Equilibri correlacionat

Una de semàfors

Dos conductors s'apropen simultàniament a una cruïlla des de direccions perpendiculars i han de decidir si aturar-se (estratègia *A* del jugador 1 i estratègia *a* del jugador 2) o continuar circulant (*C* i *c*, respectivament). El joc J1 de la Fig. 1, tret d'Owen[1] (1995, p. 182), representa aquesta situació.

		2: *a*	2: *c*
1	*A*	–1 –1	0 5
	C	5 0	–10 –10

Fig. 1

J1 té tres equilibris de Nash: [*A*, *c*], [*C*, *a*] i [*A*, *a*] = [$5/8$, $5/8$]. En l'equilibri amb estratègies mixtes tots dos jugadors obtenen pagaments negatius. Això fa més atractiu per als jugadors la selecció d'algun dels equilibris amb estratègies pures. El problema és quin dels dos se selecciona, això és, qui ha de cedir el pas a l'altre. L'equilibri correlacionat proporciona una solució.

Instruments de correlació

La idea d'equilibri correlacionat presumeix que els jugadors d'un joc disposen d'instruments de comunicació o d'elements que els permeten compartir informació. L'equilibri correlacionat és el resultat d'emprar aquests instruments o elements per a coordinar les decisions dels jugadors.

Per exemple, en el joc J1, un semàfor seria un instrument de coordinació de les decisions, ja que indicaria a cada jugador si aturar-se o continuar. En concret, suposem que el semàfor té un detector de proximitat que, en situacions com les del joc J1, fa el següent:

(i) amb probabilitat $2/5$, encén la llum vermella al jugador 1 i la llum verda al jugador 2; i
(ii) amb probabilitat $3/5$, encén la llum vermella al jugador 2 i la llum verda al jugador 1 (la diferència de probabilitat reflecteix la idea que la via per on circula el jugador 1 és més important o té més trànsit que la via per on circula el jugador 2).

Si els jugadors respecten les indicacions del semàfor, el resultat és que les seves estratègies es trien coordinadament: amb probabilitat $2/5$, es juga el vector d'estratègies [*A*, *c*] i, amb probabilitat $3/5$, es tria el vector [*C*, *a*]. Això significa que els jugadors no trien estratègies mixtes (que són probabilísticament independents) sinó estratègies correlacionades (que no es poden implementar sense afegir al joc algun mediador, com ara el semàfor)

Diferència entre estratègies mixtes i correlacionades

Suposem que els conductors respecten les instruccions del semàfor: un conductor s'atura si veu llum vermella i continua si veu llum verda. En aquest cas, el semàfor genera la distribució de probabilitats sobre jugades que mostra la Fig. 2.

		2: *a*	2: *c*
1	*A*	0	2 / 5
	C	3 / 5	0

Fig. 2

La distribució de probabilitats de la Fig. 2 no es pot generar jugant estratègies mixtes. Per a comprovar-ho, suposem que 1 juga l'estratègia *A* amb probabilitat p_A i 2 juga l'estratègia *a* amb

[1] Owen, Guillermo (1995): *Game Theory*, 3a edició. Academic Press: San Diego. L'equilibri correlacionat es considera a les pàgines 182–187.

probabilitat p_a. Per tal que [A, c] es jugui amb probabilitat ⅖ cal que $p_A \cdot (1 - p_a) = ⅖$. Això implica que $p_A > 0$. D'altra banda, per tal que [C, a] es jugui amb probabilitat ⅗ cal que $(1 - p_A) \cdot p_a = ⅗$. En conseqüència, $p_a > 0$. Com a resultat, $p_A > 0$ i $p_a > 0$ impliquen que el vector d'estratègies [A, a] es juga amb probabilitat positiva, fet incompatible amb les probabilitats de la Fig. 2.

