat per tal que $\beta_{2h}(c) = \beta_{2h}(d) = 1/2$ sigui seqüencialment racional. El pagament esperat de c és $\pi_{2h}(v)\cdot 1 + \pi_{2h}(w)\cdot 0 = 1/6$. Amb $h' = \{x, y\}$, el pagament esperat de d és $\pi_{2h}(v)\cdot[\beta_{2h'}(e)\cdot 1 + \beta_{2h'}(f)\cdot 0] + \pi_{2h}(w)\cdot[\beta_{1z}(h)\cdot 0 + \beta_{1z}(g)\cdot(\beta_{2h'}(e)\cdot 0 + \beta_{2h'}(f)\cdot 1)] = \pi_{2h}(v)\cdot\beta_{2h'}(e) + \pi_{2h}(w)\cdot\beta_{1z}(g)\cdot\beta_{2h'}(f) = 1/6\cdot 1/5 + 5/6\cdot 1/4\cdot 4/5 = 1/30 + 1/6 > 1/6$. La conclusió és que, donat β i π, triar d al conjunt d'informació $h = \{v, w\}$ dóna al jugador 2 un pagament esperat superior a triar c, la qual cosa fa que la randomització $\beta_{2h}(c) = \beta_{2h}(d) = 1/2$ no sigui seqüencialment racional a h.

En canvi, suposem que, al CI $h' = \{x, y\}$, la creença de 2 és tal que $\pi_{2h'}(x) = \pi_{2h'}(y) = 1/2$. En tal cas, $\beta_{2h'}$ que satisfà $\beta_{2h'}(e) = 1/5$ i $\beta_{2h'}(f) = 4/5$ és seqüencialment racional a $h' = \{x, y\}$: el pagament esperat de triar e a h' és $\pi_{2h'}(x)\cdot 1 + \pi_{2h'}(y)\cdot 0 = 1/2$, en tant que el pagament esperat de triar f a h' és $\pi_{2h'}(x)\cdot 0 + \pi_{2h'}(y)\cdot 1 = 1/2$. Com a segona il·lustració, al joc de la Fig. 2, β_{2y} tal que $\beta_{2y}(h) = 1$ no és seqüencialment racional: al conjunt d'informació $\{y\}$, la millor resposta de 2 no és h sinó g. Al mateix joc, amb β tal que $\beta_{2y}(h) = 1$, triar f és l'elecció seqüencialment racional al CI $\{x\}$, però amb β tal que $\beta_{2y}(h) = 0$, triar e és l'elecció seqüencialment racional al CI $\{x\}$.

21. Equilibri de Nash amb estratègies de comportament d'un joc seqüencial. Un vector β d'estratègies de comportament és un equilibri de Nash d'un joc seqüencial si, per a tot jugador i, no existeix cap estratègia de comportament que, donades les estratègies de comportament β_{-i} dels altres jugadors, proporcioni a i un pagament esperat superior.

22. Seqüencialitat racional i equilibri de Nash. *Sigui* β *un equilibri de Nash amb estratègies de comportament d'un joc seqüencial amb memòria perfecta. Sigui h un conjunt d'informació que s'assoleix amb probabilitat positiva quan es juga* β. *Sigui* π *un sistema de creences consistent amb* β. *Si h pertany al jugador i, aleshores* β_{ih} *és seqüencialment racional al conjunt d'informació h respecte de* π *i* β.

El resultat anterior també es pot formular en termes d'estratègies mixtes definint un equilibri de Nash d'un joc seqüencial com a un equilibri de la representació com a joc simultani del joc seqüencial. En aquest cas, si σ és un equilibri de Nash amb estratègies mixtes a la representació com a joc simultani d'un joc seqüencial amb memòria perfecta, si β és la representació de σ en termes d'estratègies de comportament i si π és un sistema de creences consistent amb β, aleshores β és seqüencialment racional a tots els conjunts d'informació que β assoleix.

El resultat del punt 22 diu que les estratègies d'equilibri especificades a conjunts d'informació que s'assoleixen amb probabilitat positiva quan es juga l'equilibri són seqüencialment racionals. Per tant, els conjunts d'informació assolits quan es juga un equilibri de Nash no són problemàtics: a mesura que un vector d'estratègies d'equilibri va arribant als diferents conjunts d'informació, els jugadors no tenen incentius a modificar les decisions previstes per l'equilibri. L'assumpte pot complicar-se seriosament als conjunts d'informació per on "no passa" l'equilibri.

23. Seqüencialitat racional en conjunts d'informació fora del camí d'un equilibri de Nash. El joc de la Fig. 8 permet d'il·lustrar els límits del resultat del punt 22. El vector d'estratègies [a, d] és un equilibri de Nash del joc. El resultat anterior diu que això garanteix que triar a és seqüencialment racional al CI {r}, que és l'únic que s'assoleix amb probabilitat positiva quan es juga [a, d]. Però el resultat no garanteix que triar d al CI {x} sigui seqüencialment racional. De fet, no l'és: amb l'única creença $\pi_{2x}(x) = 1$ que es pot definir per a 2, d no maximitza el pagament de 2 al CI {x}.

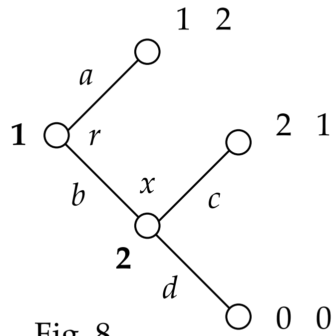


Fig. 8

La no seqüencialitat racional de d a {x} significa que, si s'assolís el node x, el jugador 2 no triaria d. Però com a l'equilibri de Nash [a, d] el node x no s'assoleix, el jugador 2 no es veu en la necessitat de triar una acció (l'acció d) que no li maximitza el pagament. De fet, l'equilibri de Nash [a, d] pot interpretar-se com sostingut per una amenaça no creïble: l'amenaça del jugador 2 de triar d si tingués l'oportunitat de jugar. Atès que, quan es juga [a, d], no té l'oportunitat d'executar el seu pla de triar d, 2 no ha de demostrar que està disposat a complir la seva amenaça. Però la hipòtesi que 2 tria millors respostes porta a la conclusió que no la complirà: d no és seqüencialment racional, per la qual cosa, assolit el node x i fracassat el pla de 2 de forçar a 1 a triar a, 2 no triarà d sinó c. Sabent 1 que 2 actuarà d'aquesta manera, 1 no triarà a, sinó b. Resultat: l'equilibri de Nash [a, d] de la Fig. 8 no és estratègicament estable. El jugador 1 no té incentiu a triar a perquè sap que, si tria b, 2 es veurà obligat (per la seva racionalitat) a triar c.

