Exemple del càlcul d'equilibris de Nash amb 3 jugadors

2

		c	*d*	*c*	*d*
1	*a*	1 1 0	1 0 1	1 1 0	1 2 0
	b	2 1 0	0 0 0	0 1 1	0 0 1
		e		*f*	

3

Hi ha quatre possibles tipus d'equilibris de Nash (EN).

• Tipus 1: equilibris on ningú no randomitza (tots ells trien estratègies pures). El vector d'estratègies [*b*, *d*, *e*] no és EN perquè, donat [*d*, *e*], 1 obté un pagament superior triant *a* que triant *b*. El mateix val per a [*b*, *c*, *f*] i [*b*, *d*, *f*]. Tampoc no és EN [*a*, *c*, *e*] perquè, donat [*c*, *e*], 1 obté un pagament superior amb *b* que amb *a*. [*a*, *d*, *e*] no és EN atès que 2 obté un pagament més gran triant *c* en comptes de *d*. [*a*, *c*, *f*] no és EN perquè 2 incrementa el seu pagament deixant *c* i passant-se a *d*. El jugador 3 no fa una millor resposta ni a [*a*, *d*, *f*] ni a [*b*, *c*, *e*]. En resum, no hi ha cap EN amb estratègies pures.

• Tipus 2: equilibris on només un jugador randomitza. Establim primerament les condicions necessàries de randomització per a cada jugador (on *a* és la probabilitat de triar l'estratègia *a* i la probabilitat de triar l'estratègia *b* és $(1-a)$; *c* és la probabilitat de triar *c* i $(1-c)$ és la probabilitat de triar *d*; i *e* és la probabilitat de triar *e* i $(1-e)$ la probabilitat de triar *f*).

Jugador 1: per a què el jugador 1 estigui disposat a randomitzar, el seu pagament esperat (PE) de triar *a* ha de ser igual al seu PE de triar *b*. El PE de triar *a* és $1ec + 1e(1-c) + 1c(1-e) + 1(1-c)(1-e)$, que és 1. El PE de triar *b* és $2ec + 0e(1-c) + 0c(1-e) + 0(1-c)(1-e)$, que és $2ce$. Igualant els dos pagaments s'obté (1), la condició necessària de randomització d'1.

$$ce = ½ \tag{1}$$

Jugador 2: per a què el jugador 2 estigui disposat a randomitzar, el seu PE de triar *c* ha de ser igual al seu PE de triar *d*. El PE de triar *c* és $1ae + 1(1-a)e + 1a(1-e) + 1(1-a)(1-e) = 1$. El PE de triar *d* és $0ae + 0(1-a)e + 2a(1-e) + 0(1-a)(1-e) = 2a(1-e)$. Igualant els dos pagaments s'obté (2), la condició necessària de randomització del jugador 2.

$$a(1-e) = ½ \tag{2}$$

Jugador 3: per a què el jugador 3 estigui disposat a randomitzar, el seu PE de triar *e* ha de ser igual al seu PE de triar *f*. El PE de triar *e* és $0ac + 0(1-a)c + 1a(1-c) + 0(1-a)(1-c) = a(1-c)$. El PE de triar *f* és $0ac + 1(1-a)c + 0a(1-c) + 1(1-a)(1-c) = 1-a$. Igualant els dos pagaments s'obté (3), la condició necessària de randomització del jugador 3.

$$a(1-c) = 1-a \tag{3}$$

Cas 1: només el jugador 1 randomitza. En aquest cas, $c \in \{0, 1\}$ i $e \in \{0, 1\}$, perquè no randomitza ni 2 ni 3. Cas 1a: $c = 0$. Aleshores (1) no es compleix, atès que $0 \cdot e \neq ½$. Per tant, no hi ha cap EN on només 1 randomitza i $c = 0$. Cas 1b: $c = 1$. Ara (1) es transforma en $e = ½$. Això contradiu la hipòtesi que només 1 randomitza. Així que no hi ha cap EN on només el jugador 1 randomitza. El cas 2 s'ha analitzat considerant les dues úniques opcions $c = 0$ i $c = 1$ del jugador 2. Però també s'hauria pogut analitzar considerant les dues úniques opcions $e = 0$ i $e = 1$ del jugador 3.

Cas 2: només el jugador 2 randomitza. Ara tenim que $a \in \{0, 1\}$ i $e \in \{0, 1\}$. Cas 2a: $a = 0$. Aleshores, (2) es transforma en $0\cdot(1-e) = ½$. Donat que cap valor d'e permet complir aquesta condició, no hi ha cap EN on només 2 randomitza i $a = 0$. Cas 2b: $a = 1$. Ara (2) esdevé $1 - e = ½$, d'on resulta $e = ½$. Això contradiu la hipòtesi que només 2 randomitza. D'aquí que no hi ha cap EN on només el jugador 2 randomitza.