Els vectors d'estratègies mixtes són un cas particular dels vectors d'estratègies correlacionades. De fet, els vectors d'estratègies mixtes són elements del conjunt $\prod_{i \in N} \Delta(S_i)$ en tant que els vectors d'estratègies correlacionades són elements del conjunt $\Delta(\prod_{i \in N} S_i)$, on, per a tot conjunt finit F, $\Delta(F)$ designa el conjunt de distribucions de probabilitat sobre F. En el primer cas (estratègies mixtes), el jugadors randomitzen (cadascú pel seu compte) i després se n'apleguen les estratègies per a determinar els vectors d'estratègies. En el segon cas, primer es determinen els vector d'estratègies (pures) i després es randomitza sobre els vectors. La Fig. 2 mostra un exemple d'aquesta randomització sobre vectors d'estratègies.

Equilibri correlacionat
Una qüestió que planteja l'existència del semàfor és si els jugadors tenen incentiu a respectar les instruccions que dóna el semàfor. Si fos així, (⅖·[A, c], ⅗·[C, a]), la recomanació que implícitament fa el semàfor, donaria lloc al que s'anomena un equilibri correlacionat.

Considerem el jugador 1. Hi ha dos casos. Cas 1: 1 veu la llum verda. En aquest cas, 1 sap que el jugador 2 està veient la llum vermella i sap que, per tant, el jugador 2 s'atura. Atès que 2 tria a, el millor per a 1 és triar C. Així que 1 té incentiu per a fer el que li suggereix el semàfor quan li mostra llum verda: continuar. Cas 2: 1 veu la llum vermella. Ara 1 sap que el jugador 2 està veient la llum verda, fet que significa que el jugador 2 no s'atura i tria c. Donat c, el millor per a 1 és triar A. Com a resultat, 1 torna a tenir incentiu per a fer el que li suggereix el semàfor quan li mostra llum vermella: aturar-se. La conclusió és que el jugador 1 maximitza el pagament esperat obeint les recomanacions implícites que fa el semàfor, assumint que el jugador 2 també les obeeix. Atès que el mateix succeeix per al jugador 2, (⅖·[A, c], ⅗·[C, a]) formaria part d'un equilibri correlacionat. En realitat, un equilibri correlacionat està format per més elements que vectors d'estratègies. El següent exemple permet de presentar la definició completa.

Semàfors perversos
Imaginem que algú manipula el semàfor per a què hi hagi una certa probabilitat de provocar un accident, fent que doni llum verda a tots dos conductors. En concret, el semàfor mostra:

(i) amb probabilitat 0'3, llum vermella a 1 i, simultàniament, llum verda a 2;
(ii) amb probabilitat 0'6, llum vermella a 2 i, simultàniament, llum verda a 1; i
(iii) llum verda alhora a tots dos amb probabilitat 0'1.

Si els conductors decideixen d'acord amb el que ordena el semàfor (aturar-se amb llum vermella i continuar amb llum verda), el funcionament del semàfor indueix la distribució de probabilitat (0'3·[A, c], 0'6·[C, a], 0'1·[C, c]). Aquesta distribució de probabilitat sobre jugades també és un equilibri correlacionat (assumint que tothom sap com funciona el semàfor, això és, quins senyals i amb quines probabilitats es transmeten als conductors).

Definició d'equilibri correlacionat

Un equilibri correlacionat[2] (amb estratègies pures) consta de 4 components: un conjunt d'estats del món (que representarien els estats en què es pot trobar el giny de correlació), una assignació de probabilitat a cada estat; una especificació d'un vector d'estratègies pures en cada estat (la recomanació del que els jugadors ha de triar a l'estat corresponent); i una representació de la informació que tenen els jugadors mitjançant una partició del conjunt d'estats. Tot plegat constituieix un equilibri correlacionat d'un joc simultani si, per a cada estat, la recomanació que es fa a cada jugador és una millor resposta a les recomanacions que es fan als altres jugadors, donada la informació que tenen els jugadors.