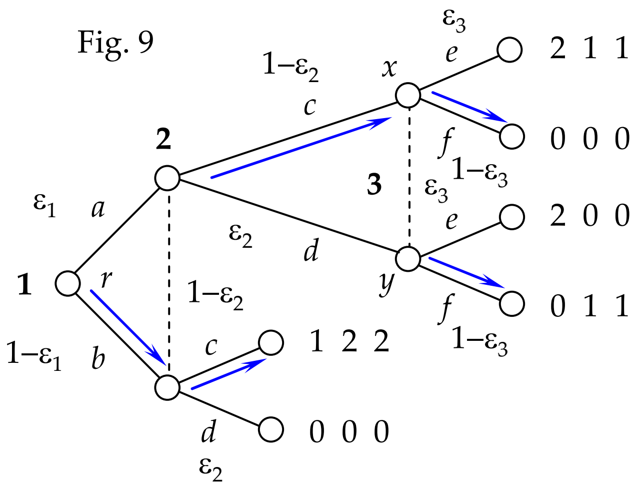
L'anàlisi anterior evidencia un fet important: com de raonable i justificada siguin la decisió a un conjunt d'informació depèn del que es pugui fer a conjunts d'informació que no s'assoleixen. Específicament, al joc de la Fig. 8, per a saber si triar a és el millor per al jugador 1 cal avaluar què passaria si no es jugués a. Aquesta anàlisi contrafàctica dificulta enormement l'estudi dels jocs seqüencials perquè cal tenir en consideració què passaria si passés el que no passa. La idea d'imposar restriccions sobre les creences als conjunts d'informació per on no s'hi passa condueix a la solució de referència dels jocs seqüencials: l'equilibri seqüencial de David Kreps i Robert Wilson.

24. Consistència completa d'un sistema de creences. Un sistema de creences π és completament consistent amb un vector β d'estratègies de comportament (naturalesa inclosa) si existeix una seqüència $\{\beta^k\}_{k=1,\ldots,\infty}$ de vectors d'estratègies de comportament tal que:

(i) per a tot k, β^k assigna probabilitat positiva a tota acció de tot conjunt d'informació;
(ii) $lim_{k\to\infty}\ \beta^k = \beta$; i
(iii) per a tot conjunt d'informació h i tot node $x \in h$, $\pi(x) = lim_{k\to\infty} \dfrac{p(x\,|\,\beta^k)}{\sum_{y\in h} p(y\,|\,\beta^k)}$,

on $p(x|\beta^k)$ és la probabilitat d'arribar al node x partint de l'arrel del joc quan les probabilitats de les branques que uneixen x amb r les determina el vector β^k. La consistència completa tracta el problema d'especificar creences a conjunts d'informació que no s'assoleixen quan es juga una determinat vector β mitjançant la pertorbació del propi vector β, fent que totes les accions es puguin jugar (condició (i)). Si tot es pot triar, tots els conjunts d'informació tenen probabilitat positiva i es pot fer servir la regla de Bayes per a calcular creences consistents (condició (iii)). Finalment, la condició (ii) reverteix la pertorbació i, per (iii), adoptem les creences que s'obtenen quan la pertorbació s'esvaeix (això és, quan retornem a la jugada original). El principi és el mateix que el de l'equilibri perfecte: de fet, l'equilibri seqüencial és bàsicament la versió per a jocs seqüencials de l'equilibri perfecte dels jocs simultanis.

Fig. 9



P.e., considerem l'equilibri de Nash $\beta = [b, c, f]$ del joc de la Fig. 9, representat amb fletxes. Atès que el conjunt d'informació h del jugador 3 no s'assoleix quan es juga $[b, c, f]$, qualsevol creença sobre els nodes d'h és consistent amb $[b, c, f]$. Per a determinar quines creences són completament consistents amb $[b, c, f]$, pertorbem $[b, c, f]$. La Fig. 9 mostra la pertorbació on a es juga amb probabilitat $\varepsilon_1 > 0$, d es juga amb probabilitat $\varepsilon_2 > 0$ i e es juga amb probabilitat $\varepsilon_3 > 0$, on les probabilitats ε_i tendeixen monòtonament cap a zero. En el límit, la seqüència de vectors $[b, c, f] = [1-\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2, 1-\varepsilon_3]$ convergeix cap a $[b, c, f]$. Això compliria amb els requisits (i) i (ii) de consistència completa. El requisit (iii) requereix calcular les creences consistents amb $[b, c, f] = [1-\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2, 1-\varepsilon_3]$ i prendre el límit quan les ε_i se'n van cap a zero. En relació amb el conjunt d'informació $\{x, y\}$ del jugador 3, la probabilitat de ser al node superior x quan es juga $\beta^\varepsilon = [b, c, f] = [1-\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2, 1-\varepsilon_3]$ s'obté aplicant la regla de Bayes. D'una banda, la probabilitat $p(x|\beta^\varepsilon)$ d'assolir x partint d'r quan es juga β^ε és la probabilitat ε_1 d'a per la probabilitat $1-\varepsilon_2$ de c. D'altra banda, la probabilitat $p(y|\beta^\varepsilon)$ d'assolir y partint d'r quan es juga β^ε és la probabilitat ε_1 d'a per la la probabilitat ε_2 de d. Per la regla de Bayes, la creença associada al node x serà $\pi^\varepsilon(x) = p(x|\beta^\varepsilon) / [p(x|\beta^\varepsilon) + p(y|\beta^\varepsilon)] = \varepsilon_1\cdot(1-\varepsilon_2)/ [\varepsilon_1\cdot(1-\varepsilon_2) + \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2]$. Per la hipòtesi que $\varepsilon_1 > 0$, podem cancel·lar ε_1 i s'obté $\pi^\varepsilon(x) = 1-\varepsilon_2$. Prenent el límit quan ε_2 tendeix cap a zero resulta que $\pi(x) = 1$. En resum, l'única creença completament consistent amb $[b, c, f]$ implica assignar probabilitat 1 al node x. Donada aquesta creença, triar f no és seqüencialment racional a $\{x, y\}$. Per la definició presentada a continuació, $[b, c, f]$ no constitueix un equilibri seqüencial: no hi ha manera de construir creences completament consistents amb $[b, c, f]$ que facin seqüencialment racional l'elecció d'f al conjunt d'informació del jugador 3.

25. Equilibri seqüencial. Un equilibri seqüencial d'un joc seqüencial amb memòria perfecta és un parell (π, β), on π és un sistema de creences i β és un vector d'estratègies de comportament, tal que:

(i) π és completament consistent amb β; i

(ii) per a tot jugador i i tot conjunt d'informació h d'i, β_{ih} és seqüencialment racional a h respecte de π i β.

Un equilibri seqüencial requereix especificar no només decisions (les estratègies de comportament) sinó les creences que justifiquen la racionalitat (seqüencial) de les decisions, on les creences han de ser completament consistents amb les decisions.