Cas 3: només el jugador 3 randomitza. Com a conseqüència, $a \in \{0, 1\}$ i $c \in \{0, 1\}$. Cas 3a: $a = 0$. Per la condició (3) de randomització del jugador 3, $0(1-c) = 1$, que no es compleix mai. Així que no hi ha cap EN on només 3 randomitza i $a = 0$. Cas 3b: $a = 1$. La condició (3) es torna $1 - c = 0$; això és, $c = 1$. Això vol dir que hi ha un candidat a EN on 3 randomitza i $a = c = 1$. De fet, si $a = c = 1$, aleshores qualsevol estratègia de 3 és millor resposta (atès que $a = c = 1$ implica que (3) s'està complint). Ara resta identificar les estratègies de 3 que fan que $a = 1$ i $c = 1$ siguin millors respostes. En particular, començant per $a = 1$, cal trobar e de manera que (donat $c = 1$) $a = 1$ sigui millor resposta. El PE de triar a quan $c = 1$ és $1e + 1(1-e) = 1$. El PE de triar b quan $c = 1$ és $2e + 0(1-e) = 2e$. Per a què a sigui almenys tant bona com b cal que $1 \geq 2e$; això és, $e \leq ½$. Fem el mateix per a $c = 1$. El PE de triar c quan $a = 1$ és $1e + 1(1-e) = 1$. El PE de triar d quan $a = 1$ és $0e + 2(1-e) = 2(1-e)$. Per a fer c una millor resposta cal que $1 \geq 2(1-e)$; és a dir, $e \geq ½$. Recapitulant: donat $a = 1$ i $e \geq ½$, $c = 1$ és millor resposta. Combinant la demanda que fa 1 per a què $a = 1$ sigui millor resposta ($e \leq ½$) amb la demanda que fa 2 per a què $c = 1$ sigui millor resposta ($e \geq ½$) s'arriba a $e = ½$. Així, $[a, c, e] = [1, 1, ½]$ és l'únic EN on només 3 randomitza.

• Tipus 3: equilibris on només dos jugadors randomitzen. Hi ha tres casos.

Cas 1: només els jugadors 1 i 2 randomitzen. Com a conseqüència, $e \in \{0, 1\}$ i s'han de satisfer (1) i (2). Cas 1a: $e = 0$. Llavors (1) no es compleix. Case 1b: $e = 1$. En aquest cas, (2) no se satisfà. Per tant, no existeix cap EN on només 1 i 2 randomitzen.

Cas 2: només els jugadors 1 i 3 randomitzen. Ara $c \in \{0, 1\}$ i s'han de satisfer (1) i (3). Cas 2a: $c = 0$. Aleshores (1) no se satisfà. Case 2b: $c = 1$. Substituint aquest valor a (3) resulta $a = 1$, que contradiu la hipòtesi que 1 randomitza. Així que no hi ha cap EN on només 1 i 3 randomitzen.

Cas 3: només els jugadors 2 i 3 randomitzen. Ara $a \in \{0, 1\}$ i s'han de satisfer (2) i (3). Cas 3a: $a = 0$. Si $a = 0$, (2) no se satisfà. Case 3b: $a = 1$. Substituint aquest valor a (3) resulta $c = 1$, que contradiu la hipòtesi que 2 randomitza. Conclusió : no hi ha EN on només 2 i 3 randomitzen.

• Tipus 4: equilibris on tots tres jugadors randomitzen. Això implica que les equacions (1), (2) i (3) s'han de satisfer: cal comprovar si hi ha valors a, c i e que solucionen el sistema d'equacions format per (1), (2) i (3). Aïllant e a (2) resulta $e = 1 - \frac{1}{2a}$ i aïllant c a (3) s'obté $c = 2 - \frac{1}{a}$. Introduint aquestes equacions en la condició (1) s'arriba a $\left(2 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{2a}\right) = ½$. Desenvolupant s'obté l'equació $(2a - 1)^2 = a^2$. D'aquí, $2a - 1 = a$; de manera equivalent, $a = 1$. Això contradiu la hipòtesi que 1 randomitza. Conclusió final: no hi ha cap EN on tots els jugadors randomitzen.

El joc només té un EN: $[a, c, e] = [1, 1, ½]$. En aquest equilibri, el jugador 3 obté el seu pagament més baix del joc. En vista d'això, un es podria preguntar quin incentiu té 3 a jugar l'EN, quan sembla millor metaestratègia per a jugar el joc ser impredictible (jugar caòticament).