Un equilibri correlacionat en el cas dels semàfor pervers

La Fig. 3 mostra un equilibri correlacionat del joc de la Fig. 1, on l'instrument de correlació és un semàfor pervers (la perversitat del semàfor es demostra en la recomanació feta en l'estat ω_3).

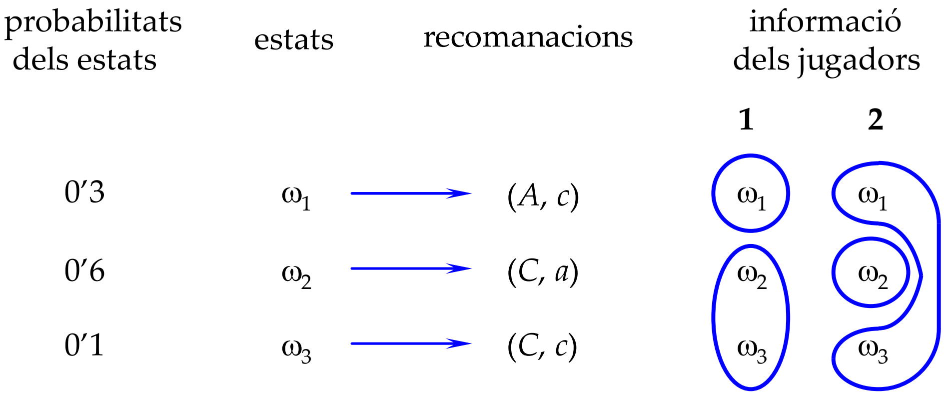

Fig. 3. Un equilibri correlacionat (ω_1 = llum verda a 2 · ω_2 = llum verda a 1 · ω_3 = llum verda a tots dos)

El conjunt d'estats és $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Cada estat representa un estat del semàfor. De fet, el semàfor (i) mostra llum vermella a 1 i verda a 2 (estat ω_1), o (ii) mostra llum verda a 1 i vermella a 2 (estat ω_2), o (iii) mostra llum verda a tots dos jugadors (estat ω_3). També podríem incloure la darrera possibilitat com a estat (mostrar llum vermella a tots dos jugadors), però com el semàfor mai no es troba en aquest estat, la probabilitat que s'hauria d'assignar a aquest estat seria zero i, per tant, seria un estat irrellevant.

Les probabilitats assignades als estats provenent del funcionament del semàfor: amb probabilitat 0'3 mostra llum vermella a 1 i verda a 2, de manera que la probabilitat de l'estat ω_1 és 0'3. Similarment, la probabilitat de ω_2 és 0'6 i la de ω_3 és 0'1.

Quan el semàfor mostra la llum verda a un jugador implícitament li està recomanant de continuar circulant i quan mostra la llum vermeda la recomanació implícita és que s'aturi. Amb aquesta interpretació, quan el semàfor es troba en l'estat ω_1 està suggerint els jugadors que triïn el vector d'estratègies pures (A, c): 1 s'ha d'aturar perquè veu la llum vermella i 2 ha de continuar perquè la veu verda. Seguint aquesta interpretació, la recomanació del semàfor en l'estat ω_2 és (C, a) i la recomnació en l'estat ω_3 és (C, c).

[2] Degut a Robert Aumann, Nobel d'Economia, 2005, http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2005/index.html.

Per últim, la part dreta de la Fig. 3 mostra l'estructura d'informació dels jugadors, això és, què saben sobre l'estat del semàfor. Aquesta estructura deriva de la presumpció que cada jugador només veu la llum que el semàfor li mostra a ell i no veu la llum mostrada a l'altre jugador. Els estats que s'agrupen en un mateix conjunt són <u>estats indistingibles</u>. Cadascú d'aquests conjunts s'anomena <u>conjunt d'informació</u>. Per exemple, en el cas del jugador 1, aquest jugador no pot distingir entre els estats ω_2 i ω_3. En aquests dos estats 1 veu la llum verda però no sap quina llum veu l'altre jugador. Per tant, $\{\omega_2, \omega_3\}$ és un conjunt d'informació del jugador 1. El fet que $\{\omega_1\}$ sigui un conjunt d'informació d'1 indica que, quan el semàfor es troba a l'estat ω_1, 1 ho sap.

