Microeconomia Superior · Curs 2010–11 · Exercicis del Tema 1

1. Definició de joc simultani. (i) Descriu formalment els jocs de les Fig. 1, 2 i 3 (identificant el conjunt de jugadors, el conjunt d'estratègies de cada jugador i les funcions que determinen els pagaments de cada jugador). (ii) Troba tots els vectors d'estratègies de cada joc.

1 \ 2	*c*	*d*
a	1 –1	–1 1
b	–1 1	1 –1

Fig. 1

1 \ 2	*d*	*e*	*f*
a	1 –2	–2 1	0 0
b	–2 1	1 –2	0 0
c	0 0	0 0	1 1

Fig. 2

3: *e*

1 \ 2	*c*	*d*
a	0 0 0	2 0 1
b	0 1 2	1 2 1

3: *f*

1 \ 2	*c*	*d*
a	2 1 0	1 2 2
b	1 2 1	2 1 1

Fig. 3

1 \ 2	*c*	*d*
a	2 / 9	4 / 9
b	1 / 9	2 / 9

Fig. 4

2. Estratègia pura i estratègia mixta. (i) Indica una estratègia pura i una estratègia mixta del jugador 1 del joc de la Fig. 1, del jugador 1 del joc de la Fig. 2 i del jugador 1 del joc de la Fig. 3. (ii) Al joc de la Fig. 2, determina una estratègia per a cada jugador que faci que cada vector de pagaments del joc tingui probabilitat positiva i calcula, per a cada vector de pagaments, quina és aquesta probabilitat. (iii) A la Fig. 1, quin vector d'estratègies genera la distribució de probabilitat sobre els vectors de pagaments de la Fig. 4?

3. Pagament esperat (o utilitat esperada). (i) Quin és el pagament esperat del jugador 1 del joc de la Fig. 1 si es juga un vector d'estratègies que genera la distribució de probabilitat de la Fig. 4? (ii) A la Fig. 2, quin és el pagament esperat per al jugador 2 de triar *d* si el jugador 1 juga una estratègia que assigna la mateixa probabilitat a les seves tres estratègies pures *a*, *b* i *c*? (iii) En les mateixes circumstàncies, quin és el pagament esperat per al jugador 2 de triar *f*? (iv) A la Fig. 3, determina la funció que estableix quin és el pagament esperat per al jugador 3 en termes de la probabilitat de triar *a*, de triar *c* i de triar *e*. (v) Al joc de la Fig. 1, calcula l'estratègia que fa que el jugador 1 obtingui el mateix pagament esperat triant *a* que triant *b* quan el jugador 2 tria *c* amb probabilitat ⅓. (vi) Calcula el pagament esperat del jugador 2 del joc de la Fig. 3 quan es juga el vector d'estratègies $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ tal que $\sigma_1(a) = ½$, $\sigma_2(c) = ⅓$ i $\sigma_3(e) = ¼$.

4. Millor resposta. Determina quines són les millors respostes del jugador 1 en els següents casos: (i) Fig. 1, quan el jugador 2 tria *c* amb probabilitat ¼; (ii) Fig. 1, quan el jugador 2 tria *c* amb probabilitat ½; (iii) Fig. 2, quan el jugador 2 tria *d* i *e* amb probabilitat ½; (iv) Fig. 2, quan el jugador 2 tria *d*, *e* i *f* amb la mateixa probabilitat; i (v) Fig. 3, quan ½ és la probabilitat amb què el jugador 2 tria *c* i la probabilitat amb què el jugador 3 tria *e*. (vi) Troba un joc de dos jugadors, amb tres estratègies pures cadascun, on el jugador 1 tingui només una millor resposta a qualsevol estratègia del jugador 2 i on totes les estratègies de jugador 2 siguin millor resposta a qualsevol estratègia del jugador 1. (vii) Al joc de la Fig. 1, identifica les estratègies del jugador 2 per a les quals l'estratègia σ_1 tal que $\sigma_1(a) = ⅓$ és una millor resposta. I si $\sigma_1(a) = ½$? I si $\sigma_1(a) = 1$?

