Subhastes

http://en.wikipedia.org/wiki/Auction

Una subhasta és un tipus de mercat on els n members d'un conjunt N de potencials compradors (licitadors, *bidders*) volen adquirir un objecte. Sigui v_i el valor, en unitats monetàries, que el licitador i atribueix a l'objecte. No hi ha pèrdua de generalitat en definir el conjunt de licitadors $\{1, 2, \ldots, n\}$ de manera que $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_n$.

Cada subhasta està caracteritzada per les regles que determinen quin comprador s'emporta l'objecte. El resultat de la subhasta no només depèn de les regles que defineixen la subhasta sinó també de la informació de què disposen els licitadors. Per tot plegat, una subhasta pot ser analitzada com un tipus particular de joc (en principi, no cooperatiu).

Tipus de subhasta en funció de la informació dels licitadors

Una subhasta amb informació completa és aquella on tots els licitadors coneixen el vector (v_1, v_2, … , v_n) de valoracions. En cas contrari, es tracta d'una subhasta amb informació incompleta.

Tipus de subhasta en funció del mecanisme de determinació del comprador

Hi ha dues grans categories de mecanismes per a determinar el guanyador de la subhasta: mecanismes simultanis o seqüencials. Els primers donen lloc a les subhastes en sobre tancat. Els segon, a les subhastes seqüencials (o dinàmiques).

Dos tipus importants de subhastes en sobre tancat són les subhastes de primer preu i les subhastes de segon preu (o subhastes Vickrey[1]). A la subhasta en sobre tancat de primer preu (*first-price sealed-bid auction*), el guanyador és el licitador que ofereix el preu més alt i ha de pagar per l'objecte el preu més alt ofert. A la de segon preu (*second-price sealed-bid auction*), també guanya el licitador que ofereix el preu més alt, però en aquest cas paga per l'objecte només el segon preu més alt ofert.

Les subhastes seqüencials més conegudes són la subhasta anglesa (o ascendent) i la subhasta holandesa (o descendent). En la subhasta anglesa (*English auction* o *open ascending price auction*) un subhastador demana als licitadors que facin ofertes públiques per l'objecte de forma que, per a ser acceptada, cada nova oferta ha de superar l'oferta anterior. El guanyador és el licitador que presenta l'oferta més alta i paga aquesta oferta. En la subhasta holandesa (*Dutch auction* o *open descending price auction*) un subhastador fixa un preu inicial i el va rebaixant fins que algun licitador accepta l'últim preu cantat. En aquest cas, aquest licitador rep l'objecte a canvi del preu que ha acceptat.

---

[1] Subhasta inventada per William Spencer Vickrey (1914–1996), Premi Nobel d'Economia el 1996. Vickrey va ser pioner en l'aplicació de la teoria dels jocs a l'anàlisi de les subhastes. El mecanisme de Groves-Clarke es pot considerar una generalització de la subhasta Vickrey (en tots dos casos no hi ha incentiu a revelar informació falsa sobre la valoració).
http://en.wikipedia.org/wiki/William_Vickrey
http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1996/index.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Vickrey_auction

La subhasta japonesa és una variant de la subhasta anglesa on cada licitador, per a continuar a la subhasta, ha d'acceptar l'últim preu ofert. Si no l'accepta, no pot tornar a participar.

La subhasta on tots paguen (*all-pay auction*) és una variant de la subhasta anglesa on tothom que ha fet una oferta ha de pagar la seva pròpia oferta més alta, tot i que només qui ha fet l'oferta més alta de totes s'emporta l'objecte.

Subhasta amb informació completa en sobre tancat de primer preu

En aquesta subhasta cada licitador i escriu en un paper un valor b_i no negatiu (que no té perquè ser igual a la seva valoració v_i de l'objecte) i el tanca en un sobre. Un subhastador aplega els sobres de tots els licitadors, els obre i revela públicament el vector $b = (b_1, \ldots, b_n)$ de licitacions. El guanyador de la subhasta és el licitador que ofereix el preu més alt, a canvi del qual es pot endur l'objecte. En cas que hi hagi $m \geq 2$ licitadors que ofereixen el preu més alt, es fa un sorteig on cadascun d'ells té la probabilitat $1/m$ de ser el guanyador.

Aquesta subhasta es pot considerar un joc simultani on el conjunt d'estratègies de cada jugador és el conjunt de nombres reals no negatius (de manera que les jugades són els vectors $b = (b_1, \ldots, b_n)$ de licitacions) i la funció d'utilitat del jugador i és

$u_i(b) = 0$ si $b_i < max\{b_1, \ldots, b_n\}$

$u_i(b) = (v_i - b_i)/m$ si $\{j \in N: b_j = max\{b_1, \ldots, b_n\}\}$ conté m membres i i està entre ells.