Una condició que s'ha de complir quan s'especifica un equilibri correlacionat és la consistència entre l'estructura d'informació i les recomacions: <u>les recomanacions que un jugador rep en els estats d'un conjunt d'informació han de ser les mateixes</u> (en cas contrari, podria distingir entre els estats del conjunt d'informació sobre la base de recomanacions que són diferents). L'equilibri de la Fig. 3 compleix aquesta condició: el semàfor recomana fer el mateix (triar *C*) en els dos estats que 1 no pot distingir (ω_2 i ω_3); i recomana fer el mateix (triar *c*) en els dos estats (ω_1 i ω_3) que 2 no pot distingir.

Comprovació que la Fig. 3 defineix un equilibri correlacionat
Cal verificar que, assumint que els jugadors creuen que els rivals respecten les recomacions, no hi ha estat ω i no hi ha jugador *i* tal que la recomanació feta a *i* en ω no sigui una millor resposta al que *i* creu en ω que juga l'oponent. Això és, no hi ha jugador i no hi ha estat on el jugador no tingui incentiu a seguir la recomanació feta en aquell l'estat. Comencem pel jugador 1. Ell sap que o bé veu la llum vermella (es troba al seu conjunt d'informació $\{\omega_1\}$) o bé la veu verda (es troba al conjunt $\{\omega_2, \omega_3\}$).

Cas 1: 1 es troba a $\{\omega_1\}$. En aquest cas, 1 sap tot el que succeeix a ω_1. En particular, 1 sap que la recomanació feta es (*A*, *c*) i, per tant, creu que 2 tria *c*. Atès que *A* és millor resposta a *c*, 1 no té incentiu en l'estat ω_1 a no seguir la recomanació.

Cas 2: 1 es troba a $\{\omega_2, \omega_3\}$. Això significa que 1 veu la llum verda. Ara, però, 1 no pot deduir si 2 veu la llum verda o vermella i, en conseqüència, no sap quina recomanació està fent el semàfor al jugador 2. Amb tot, 1 pot calcular la <u>probabilitat condicionada</u> que 2 vegi la llum verda o vermella quan 1 l'està veient verda. Atès que 1 la veu verda, la probabilitat 0'3 associada al cas en què la veuria vermella és irrellevant. Per tant, la probabilitat que 2 vegi la llum vermella, condicionada al fet que 1 la veu verda, és $0'6/(0'6 + 0'1) = 6/7$. De manera anàloga, $0'1/(0'6 + 0'1) = 1/7$ és la probabilitat que 2 vegi la llum verda, condicionada al fet que 1 la veu verda. Atès que s'està assumint que 2 respecta les ordres del semàfor, la probabilitat que 2 triï *a* és $6/7$ (la mateixa de veure la llum vermella) i la probabilitat que 2 triï *c* és $1/7$ (la probabilitat de veure la llum verda). Així que quan 1 es troba en el conjunt d'informació $\{\omega_2, \omega_3\}$ interpreta que és com si estigués enfrontant-se a un jugador 2 que tria l'estratègia mixta σ_2 tal que $\sigma_2(a) = 6/7$. Donada aquesta mixta, si 1 tria *A* i s'atura el seu pagament esperat és $-1\cdot 6/7 + 0\cdot 1/7 = -6/7$; i si 1 tria *C* i continua el seu pagament esperat és $5\cdot 6/7 - 10\cdot 1/7 = 20\cdot 1/7$. En resum, a 1 encara li surt a compte triar *C* (i continuar) quan el semàfor li mostra la llum verda.