26. Propietats fonamentals dels equilibris seqüencials. (1) *Tot joc seqüencial amb memòria perfecta té almenys un equilibri seqüencial.* **(2)** *Si* (π, β) *és un equilibri seqüencial d'un joc seqüencial amb memòria perfecta aleshores: (i)* β *és un equilibri de Nash del joc seqüencial; i (ii) el vector* σ *d'estratègies mixtes que representen les estratègies de comportament del vector* β *és un equilibri de Nash de la representació com a joc simultani del joc seqüencial.*

La segona propietat diu que les estratègies que formen part d'un equilibri seqüencial defineixen un equilibri de Nash tant al joc seqüencial com al joc simultani corresponent. Aquesta propietat suggereix dues maneres de calcular els equilibris seqüencials d'un joc: (i) es calculen directament al joc seqüencial; o (ii) es determinen primerament els equilibris de Nash a la representació com a joc simultani, es representen els equilibris obtinguts (que són estratègies mixtes) en forma de vectors β d'estratègies de comportament, es busca el sistema de creences π completament consistents amb β i, finalment, es verifica la seqüencialitat racionalitat de β respecte de π.

27. Exemple de càlcul d'equilibris seqüencials. Prenguem el joc de la Fig. 3. Els equilibris seqüencials sovint es calculen més fàcilment (quan els volem calcular directament sobre el joc seqüencial) aplicant la tècnica de la <u>inducció cap enrere</u>: es comença pels conjunts d'informació on s'acaba el joc, es resol el problema de decisió allà, es fixa la solució i es passa un CI que vingui immediatament abans del CI resolt… fins que s'arriba a l'arrel.

Comencem pel conjunt d'informació $h' = \{x, y\}$. Sigui α la probabilitat que 2 assigna al node x, de manera que la probabilitat assignada a y és $1 - \alpha$. Aleshores triar e proporciona un pagament esperat d'$1{\cdot}\alpha + 0{\cdot}(1 - \alpha) = \alpha$ i triar f proporciona un pagament esperat de $0{\cdot}\alpha + 1{\cdot}(1 - \alpha) = 1 - \alpha$. D'aquí resulta que: (i) e és l'única estratègia seqüencialment racional a h' si $\alpha > 1 - \alpha$, és a dir, si $\alpha > ½$; (ii) f és l'única estratègia seqüencialment racional a h' si $\alpha < 1 - \alpha$, és a dir, si $\alpha < ½$; i (iii) tant e com f (i, per tant, qualsevol distribució de probabilitat entre e i f) són estratègies seqüencialment racionals a h' si $\alpha = ½$. Per tant, l'anàlisi ha de considerar aquests tres casos.

• <u>Cas 1</u>: $\alpha > ½$. Atès que un equilibri seqüencial demana eleccions seqüencialment racionals, si $\alpha > ½$ el jugador 2 tria e. Donat e, podem resoldre el problema de decisió del jugador 1 al CI $\{z\}$. Si 1 tria g a $\{z\}$ el pagament esperat és 0 (ja que s'està assumint que 2 tria e) i si tria h a $\{z\}$ el pagament esperat és 1. Per seqüencialitat racional, 1 tria h a $\{z\}$. Ara podem passar al CI $h = \{v, w\}$, ja que s'han establert les decisions als CI que venen després d'h. Però com h té més d'un node, cal especificar una creença. Designem per μ la probabilitat que 2 assigna al node v. Triant c, el pagament esperat de 2 és $1{\cdot}\mu + 0{\cdot}(1 - \mu) = \mu$. Triant d, el pagament esperat de 2 és $1{\cdot}\mu$ (ja que s'assumeix que 2 tria e al segon CI) més $0{\cdot}(1 - \mu)$ (per la conclusió prèvia segons la qual 1 tria h a z), que és també μ. En resum, 2 es troba indiferent al CI $\{v, w\}$ amb qualsevol creença que adopti. Considerem finalment l'arrel r. Sigui c la probabilitat amb què 2 tria l'acció c. Si 1 tria a, el pagament esperat és $1{\cdot}c + (1 - c){\cdot}1 = 1$, ja que s'assumeix que 2 tria e al CI h'. Si 1 tria b, el pagament esperat és $2{\cdot}c + (1 - c){\cdot}1 = 1 + c$, ja que s'assumeix que 1 tria h al node z. Conclusió: si $c > 0$, b és la millor resposta; i si $c = 0$, tant a com b (i qualsevol mixta entre elles) són millor resposta. Això porta a haver de tractar dos subcasos.

• Cas 1a: $c > 0$. En un equilibri seqüencial, les creences han de ser completament consistents (i, en particular, consistents) amb les estratègies de l'equilibri. Per tant, la creença μ del jugador 2 de trobar-se al node v ha de coincidir amb la probabilitat d'1 de triar a. Com s'ha vist, $c > 0$ fa que la millor resposta sigui b, de manera que $c > 0$ implica $\mu = 0$: 2 ha de creure al CI $\{v, w\}$ que es troba al node w. Però també cal que la creença α del jugador 2 sigui completament consistent tant amb l'estratègia (b, h) que s'ha trobat que triarà el jugador 1 com amb l'elecció de triar $c > 0$ que el mateix jugador 2 fa al CI $\{v, w\}$. En aquest cas, qualsevol creença α de 2 seria consistent, ja que quan 1 tria (b, h) és impossible arribar al CI $\{x, y\}$. Això significa que cal invocar la consistència completa: cal pertorbar les estratègies trobades fent que totes les accions tinguin probabilitat positiva. Torna a ser convenient tractar dos casos per separat.

• Cas 1a1: $c = 1$. Suposem que la pertorbació fa que b es jugui amb probabilitat $1 - \varepsilon_1$ (en comptes de probabilitat 1), on $\varepsilon_1 > 0$ però tendeix cap a zero; que c es jugui amb probabilitat $1 - \varepsilon_2$ (en comptes de probabilitat 1), on $\varepsilon_2 > 0$ però tendeix cap a zero; i que h es jugui amb probabilitat $1 - \varepsilon_3$ (en comptes de probabilitat 1), on $\varepsilon_3 > 0$ però tendeix cap a zero. En aquest cas, la consistència de la creença $\pi(x)$ a adoptar al node x demana que $\pi(x)$ sigui $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ (la probabilitat d'arribar a x des de l'arrel r) dividit per la probabilitat d'arribar al CI $\{x, y\}$, que és la suma de la probabilitat $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ d'arribar a x i la probabilitat $(1 - \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3$. Així, $\pi(x) = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 / (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + (1 - \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3)$. Cancel·lant ε_2, $\pi(x) = \varepsilon_1 / (\varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_3)$. La hipòtesi inicial d'aquest cas 1 és que $\alpha > ½$. Això vol dir que cal trobar pertorbacions ε_1 i ε_3 que facin que $\pi(x) = \alpha > ½$. Per tant, cal que $\varepsilon_1 / (\varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_3) > ½$. Operant, s'arriba a la condició $\varepsilon_1 > \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3$. P.e., fent $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ (la propensió d'1 d'equivocar-se al node r i triar a en comptes de b és la mateixa que la propensió d'1 d'equivocar-se al node z i triar g en comptes d'h) s'aconsegueix la consistència completa de la creença $\alpha > ½$. Recapitulant (amb l'ambigüitat de tenir h representant una acció i un CI): és un <u>equilibri seqüencial</u> el parell (β, π) tal que $\beta_{1r}(b) = \beta_{1z}(h) = \beta_{2h}(c) = \beta_{2h'}(e) = 1$, $\pi_{1r}(r) = \pi_{1z}(z) = \pi_{2h}(w) = 1$ i $\pi_{2h'}(x) = \alpha > ½$, on $h = \{v, w\}$ i $h' = \{x, y\}$.