5. Equilibri de Nash. (i) Troba tots els equilibris de Nash amb estratègies pures dels jocs de les Figs. 1, 2 i 3. (ii) Troba tots els equilibris de Nash dels jocs de les Figs. 1, 2 i 3. (iii) Torna a calcular els equilibris de Nash amb estratègies pures del joc de la Fig. 3 si el pagament del jugador 1 és el segon valor en els vectors, el pagament del 2 és el tercer valor i el pagament del 3 és el primer valor. (iv) Calcula els equilibris de Nash del joc de la Fig. 5. (v) Calcula els equilibris de Nash del joc de la Fig. 5 si tots els pagaments es divideixen per 2. (vi) Calcula els equilibris de Nash del joc de la Fig. 5 si se suma 1 a tots els pagaments.

		2	
		c	*d*
1	*a*	2 6	4 2
	b	6 0	0 4

Fig. 5

6. Propietats de l'equilibri de Nash. (i) Troba un joc que no tingui cap equilibri de Nash. (ii) Troba un joc que tingui un únic equilibri de Nash. (iii) Troba un joc que tingui només dos equilibris de Nash. (iv) Troba un joc que tingui un únic equilibri de Nash i que aquest sigui amb estratègies mixtes. (v) Troba un joc que no tingui cap equilibri de Nash amb estratègies mixtes. (vi) Troba un joc on un equilibri de Nash doni menys pagament a tots els jugadors que algun altre vector d'estratègies pures. (vii) Troba un joc on un equilibri de Nash doni menys pagament a tots els jugadors que algun altre equilibri de Nash.

7. Equilibri perfecte. (i) Troba tots els equilibris perfectes dels jocs de les Figs. 6 i 7. (ii) Al joc de la Fig. 8, demostra que l'equilibri de Nash σ tal que $\sigma_1(a) = \sigma_1(c) = ½$ i $\sigma_2(d) = 1$ no és perfecte.

	2	
	c	*d*
a	2 1	0 0
b	0 0	1 2

Fig. 6

	2	
	c	*d*
a	1 1	0 2
b	2 0	0 0

Fig. 7

			2	
		d	*e*	*f*
	a	1 2	3 0	0 3
1	*b*	1 1	2 2	2 0
	c	1 2	0 3	3 0

Fig. 8

8. Estratègia fortament dominada. (i) Pot algun equilibri de Nash assignar probabilitat positiva a alguna estratègia fortament dominada? (ii) I algun equilibri perfecte? (iii) Demostra que un jugador no pot tenir dues estratègies fortament dominades. (iv) Comprova si hi ha alguna estratègia fortament dominada als jocs de les Figs. 1–8. (v) Considera el joc que s'obté del joc de la Fig. 9 eliminant *c* i *f*. Demostra que l'equilibri de Nash [*b*, *e*] no és perfecte en aquest joc, però que sí l'és al joc de la Fig. 9.

		2 *d*	*e*	*f*
1	*a*	1 1	0 0	–1 2
	b	0 0	0 0	0 –2
	c	–2 –1	–2 0	–2 –2

Fig. 9

9. Estratègia feblement dominada. (i) Pot algun equilibri perfecte assignar probabilitat positiva a alguna estratègia feblement dominada? (ii) Pot un jugador tenir dues estratègies feblement dominades? (iii) Troba un joc i un equilibri de Nash del joc tal que l'estratègia d'un jugador a l'equilibri sigui feblement dominada. (iv) Comprova si hi ha alguna estratègia feblement dominada als jocs de les Figs. 1–8. (v) Elimina del joc de la Fig. 10 totes les estratègies feblement dominades. Elimina les estratègies feblement dominades del joc resultant. Continua eliminant estratègies feblement dominades fins que no en quedin estratègies feblement dominades. Quines estratègies sobreviuen el procés l'eliminació?