Comprova que el mateix val per a 2: no té 2 incentiu mai a triar una estratègia diferent de la recomanada. Com a resultat, la Fig. 3 constitueix un equilibri correlacionat del joc de la Fig. 1.

Sobre la informació que reben els jugadors

Quan la distribució de probabilitat sobre jugades només involucra equilibris de Nash (amb estratègies pures), no hi ha cap problema que tots els jugadors estiguin plenament informats de tot. La raó és que en tot moment es recomana jugar un equilibri de Nash, del qual, per definició, cap jugador no té incentiu a desviar-se. Això passa, per exemple, en el cas del primer equilibri correlacionat presentat, (⅖·[*A*, *c*], ⅗·[*C*, *a*]). La Fig. 4 mostra quina seria l'especificació completa d'aquest equilibri.

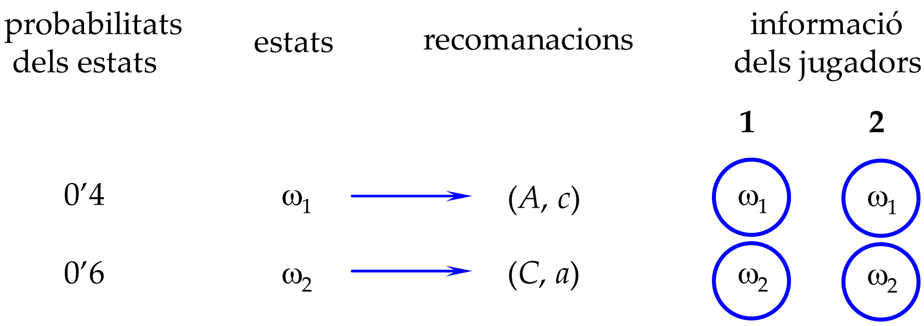

Fig. 4

Però quan s'assigna probabilitat positiva a un vector d'estratègies que no és equilibri de Nash cal donar informació diferent a algun jugador. Per exemple, en l'equilibri correlacionat de la Fig. 3, el jugador 1 no pot saber quan el semàfor mostra llum verda a tots dos conductors, perquè si sabés que aquest és el cas, s'estimaria més aturar-se: si no s'atura el pagament d'1 (suposant que 2 segueix la recomanació de continuar suggerida per la llum verda) és –10; i si s'atura, el pagament d'1 és 0. D'això se'n dedueix que si 1 sapigués quan el semàfor mostra la llum verda a tothom, 1 no estaria disposat a obeir la recomanació de continuar lligada a la llum verda. D'aquí que alterant l'estructura informativa un equilibri correlacionat pot deixar de ser-ho.

Un altre exemple

La Fig. 5 mostra el joc J5 que Aumann[3] (1974) va fer servir per a motivar el concepte d'equilibri correlacionat. Els equilibris de Nash (amb estratègies pures) són [*a*, *c*] i [*b*, *d*]. El joc té un tercer equilibri, que requereix randomització i proporciona un pagament esperat a cada jugador de 2'5. Existeix un equilibri correlacionat que resulta de jugar amb probabilitat ½ cadascun dels dos equilibris amb estratègies pures: (½[*a*, *c*], ½[*b*, *d*]). El pagament esperat de cada jugador en aquest cas és de 3. Hi ha alguna manera d'aconseguir, mitjançant equilibris correlacionats, un pagament més alt per a tothom? Sí: l'equilibri correlacionat (⅓[*a*, *c*], ⅓[*b*, *c*], ⅓[*b*, *d*]) dóna un pagament esperat de 3⅓.