• Cas 1a2: $0 < c < 1$. L'anàlisi és la mateixa que al cas 1a1, però ara ε_2 no se'n pot anar cap a zero perquè d s'està jugant amb una certa probabilitat positiva d: ε_2 ha de tendir cap a d. La condició obtinguda al cas 1a1 diu que cal que $\varepsilon_1 > \varepsilon_3(1 - \varepsilon_1)$. De manera equivalent, $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 / (1 - \varepsilon_1)$. Però atès que ε_1 convergeix cap a zero i ε_2 convergeix cap a $d > 0$, eventualment es tindrà $\varepsilon_1 < \varepsilon_3(1 - \varepsilon_1)$. De fet, a mesura que ε_1 s'apropa a zero, $\varepsilon_1 / (1 - \varepsilon_1)$ s'apropa a zero, la qual cosa fa que, en el límit, no es compleixi $\varepsilon_3 < \varepsilon_1 / (1 - \varepsilon_1)$. En resum, quan $0 < c < 1$, la creença $\alpha > ½$ no és completament consistent i el vector β tal que $\beta_{1r}(b) = \beta_{1z}(h) = \beta_{2h'}(e) = 1$ i $0 < \beta_{2h}(c) < 1$, no és part d'un equilibri seqüencial.

• Cas 1b: $c = 0$. Prenguem la pertorbació que fa que b es jugui amb probabilitat $1 - \varepsilon_1$, que d es jugui amb probabilitat $1 - \varepsilon_2$ i que h es jugui amb probabilitat $1 - \varepsilon_3$. La consistència de la creença $\pi(x)$ a adoptar al node x demana que $\pi(x) = \varepsilon_1 \cdot (1 - \varepsilon_2) / (\varepsilon_1 \cdot (1 - \varepsilon_2) + (1 - \varepsilon_1) \cdot (1 - \varepsilon_2) \cdot \varepsilon_3)$. Volem que aquest valor sigui igual a $\alpha > ½$. Per tant, cal que $\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 > \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$. Això es pot aconseguir fent que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Conclusió: és un <u>equilibri seqüencial</u> el parell (β, π) tal que $\beta_{1r}(b) = \beta_{1z}(h) = \beta_{2h}(d) = \beta_{2h'}(e) = 1$, $\pi_{1r}(r) = \pi_{1z}(z) = \pi_{2h}(w) = 1$ i $\pi_{2h'}(x) = \alpha > ½$, on $h = \{v, w\}$ i $h' = \{x, y\}$.

• Cas 2: $\alpha < ½$. Ara la millor resposta de 2 al CI $\{x, y\}$ és f: $\beta_{2h'}(f) = 1$. Donat això, l'única resposta seqüencialment racional de l'1 al CI $\{z\}$ és g: triant g, 1 obté 2; triant h, obté 1. Anomenant μ la probabilitat que 2 assigna a trobar-se a v quan s'assoleix el CI $h = \{x, y\}$, el seu pagament esperat de triar c és μ, en tant que el de triar d és $1 - \mu$ (atès que s'assumeix que 1 tria g a z i, després, 2 tria f). Així que si $\mu > ½$, 2 tria c; si $\mu < ½$, 2 tria d; i si $\mu = ½$, 2 pot triar c amb qualsevol probabilitat.

• Cas 2a: $\mu > ½$. En aquest cas, 2 tria c. Donat això, la millor resposta d'1 a l'arrel r és b. Però aleshores l'única creença consistent amb b al CI $\{v, w\}$ és $\mu = 0$, ja que la probabilitat d'arribar a v quan es tria b és zero. Per tant, no hi ha cap equilibri seqüencial amb $\mu > ½$.

• Cas 2b: $\mu < ½$. Ara 2 tria d. Donat això, la millor resposta d'1 a l'arrel r continua essent b i l'única creença consistent al CI $\{v, w\}$ és $\mu = 0$. Atès que s'està jugant b, després d i a continuació g, l'única creença consistent al CI $\{x, y\}$ és assignar tota la probabilitat al node y, la qual cosa vol dir $\alpha = 0$. I aquí resulta un altre equilibri seqüencial (β, π) tal que $\beta_{1r}(b) = \beta_{1z}(g) = \beta_{2h}(d) = \beta_{2h'}(f) = 1$, $\pi_{1r}(r) = \pi_{1z}(z) = \pi_{2h}(w) = \pi_{2h'}(y) = 1$, on $h = \{v, w\}$ i $h' = \{x, y\}$.

• Cas 2c: $\mu = ½$. Amb aquesta creença, qualsevol randomització entre c i d és seqüencialment racional. Designem per c la probabilitat amb què 2 tria c. Si 1 tria a al node r, el seu pagament esperat és $1\cdot c + (1 - c)\cdot 0 = c$ i, si tria b al node r, el pagament esperat és $2\cdot c + (1 - c)\cdot 2 = 2$. És obvi que la millor resposta és b, amb independència del valor de c. Com al cas 2a, l'única creença consistent amb b al CI $\{v, w\}$ és $\mu = 0$, la qual cosa contradiu la hipòtesi que $\mu = ½$. Així que aquest cas no genera cap equilibri seqüencial.

• Cas 3: $\alpha = ½$. Si aquesta és la creença adoptada per 2 al CI $h' = \{x, y\}$, qualsevol randomització entre e i f és seqüencialment racional. Designem per e la probabilitat amb què 2 tria e. Hi ha dues possibilitats: que el vector β que es juga faci que hi hagi una probabilitat zero o una probabilitat positiva arribar al CI $h' = \{x, y\}$.

• Cas 3a: la probabilitat d'assolir h' és positiva. La consistència de la creenca $\alpha = ½$ implica que la probabilitat $\beta_{1r}(a)\cdot\beta_{2h}(d)$ d'arribar al node x quan es juga β sigui igual a la probabilitat $\beta_{1r}(b)\cdot\beta_{2h}(d)\cdot\beta_{1z}(g)$ d'arribar al node y quan es juga β. Per la hipòtesi que algun d'aquests dos productes és positiu, $\beta_{2h}(d) > 0$ i es pot cancel·lar. Per tant, $\beta_{1r}(a) = \beta_{1r}(b)\cdot\beta_{1z}(g)$, on $\beta_{1r}(b) = 1 - \beta_{1r}(a)$. Aïllant $\beta_{1z}(g)$, $\beta_{1z}(g) = \beta_{1r}(a)/(1 - \beta_{1r}(a))$. Aquest valor no pot ser ni zero ni u (per què?), de manera que 1 ha de triar una mixta al node z. Això vol dir que 1 ha d'estar indiferent: el pagament esperat $0\cdot e + (1 - e)\cdot 2$ de triar g al node z ha de ser igual al pagament esperat 1 de triar h al node z. En resum, cal que $e = ½$. Atès que $\beta_{2h}(d) > 0$, hi ha dues possibilitats: $\beta_{2h}(d) = 1$ o $0 < \beta_{2h}(d) < 1$.