		2 *d*	*e*
1	*a*	3 2	2 2
	b	1 1	0 0
	c	0 0	1 1

Fig. 10

10. Estratègia mixta i estratègia correlacionada. A la Fig. 11, $\pi_{11} = 1/2$, $\pi_{12} = 1/6$, $\pi_{21} = 1/12$ i $\pi_{22} = 1/4$ són les probabilitats de cada vector de pagaments. Pot obtenir-se aquesta distribució de probabilitat mitjançant estratègies mixtes?

		2 *a*	*c*
1	*A*	π_{11}	π_{12}
	C	π_{21}	π_{22}

Fig. 11

11. Equilibri correlacionat. (i) Troba un equilibri correlacionat (que no sigui equilibri de Nash) al joc de la Fig. 12, identificant un giny de correlació per a l'equilibri, especificant els possibles estats del giny, el coneixement de cada jugador sobre l'estat en què es troba el giny i la recomanació que aquest fa als jugadors a cada estat. (ii) Fes el mateix al joc de la Fig. 13.

		2 *c*	*d*
1	*a*	4 4	1 3
	b	3 1	2 2

Fig. 12

		2 *c*	*d*
1	*a*	1 1	0 2
	b	2 0	0 0

Fig. 13

12. Equilibri correlacionat amb 3 jugadors. L'únic equilibri de Nash del joc de la Fig. 14 és [*b*, *c*, *e*]. Considera el següent instrument de correlació. Una moneda es llença davant els jugadors 1 i 2. Si surt cara, es recomana a 1 que jugui *a* i a 2 que jugui *c*. Si surt creu, es recomana a 1 que jugui *b* i a 2 que jugui *d*. A 3 sempre se li recomana triar *f*. (i) Donen lloc les recomanacions a un equilibri correlacionat? (ii) Quins són els pagaments que obtenen els jugadors? (iii) Estaria el jugador 3 interessat en conèixer el resultats del llençament de la moneda? Per què?

		2					
		c	*d*	*c*	*d*	*c*	*d*
1	*a*	0 1 3	0 0 0	2 2 2	0 0 0	0 1 0	0 0 0
	b	1 1 1	1 0 0	2 2 0	2 2 2	1 1 0	1 0 3
		e		*f*		*g*	
				3			

Fig. 14

13. Equilibri correlacionat. El joc de la Fig. 15 es pot jugar mitjançant el següent mecanisme de correlació. Un àrbitre llença d'amagat dues monedes al mateix temps. Tots dos jugadors saben que: (a) si surten dues cares, l'àrbitre recomana jugar [*b*, *d*] i informa del resultat només al jugador 1; (b) si surten dues creus, l'àrbitre recomana [*a*, *d*]; i (c) si no surt el mateix, l'àrbitre recomana [*a*, *c*] i informa del resultat només al jugador 2. (i) Té incentiu el jugador 2 a seguir la recomanació quan aquesta dicta triar *d*? (ii) Té incentiu el jugador 1 a seguir la recomanació quan aquesta dicta triar *a*? (iii) Genera el mecanisme un equilibri correlacionat?

		2	
		c	*d*
1	*a*	4 3	2 3
	b	5 0	0 1

Fig. 15

14. Equilibri correlacionat. (i) Verifica que (0'3·[*A*, *c*], 0'6·[*C*, *a*], 0'1·[*C*, *c*]) és un equilibri correlacionat del joc de la Fig. 16. (ii) Suggereix un mecanisme de correlació (indicant la informació que tenen els jugadors sobre els resultats que produeix el mecanisme) que generi l'equilibri correlacionat anterior. (iii) És (¼·[*A*, *a*], ¼·[*A*, *c*], ¼·[*C*, *a*], ¼·[*C*, *c*]) un equilibri correlacionat del joc de la Fig. 16?

		2	
		a	*c*
1	*A*	–1 –1	0 5
	C	5 0	–10 –10

Fig. 16