		2	
		c	*d*
1	*a*	5 1	0 0
	b	4 4	1 5

Fig. 5

Per a implementar aquest equilibri cal algun instrument que enviï els senyals apropiats a cada jugador i distribueixi adequadament la informació entre els jugadors. En el cas de l'equilibri correlacionat (½[*a*, *c*], ½[*b*, *d*]) n'hi ha prou amb emprar una moneda: un dels jugadors llença

[3] Aumann, Robert (1974): "Subjectivity and correlation in randomized strategies", *Journal of Mathematical Economics* 1, 67–96. http://www.elsevier.com/wps/find/journaldescription.cws_home/505577/description.

una moneda a la vista de tothom i si surt cara es juga [*a*, *c*] i si surt creu es juga [*b*, *d*]. O es mira el rellotge i si és un minut parell es juga un equilibri i si és un minut senar es juga l'altre. Amb aquest equilibri no és necessari que els jugadors tinguin diferent informació. Però en el cas de l'equilibri correlacionat (⅓[*a*, *c*], ⅓[*b*, *c*], ⅓[*b*, *d*]) els jugadors no haurien saber quan es tria el vector d'estratègies [*b*, *c*], perquè [*b*, *c*] no és un equilibri de Nash.

Un possible giny de correlació per a implementar (⅓[*a*, *c*], ⅓[*b*, *c*], ⅓[*b*, *d*]) es troba en un de tres possibles estats, ω_1, ω_2 i ω_3. Cada estat ocorre amb probabilitat ⅓. Per exemple, el giny podria ser un dau i els estats es definirien en funció dels punts que mostra la cara superior quan el dau es llença: ω_1 = {1 punt, 2 punts}, ω_2 = {3 punts, 4 punts} i ω_3 = {5 punts, 6 punts}.

Quan el giny es troba en l'estat ω_1, el jugador 1 ho sap. Per contra, 1 no pot distingir els estats ω_2 i ω_3. En el cas del dau, si surten 1 o 2 punts, el jugador 1 és informat d'aquest resultat, però si no surten 1 o 2 punts, el jugador 1 només és informat que el nombre de punts que ha sortit és 3, 4, 5 o 6. Pel que fa al jugador 2, quan el giny es troba en l'estat ω_3, 2 ho sap; i quan el giny no es troba en l'estat ω_3, l'únic que sap 2 és que es troba en l'estat ω_1 o ω_2, però no en quin dels dos.

Finalment, les recomanacions que fa el giny són les següents. En ω_1 es juga [*a*, *c*] al joc J5; en el ω_2, es juga [*b*, *c*]; i en el ω_3, es juga [*b*, *d*]. Aquestes recomanacions són consistents amb el que saben els jugadors, perquè <u>a cada jugador es recomana la mateixa estratègia a tots els estats que no pot distingir</u>. Per a evitar que la recomanació del giny faciliti informació indeguda al jugador 1, la recomanació del giny ha de ser la mateixa als estats ω_2 i ω_3 que són indistingibles per al jugador 1. El mateix succeeix per al jugador 2 amb relació als estats ω_1 i ω_2. La Fig. 6 mostra tota aquesta estructura. Comprovem que constitueix un equilibri correlacionat de J5.

probabilitats dels estats	estats	recomanacions	informació dels jugadors 1	2
1/3	ω_1	$\longrightarrow$ (a, c)	ω_1	ω_1
1/3	ω_2	$\longrightarrow$ (b, c)	ω_2	ω_2
1/3	ω_3	$\longrightarrow$ (b, d)	ω_3	ω_3

Fig. 6. Equilibri correlacionat del joc de la Fig. 5

Comprovació que la Fig. 6 defineix un equilibri correlacionat

Es comprova que el jugador 1 no té mai incentiu a saltar-se la recomanació i es deixa el cas del jugador 2 com a exercici. Cas 1: 1 observa ω_1. Aleshores 1 sap que 2 observa {ω_1, ω_2}, ja que s'assumeix que els jugadors saben l'estructura d'informació dels oponents. Per tant, 1 sap que 2 2 no pot distingir entre els estats ω_1 i ω_2. Així, 1 sap que (segons dicta el giny) 2 tria *c* en l'estat ω_1. Donat això, el millor per a 1 és triar *a*, que és justament la recomanació que fa el giny al jugador 1 en l'estat ω_1.