• Cas 3a1: $\beta_{2h}(d) = 1$. Triant a al node r el jugador 1 espera obtenir $e\cdot 1 = ½$ i, triant b, $\beta_{1z}(g)[0\cdot e + 2\cdot(1 - e)] + (1 - \beta_{1z}(g)) = \beta_{1z}(g) + (1 - \beta_{1z}(g)) = 1$. Conclusió: la millor resposta és b. Però amb $\beta_{1r}(b) = \beta_{2h}(d) = 1$ i $\beta_{1z}(g) > 0$, l'única creença consistent al CI h' és trobar-se al node y, la qual cosa significa que $\alpha = 0$. Això contradiu la hipòtesi que $\alpha = ½$. El resultat és que no hi ha cap equilibri seqüencial en aquest cas.

• <u>Cas 3a2</u>: $0 < \beta_{2h}(d) < 1$. Això fa a 2 està indiferent al CI h. Per a què això tingui lloc, el pagament esperat $\beta_{1r}(a)\cdot 1 + (1 - \beta_{1r}(a))\cdot 0 = \beta_{1r}(a)$ de triar c ha de coincidir amb el pagament esperat $\beta_{1r}(a)\cdot[1\cdot e + 0\cdot(1 - e)] + (1 - \beta_{1r}(a))\cdot[\beta_{1z}(g)\cdot(0\cdot e + 1\cdot(1 - e)) + (1 - \beta_{1z}(g))\cdot 0] = \beta_{1r}(a)\cdot ½ + (1 - \beta_{1r}(a))\cdot\beta_{1z}(g)\cdot ½$ de triar d. Tal com s'ha obtingut prèviament, $\beta_{1z}(g) = \beta_{1r}(a)/(1 - \beta_{1r}(a))$. Per tant, cal que $\beta_{1r}(a) = \beta_{1r}(a)\cdot ½ + \beta_{1r}(a)\cdot ½$. Com a aquest condició se satisfà, triï la randomització que triï el jugador 1 a l'arrel, 2 estarà indiferent. Per últim, cal determinar quina randomització tria 1 a l'arrel. Anomenem c la probabilitat amb què 2 tria c. El pagament esperat de triar a és $c + (1 - c)\cdot[1\cdot e + 0\cdot(1 - e)] = c + (1 - c)\cdot ½ = (1 + c)\cdot ½$. Atès que s'està assumint que 1 és indiferent a z, el seu pagament esperat ha de ser 1. Per aquest motiu, el pagament esperat de triar b és $2c + (1 - c)\cdot 1 = 1 + c$. Sigui quin sigui el valor de c, el millor per a 1 al node r és b. Recuperem ara el resultat segons el qual $\beta_{1z}(g) = \beta_{1r}(a)/(1 - \beta_{1r}(a))$. Atès que es tria b, $\beta_{1r}(a) = 0$ i, així, $\beta_{1z}(g) = 0$. Amb això es contradiu la hipòtesi que $\{x, y\}$ s'ssoleix amb probabilitat positiva i no hi ha equilibri seqüencial en aquest cas.

• <u>Cas 3b</u>: la probabilitat d'assolir h' és zero. Sigui a la probabilitat de tria l'acció a, d la de triar l'acció d, g la de triar l'acció g i e la de triar l'acció e. Per a què h' s'assoleix amb probabilitat zero (no s'assoleixi), cal que $a\cdot d = (1 - a)\cdot d\cdot g = 0$. Atès que $a\cdot d = 0$, o bé $a = 0$, o bé $d = 0$, o tots dos casos. Si $d = 0$, l'única millor resposta d'1 al node r quan $d = 0$ és $a = 0$. Per tant, s'ha de tenir $a = 0$. Amb $a = 0$, $(1 - a)\cdot d\cdot g = 0$ requereix $d = 0$ o $g = 0$. Tot plegat produeix dos casos.

• <u>Cas 3b1</u>: $a = d = 0$. La creença consistent amb $a = 0$ al CI $h = \{v, w\}$ és assignar tota la probabilitat al node w. Donat això, el pagament esperat de triar c és 0. Si $g > 0$, el pagament esperat de triar d és positiu. Per tant, per a fer que $d = 0$ sigui una millor resposta, cal que $g = 0$. El candidat a vector β que sigui part d'un equilibri seqüencial és $\beta_{1r}(b) = \beta_{1z}(h) = \beta_{2h}(c) = 1$ i $\beta_{2h'}(e) = ½$. Només resta verificar que la creença $\alpha = ½$ és completament consistent amb β. Considerem la pertorbació de β on a es juga amb probabilitat ε_a, d amb probabilitat ε_d i g amb probabilitat ε_g. Per a què $\alpha = ½$ sigui completament consistent cal que la probabilitat $\varepsilon_a\cdot\varepsilon_d$ d'arribar al node x sigui igual a la probabilitat $(1 - \varepsilon_a)\cdot\varepsilon_d\cdot\varepsilon_g$ d'arribar al node y. Això és, $\varepsilon_a = (1 - \varepsilon_a)\cdot\varepsilon_g$ o $\varepsilon_g = \varepsilon_a/(1 - \varepsilon_a)$. I ja en tenim un altre, d'<u>equilibri seqüencial</u>: el parell (β, π) tal que $\beta_{1r}(b) = \beta_{1z}(h) = \beta_{2h}(c) = 1$, $\beta_{2h'}(e) = ½$, $\pi_{1r}(r) = \pi_{1z}(z) = \pi_{2h}(w) = 1$ i $\pi_{2h'}(x) = \alpha = ½$, on $h = \{v, w\}$ i $h' = \{x, y\}$.