Aquesta funció diu que la utilitat d'i és 0 si el preu b_i que i escriu no és el més alt. En cas que b_i sigui el preu més alt, la utilitat d'i depèn de quants altres licitadors han ofert també el preu més alt. Si són $m \geq 1$ els licitadors que han ofert el preu més alt, llavors i s'emporta l'objecte amb probabilitat $1/m$. Per tant, amb probabilitat $1/m$ s'emporta la diferència entre el que valora l'objecte (v_i) i el que paga per ell (b_i).

Solució d'una subhasta amb informació completa en sobre tancat de primer preu

- *És una estratègia feblement dominada per a cada jugador i l'estratègia d'oferir un valor* $b_i > v_i$.
- *Si* $v_1 > v_2$, *aleshores el jugador 1 guanya la subhasta oferint qualsevol* b_1 *tal que* $v_2 < b_1 < v_1$.
- *Si* $\{j \in N: v_j = v_1\}$ *té* $m \geq 2$ *membres, cadascun d'ells ofereix* $b_i = v_i$.

Demostració. Si $b_i > v_i$ i i guanya llavors i obté utilitat negativa i, si no guanya, obté utilitat zero. En canvi, escollint un valor $b_i \leq v_i$, el pagament més baix que i pot obtenir és zero. Això fa que escollir b_i més gran que v_i constitueixi una estratègia feblement dominada (com a mínim, per triar $b_i = v_i$).

Suposem $v_1 > v_2$. Això significa que existeix un únic licitador (l'1) que valora més que ningú l'objecte. De l'anterior resultat se segueix que $b_2 \leq v_2$: el licitador amb el segon preu més alt no ofereix més que aquest segon preu més alt. En conseqüència, si el licitador 1 (el que valora més l'objecte) tria b_1 tal que $v_2 < b_1 < v_1$ guanya segur la subhasta.

Sigui $\{j \in N: v_j = v_1\}$ el conjunt de licitadors que tenen la màxima valoració de l'objecte (cal recordar que, per definició, $max\{v_1, \ldots, v_n\} = v_1$). En el cas anterior aquest conjunt tenia només un membre: el licitador 1. Suposem ara que té $m \geq 2$ membres. Si un d'aquests (sigui i) indica un preu $b_i < v_1$, llavors perdria l'objecte si algun altre membre (sigui k) ofereix b_k tal que $b_i < b_k < v_2$. L'única manera que i té de garantir-se que podrà aconseguir l'objecte és presentar com a oferta el seu valor de l'objecte: $b_i = v_i = v_1$.■

El cas $v_1 > v_2$ és patològic en el sentit que el licitador 1 no té una millor resposta. Per exemple, triem b_1 tal que $v_2 < b_1 < v_1$ i suposem que b_1 és una millor resposta per a 1. Sigui $r = v_2 - b_1$. Llavors la utilitat d'1 augmentaria si escollís b_1' tal que $v_2 < b_1' < v_2 - r/2$. El problema rau en el fet que 1 necessita escollir el nombre que sigui el més proper a v_2 entre els que són més petits que v_2. En el domini dels nombres reals, aquest nombre no existeix. [Verifica que la utilitat d'i augmenta quan substituteix l'estratègia b_1 tal que $v_2 < b_1 < v_1$ per l'estratègia b_1' tal que $v_2 < b_1' < v_2 - r/2$, on $r = v_2 - b_1$.]

De fet, la utilitat més alta que 1 podria aconseguir és $v_1 - v_2$ i, per a tot $\varepsilon > 0$ suficientment petit, disposa d'una estratègia que el deixa només a un ε de distància d'aquest pagament. Quan això passa, es diu que el jugador té una ε-millor resposta. Les jugades que estan formades per ε-millors respostes són ε-equilibris de Nash (o equilibris de Nash aproximats). Segons aquesta terminologia, la subhasta amb $v_1 > v_2$ només té ε-equilibris de Nash.

Subhasta amb informació completa en sobre tancat de segon preu
Aquesta subhasta es diferencia de l'anterior només en el fet que <u>el guanyador paga la licitació més alta que hi ha quan s'ha eliminat la licitació més alta</u>. En cas d'empat, un sorteig equiprobable determina el guanyador, que ara paga l'oferta més alta (ja que hi ha hagut almenys dos licitadors que han ofert el valor més alt).