Cas 2: 1 no observa ω_1. En conseqüència, 1 sap que té lloc ω_2 o ω_3. Si l'estat del giny és ω_2, 1 sap que 2 jugarà *c* i, si l'estat del giny és ω_3, 1 sap que 2 jugarà *d*. Però com la probabilitat de tant l'estat ω_2 com la del ω_3 és ⅓ i com se sap que està succeint un dels dos, la probabilitat condicionada de l'estat ω_2 és ½ (valor obtingut de dividir la probabilitat ⅓ de ω_2 per la suma ⅓ + ⅓ de les probabilitats dels estats ω_2 i ω_3). Des de la perspectiva del jugador 1, quan ell sap que es troba en el conjunt d'informació {ω_2, ω_3}, que passi l'estat ω_2 és equivalent a què 2 triï *c* (atès que l'únic estat en el conjunt {ω_2, ω_3} on es recomana a 2 de triar *c* és ω_2). De manera anàloga, si 1 sap que es troba en {ω_2, ω_3}, trobar-se en l'estat ω_3 és equivalent a què 2 triï *d*. Aquest fet és important perquè, des de la perspectiva d'1 en aquest cas, la probabilitat de trobar-se en l'estat ω_2 és igual a la probabilitat que 2 triï *c* i la probabilitat de trobar-se en l'estat ω_3 és igual a la probabilitat que 2 triï *d*. Com a resultat, en {ω_2, ω_3}, 1 espera que 2 jugui *c* i *d* amb probabilitat ½. En aquest cas, 1 és indiferent entre escollir *a* o *b* (pagament esperat de 2'5 en els dos casos) i, conseqüentment, 1 no té incentiu a no respectar la recomanació del giny de triar *b*.

És fonamental que el jugador 1 no distingeixi entre els estats ω_2 o ω_3: si pogués distingir-los, sabria en l'estat ω_2 que el giny recomana al jugador 2 triar *c*, cas en què per al jugador 1 seria millor triar *a*, elecció contrària al que dicta el giny en l'estat ω_2. Per tant, si 1 sapigués sempre l'estat en què es troba el giny, no es podria sostenir (⅓[*a*, *c*], ⅓[*b*, *c*], ⅓[*b*, *d*]) com a part d'un equilibri correlacionat.

Aquest exemple il·lustra la idea que, en ocasions, pot ser beneficiós ser ignorant (no disposar de tota la informació): si 1 no ignora mai l'estat del giny, no serà possible sostenir com a equilibri correlacionat una distribució de probabilitat que assigni probabilitat positiva al vector d'estratègies [*b*, *c*], la qual cosa redueix el pagament que pot obtenir 1 de la correlació.

Comparants els jocs J1 i J5, val la pena destacar que els jugadors estan interessats en jugar un vector d'estratègies que no és equilibri de Nash en J5 com a part d'un equilibri correlacionat (el vector [*b*, *c*], del qual tots dos obtenen pagaments alts), però que no estan interessats a jugar el vector [*C*, *c*] del joc J1, que tampoc no és equilibri de Nash, perquè amb els pagaments que proporciona aquest vector són els pitjors possibles. Per tant, la utilitat dels equilibris correlacionats rau en poder aprofitar els pagaments més alts possibles i el giny de correlació es dissenya per a què sigui racional per als jugadors jugar vectors d'estratègies que no són equilibris de Nash.

Propietat fonamental dels equilibris correlacionats
Tot joc simultani té almenys un equilibri correlacionat.

El resultat anterior és trivial sabent que tot equilibri de Nash és un equilibri correlacionat i que tot joc simultani té almenys un equilibri de Nash. L'avantatge dels equilibris de Nash en relació amb la resta d'equilibris correlacionats és que per a jugar un equilibri de Nash no cal cap instrument de correlació, ja que el concepte d'equilibri de Nash es fonamenta en la idea que la randomització dels jugadors és independent, no correlacionada.