• <u>Cas 3b2</u>: $a = g = 0$. Com al cas previ, la creença consistent amb $a = 0$ al CI $h = \{v, w\}$ és assignar tota la probabilitat al node w. Atès que $g = 0$, 2 és indiferent entre c i d quan creu que es troba al node w. Caldria ara determinar per quins valors de c fan que $a = 0$ sigui una millor resposta. Triant a, 1 espera obtenir $1\cdot c + (1 - c)\cdot e\cdot 1$; triant b, $2\cdot c + (1 - c)\cdot 1 = 1 + c$. Per a fer b una millor resposta, cal que $1 + c \geq c + e(1 - c)$; això és, $1 \geq e(1 - c)$, que és sempre el cas, ja que c i e són probabilitats. La conclusió és que qualsevol valor de c fa que, donat $g = 0$, b sigui una millor resposta. Per últim, s'hauria d'establir per a quins valors d'e l'acció h és una millor resposta al node z. Per a què això passi cal que $1 \geq 2(1 - e)$. Per tant, cal que $e \geq ½$. El candidat a vector d'estratègies d'un equilibri seqüencial seria $\beta_{1r}(b) = \beta_{1z}(g) = 1$, $0 \leq \beta_{2h}(c) \leq 1$ i $\beta_{2h'}(e) \geq ½$. Només resta verificar la completa consistència de la creença $\alpha = ½$. Considerem la pertorbació de β on a es juga amb probabilitat ε_a, d amb probabilitat ε_d i g amb probabilitat ε_g. Per a què $\alpha = ½$ sigui completament consistent cal que la probabilitat $\varepsilon_a\cdot\varepsilon_d$ d'arribar al node x sigui igual a la probabilitat $(1 - \varepsilon_a)\cdot\varepsilon_d\cdot\varepsilon_g$ d'arribar al node y. Això és, $\varepsilon_a = (1 - \varepsilon_a)\cdot\varepsilon_g$ o $\varepsilon_g = \varepsilon_a/(1 - \varepsilon_a)$. L'<u>equilibri seqüencial</u> resultant seria el parell (β, π) tal que $\beta_{1r}(b) = \beta_{1z}(g) = 1$, $0 \leq \beta_{2h}(c) \leq 1$, $\beta_{2h'}(e) \geq ½$, $\pi_{1r}(r) = \pi_{1z}(z) = \pi_{2h}(w) = 1$ i $\pi_{2h'}(x) = \alpha = ½$, on $h = \{v, w\}$ i $h' = \{x, y\}$.

28. Subjocs. Un <u>subjoc</u> G' d'un joc seqüencial G és un joc seqüencial obtingut de G prenent com a arrel de G' un node x de G tal que $\{x\}$ és un conjunt d'informació de G i eliminant tot el que no va després d'x, de manera que els conjunts d'informació que venen després d'x quedin intactes. Amb aquesta definició, un joc seqüencial és un subjoc de sí mateix. Els subjocs d'un joc diferents del joc mateix s'anomenen subjocs <u>propis</u>. P.e., el joc de la Fig. 2 té tants subjocs com nodes de decisió: hi ha un subjoc que té r com a arrel (el joc mateix); un segon subjoc té v com a arrel; un tercer, té x com a arrel; i el darrer subjoc té z com a arrel. En canvi, el joc de la Fig. 3 no té cap subjoc propi: l'única possibilitat d'arrel d'un subjoc és el node z del jugador 1, però el possible subjoc amb arrel z trencaria el conjunt d'informació de 2. El joc de la Fig. 1 té cinc subjocs.

29. Equilibri perfecte en subjocs (Reinhard Selten, 1965). Un equilibri de Nash β amb estratègies de comportament d'un joc seqüencial G és un <u>equilibri perfecte en subjocs</u> si la restricció de β a cada subjoc de G és un equilibri de Nash del subjoc. P.e., al joc de la Fig. 8, l'equilibri $[b, d]$ no és perfecte en subjocs, ja que d no és equilibri al subjoc que té x com a arrel.

30. Relació entre els equilibris de Nash, els equilibris seqüencials i els equilibris perfectes en subjocs. **(1)** *Tot equilibri perfecte en subjocs és un equilibri de Nash, però no tot equilibri de Nash és perfecte en subjocs*. **(2)** *Si* (π, β) *és un equilibri seqüencial d'un joc seqüencial amb memòria perfecta,* β *és un equilibri perfecte en subjocs, però si* β *és un equilibri perfecte en subjocs no necessàriament existeix un sistema de creences* π *que faci que* (π, β) *sigui un equilibri seqüencial del joc*. P.e., en relació amb (2), $[(b, h), (c, f)]$ és un equilibri de Nash del joc de la Fig. 3. També és un equilibri perfecte en subjocs, ja que el joc no té subjocs propis. Però no és equilibri seqüencial, atès que, donat f, h no és seqüencialment racional al CI $\{z\}$.

31. Equilibri seqüencial de jocs amb informació perfecta. En un joc amb informació perfecta només es pot definir un sistema de creences: aquell que assigna probabilitat 1 a tots els nodes de decisió. Per tant, amb informació és perfecta, el joc mateix defineix les creences i la noció de sistema de creences no aporta res. A més, <u>per a jocs amb informació perfecta, les nocions d'equilibri seqüencial i d'equilibri perfecte en subjocs coincideixen</u>: un equilibri de Nash β amb estratègies de comportament és un equilibri perfecte si, i només si, (π, β) és un equilibri seqüencial, on π és l'únic sistema de creences definible en un joc amb informació perfecta.

32. Inducció cap enrere (*backward induction*). La tècnica de la inducció cap enrere permet calcular fàcilment els equilibris perfectes en subjocs (i, per tant, els equilibris seqüencials) d'un joc amb informació perfecta. Apliquem la inducció cap enrere al joc de la Fig. 2. Primer s'identifiquen els nodes on la decisió no depèn del que facin els demés. Això passa a l'últim node de decisió y i, en general, això passarà a tots els nodes on cadascuna de les accions que es puguin prendre al node posen fi al joc (p.e., els nodes x i y al joc de la Fig. 1). Si el jugador 2 és al node y, la seva millor resposta és g. Fixem g i passem al node que precedeix immediatament el node y. Aquest node és l'x. Si el jugador 1 és al node x, obté 3 triant e i obté 2 triant d (perquè, com s'ha vist, si s'arriba al node y, el jugador 2 triarà g). Per tant, 2 triarà e. Continuem amb v, que és el node que està justament abans del node x. Si 2 tria c al node v obté 2. Si tria d, donat que a continuació es jugaria e i g, obté 1. La millor resposta a v és c. Finalment, s'arriba a l'arrel r. Allà triar a proporciona 1 i triar b proporcionaria 0: millor a. L'únic equilibri perfecte en subjocs (i l'únic vector d'estratègies d'un equilibri seqüencial) del joc de la Fig. 2 és $[(a, e), (c, g)]$.

33. Propietats fonamentals dels equilibris seqüencials a jocs amb informació perfecta. (1) *Tot joc seqüencial amb informació perfecta té almenys un equilibri seqüencial on tots els jugadors juguen estratègies pures.* **(2)** *A tot joc seqüencial amb informació perfecta on cap jugador no rep el mateix pagament a dos nodes terminals diferents l'equilibri seqüencial és únic (i, per la propietat anterior, és un equilibri seqüencial amb estratègies pures).*

34. Dubtes sobre l'estabilitat estratègica de l'equilibri seqüencial en jocs amb informació perfecta. Podria semblar que les propietats anteriors fan que els jocs amb informació perfecta puguin ser considerats jocs ja resolts. No és així. Els equilibris perfectes en subjocs no estan lliures de crítica ni tan sols als jocs amb informació perfecta. La raó és que la perfecció en subjocs (o, el que és el mateix, la inducció cap enrere) pressuposa certes hipòtesis de racionalitat dels jugadors que poden tornar-se falses quan el joc es juga. P.e., al joc de la Fig. 2, l'únic equilibri perfecte en subjocs és [(*a*, *e*), *d*]. La conclusió que 1 tria *e* a *y* deriva de la hipòtesi que 1 és racional (R_1). De la mateixa manera, la conclusió que 2 tria *d* a *x* es basa en la premissa que 1 tria *e* a *y*. Per a sostenir aquesta premissa, sembla que caldria que 2 cregués que 1 és racional (C_2R_1): si 2 creu que 1 és racional, 2 creu que 1 triarà *e* al node *y* i, per tant, si 2 és racional (R_2), triarà *d* al node *x*, tal com dicta la inducció cap enrere. Per a què 1 pugui replicar al node *r* el raonament fet pel jugador 2 cal que 1 cregui allò que 2 creu, això és, cal que 1 cregui que 2 és racional (C_1R_2) i cal que 1 cregui que 2 creu que 1 és racional ($C_1C_2R_1$). Per $C_1C_2R_1$, 1 creu que 2 creu que 1 triarà *e* al node *y*. Donat això, per C_1R_2, 1 creu que 2 triarà *d* al node *x*. Assumint que 1 és racional, la conclusió és que 1 tria *a* al node *r*.

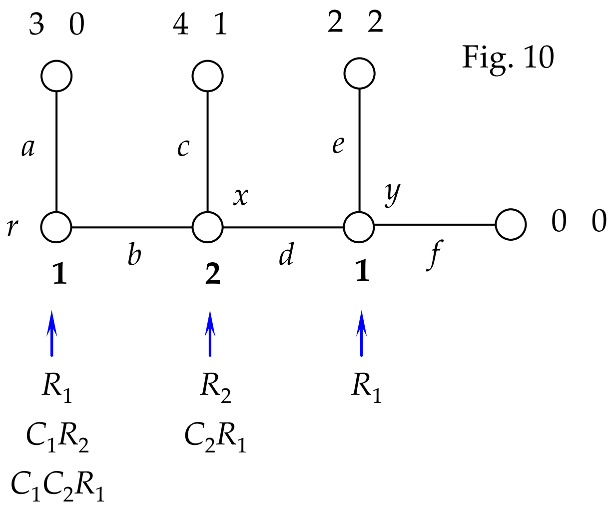


Fig. 10

Com a resultat, la justificació de l'únic equilibri seqüencial del joc de la Fig. 10 implica que el node *x* del jugador 2 no s'assoleixi. Però el cas és que tota l'anàlisi feta per al jugador 2 (que portava a la conclusió que triaria *d* si s'assolís el node *x*) pressuposava que s'arribava al node *x*. Atès que el compliment de les condicions R_1, C_1R_2 i $C_1C_2R_1$ fan que no s'arribi al node *x* (perquè 1 tria *a* al node *r*), l'assoliment del node *x* implica que alguna de les tres condicions s'ha d'incomplir. La conseqüència d'això és que, situat al node *x*, el jugador 2 ha de construir alguna explicació del que ha succeït. Una possible explicació és que 1 no és racional. En aquest cas, 2 ja no té garantida la conclusió que 1 triarà *e* al node *y*: si 1 no és racional, és possible que triï *f*. Si això passés, *c* seria la millor resposta per a 2 al node *x*. La història no acabaria aquí. Si 1 anticipa que 2 interpretarà que jugar *b* és un senyal que indica que 1 no és racional i que, per tant, 2 triarà *c*, aleshores al jugador 1 li convé <u>racionalment</u> triar *b*, perquè (si expecta que 2 triï *c*) obtindrà un pagament de 4 si escull *b* i només un pagament de 3 si selecciona *a*. Però aquest no és el final: si 2 s'adona d'aquesta possibilitat, podrà considerar que *b* és una elecció racional per part del jugador 1 i, per consegüent, encara podrà avalar la presumpció que 1 triarà *e* al node *y*. Si és així, 2 conclourà que el millor és *d*. Però això fa que l'elecció de *b* per part d'1 sigui irracional… En resum: no és gens clar que l'única elecció que justificadament pugui fer el jugador 2 al node *x* sigui triar *d* i, de retruc, no és gens clar que l'única elecció justificable del jugador 1 al node *r* sigui triar *a*.

35. Un altre inconvenient de l'equilibri seqüencial. Les possibles febleses del concepte d'equilibri seqüencial com a solució d'un joc seqüencial no es limiten als jocs amb informació perfecta. Els jocs de les Fig. 11 i 12 permeten evidenciar que l'equilibri seqüencial és sensible (en jocs amb informació imperfecta) a aspectes del joc que semblen irrellevants. Al joc de la Fig. 11 [*c*, *e*] és un equilibri seqüencial amb la creença que assigna probabilitat ⅔ al node x. Aquesta creença és completament consistent amb [*c*, *e*], ja que la pertorbació on $[a, b, c] = [2\varepsilon_1, \varepsilon_1, 1 - 3\varepsilon_1]$ convergeix a $[a, b, c] = [0, 0, 1]$ quan ε_1 s'apropa a zero i la creença consistent amb $[a, b, c] = [2\varepsilon_1, \varepsilon_1, 1 - 3\varepsilon_1]$ assigna probabilitat $2\varepsilon_1 / (2\varepsilon_1 + \varepsilon_1) = ⅔$ al node x. A més, donada la creença $\pi(x) = ⅔$, *e* és seqüencialment racional: si 2 creu que és més probable ser a x que a l'altre node del seu CI, triar *e* és millor que triar *d*. Per últim, donat *e*, *c* és la millor resposta del jugador 1 al node *r*.

Ara considerem el joc de la Fig. 12 que essencialment és el mateix joc que el de la Fig. 11. L'única diferència és que, al joc de la Fig. 11, el jugador 1 tria al mateix temps entre acabar el joc (acció *c*) o triar entre *a* i *b*; per contra, al joc de la Fig. 12 el jugador 1 primer decideix si acaba el joc (acció *c*) o si permet que continuï (acció *f*) i, a continuació, decideix entre *a* i *b*. Aquesta no sembla una distinció rellevant: quina importància pot tenir decidir inicialment entre tres opcions o primer entre una i la resta i, després, entre les dues restants? El cas és que aquesta distinció afecta els equilibris seqüencials, perquè que 1 triï *c* i 2 triï *e* no forma part d'un equilibri seqüencial al joc de la Fig. 12. El motiu és que, a la Fig. 11, 1 no havia d'especificar què faria si no triés *c*; en canvi, a la Fig. 12, 1 ha d'indicar (al node *v*) que fa si no tria *c*. Al node *v*, *b* és l'única reposta que és seqüencialment racional, ja que els pagaments de triar *b* són sempre superiors als de triar *a*. Això restringeix les possibles creences del jugador 2 al node *x*: si 1 tria *b* a *v*, l'única creença completament consistent requereix assignar probabilitat 0 al node *x*. Donada aquesta creença, l'única resposta seqüencialment racional de 2 al seu CI és *d*. Per tant, 1 ha de triar *f* al node *r* i [*f*, *b*, *d*] és l'única jugada que és part d'un equilibri seqüencial.

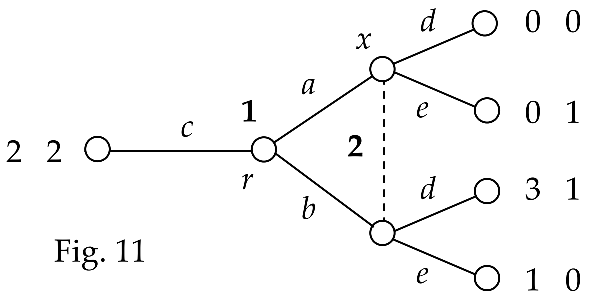
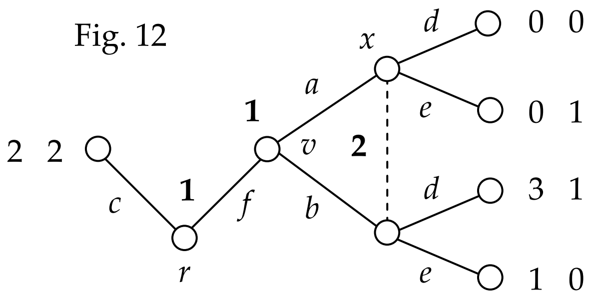


Fig. 11

Fig. 12


36. Inducció cap endavant (*forward induction*). La inducció cap enrere pressuposa la racionalitat de les decisions dels jugadors que juguen després. La inducció cap endavant pressuposa la racionalitat de les decisions dels jugadors que han jugat prèviament. Com a tècnica d'anàlisi, la inducció cap enrere analitza el problema de decisió en un determinat conjunt d'informació no tenint en compte el que ha passat prèviament. Aquesta presumpció condueix a les complicacions analitzades al joc de la Fig. 10, perquè quan un jugador decideix què fer a un CI no pot passar per alt què s'ha fet prèviament. La inducció cap endavant es basa en la idea d'explotar la informació que proporcionen les decisions preses per jugadors que han jugat prèviament, buscant sempre una explicació de les decisions basades en la racionalitat dels jugadors. En aquest sentit, la inducció cap endavant pren les decisions de jugadors que han jugat abans com a senyals o indicis de les intencions d'aquests jugadors.

La inducció cap endavant permet de resoldre el joc de la Fig. 11 amb el següent raonament. Suposem que el CI del jugador 2 s'assoleix. Això vol dir que el jugador 1 ha triat *a* o *b*. L'estructura del joc no permet al jugador 2 saber si 1 ha escollit *a* o *b*. Però si 1 és racional no pot ser que triï *a* quan disposa de l'opció *c*: triant *c*, el jugador 1 s'assegura un pagament de 2; triant *a*, només obté un pagament de 0. La conclusió d'això és que un jugador racional no pot rebutjar *c* per a triar *a*. Per tant, si s'arriba al conjunt d'informació de 2, és el node inferior el que s'ha d'haver assolit. En aquest cas, el millor per a 2 és triar *d*; i donat *b*, el millor per a 1 és triar *b*. Així, <u>la inducció cap endavant destrueix l'equilibri seqüencial basat en triar *c* i *e*</u>.

37. Conflicte entre inducció cap endavant i inducció cap enrere. L'exemple anterior mostra indicis de conflicte entre els dos tipus d'inducció, però el conflicte no sembla dràstic perquè, després de tot, hi ha un equilibri consistent tant amb la inducció cap enrere (això és, la seqüencialitat racional) i la inducció cap endavant: triar *b* i *d*. El joc de la Fig. 13, analitzat per Roger Myerson, evidencia que inducció cap endavant i cap enrere poden arribar a conclusions contradictòries.

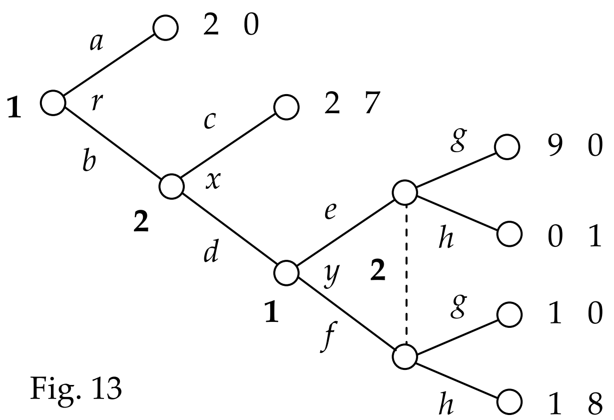


Fig. 13

Aplicant la inducció cap enrere al joc de la Fig. 13, el jugador 2 triaria *h* al segon CI, ja que, amb independència de la creença formada sobre el node on es troba 2, *h* sempre dóna un pagament superior al que dóna *g*. Fixada l'acció *h*, el millor per a 1 al node *y* és *f*. Fixades les accions *f* i *h*, el millor per a 2 al node *x* és *d*. I donades *d*, *f* i *h*, el millor per a 1 a l'arrel *r* és *a*. En resum, la inducció cap enrere selecciona [(*a*, *f*), (*d*, *h*)].

El raonament basat en la inducció cap endavant constataria que quan s'arriba al segon conjunt d'informació del jugador 2 el jugador 1 ha renunciat a un pagament segur de 2, que és el pagament que obtindria triant *a* a l'arrel *r*. Per tant, si 1 es troba al node *y*, l'única manera de racionalitzar que hagi renunciat al pagament de 2 és que pretén obtenir un pagament superior. Així doncs, no pot ser que 1 renunciï a obtenir un pagament de 2 per a obtenir només un pagament d'1 triant *f* al node *y* (triar *b* i després *f* és una estratègia fortament dominada per triar *a*). Com a resultat, si 1 és racional ha de triar *e* al node *y*. En aquest cas, el millor per a 2 al node anterior *x* és escollir *c*. Però triar *c* i *e* no és el que dicta la inducció cap enrere.

38. APPÈNDIX. De vegades es més convenient calcular equilibris seqüencials d'un joc seqüencial trobant primerament els equilibris de Nash de la representació del joc com a joc simultani i determinant després les creences completament consistents que fa l'equilibri seqüencial. En el cas del joc de la Fig. 3 calcular tots els equilibris de Nash del joc simultani que el representa és una tasca ben feixuga. En canvi, és fàcil calcular els equilibris de Nash amb estratègies pures. Aquest càlcul permet de determinar amb facilitat els equilibris seqüencials amb estratègies pures. En concret, els equilibris amb pures de la representació com a joc simultani del joc de la Fig. 3 són cinc: [*ag*, *de*], [*ah*, *de*], [*bh*, *ce*], [*bh*, *cf*] i [*bh*, *de*]. De tots aquests, només el primer no és seqüencial: donat *e*, triar *g* al CI {*z*} no és seqüencialment racional.