Donat un vector de licitacions $b = (b_1, \dots, b_n)$ i un licitador i, sigui $m_{-i} = max\{b_j: j \neq i\}$ el valor més alt que ofereix algun licitador que no sigui i. La funció d'utilitat d'i és:

$u_i(b) = 0$ si $b_i < m_{-i}$
$u_i(b) = (v_i - m_{-i})/m$ si $\{j \in N: b_j = m_{-i}\}$ conté m membres i i està entre ells
$u_i(b) = v_i - m_{-i}$ si $b_i > m_{-i}$.

Solució d'una subhasta amb informació completa en sobre tancat de segon preu
- *És una estratègia feblement dominada per a cada jugador i oferir un valor $b_i > v_i$.*
- *Si $v_1 > v_2$, aleshores el jugador 1 guanya la subhasta oferint qualsevol b_1 tal que $v_2 < b_1 < v_1$.*
- *Si $\{j \in N: v_j = v_1\}$ té $m \geq 2$ membres, cadascun d'ells ofereix $b_i = v_i$.*

Demostració. La demostració de les dues últimes afirmacions és similar a la subhasta de primer preu. Suposem que $b_i > v_i$. La prova que $b_i > v_i$ és feblement dominada segueix 4 casos.

<u>Cas 1</u>: $b_i < m_{-i}$. Això diu que algú altre guanya la subhasta si i declara $b_i > v_i$. Però el mateix passaria si declarés la seva valoració real v_i. Això fa que 1 sigui indiferent entre dir v_i i $b_i > v_i$.

<u>Cas 2</u>: $b_i = m_{-i}$. Ara hi ha $m \geq 2$ licitadors amb la màxima oferta, i entre ells. La utilitat d'i és $(v_i - m_{-i})/m$, que és un valor negatiu (ja que $b_i > v_i = m_{-i}$). Per tant, $b_i > v_i$ no pot ser millor resposta, perquè v_i garanteix que la utilitat no sigui mai negativa.

Cas 3: $b_i > m_{-i} \geq v_i$. En aquest cas, i guanya, paga m_{-i} i rep la utilitat $v_i - m_{-i} \leq 0$. Comparem ara la licitació b_i amb la licitació v_i. Si i ofereix el preu v_i, podria guanyar o perdre. Si perd, el pagament és zero i, per tant, no estaria pitjor que oferint b_i. Si guanya, cal que $v_i = m_{-i}$, de manera que la seva utilitat seria zero. Com a resultat, triar v_i mai no és pitjor que triar $b_i > v_i$.

Cas 4: $b_i > m_{-i} > v_i$. Ara i guanya, paga m_{-i} i rep la utilitat $v_i - m_{-i} > 0$. Si i ofertés v_i, obtindria la mateixa utilitat.

L'anàlisi dels 4 casos ha demostrat que v_i mai no és pitjor que $b_i > v_i$ i, en algun cas (cas 2), és millor. Conclusió: tota estratègia $b_i > v_i$ és feblement dominada per v_i.■

No manipulabilitat de la subhasta Vickrey
En una subhasta amb informació completa en sobre tancat de segon preu declarar l'autèntica valoració v_i és una estratègia feblement dominant per a tot licitador i.
http://en.wikipedia.org/wiki/Vickrey_auction.

Comparació de solucions
En la subhasta de primer preu, el venedor aconsegueix el següent: el màxim valor dels licitadors si hi ha almenys dos licitadors que tenen aquesta valoració (la competència afavoreix al venedor), però un valor molt proper, i superior, al segon màxim valor v_2 quan la màxima valoració la té només un licitador. En la subhasta de segon preu, passa el mateix. Per tant, des de la perspectiva del venedor, els dos tipus de subhasta produeixen pràcticament el mateix resultat. Però hi ha un problema d'inestabilitat de la solució en el cas de la subhasta de segon preu: en la solució, el licitador 2 es troba indiferent entre declarar v_2 i un valor inferior, perquè 1 sempre guanyarà amb l'estratègia de triar b_1 tal que $v_2 < b_1 < v_1$. Aquesta indiferència de 2 és un problema per al venedor, perquè el preu que el venedor rep seria inferior a v_2 si $v_3 < v_2$.

Subhastes amb valoracions privades independents
En aquest tipus de subhasta cada licitador només coneix la seva pròpia valoració de l'objecte. El joc resultant és un joc baiesià on cada licitador i considera que cada possible valoració del licitador $j \neq i$ defineix un tipus de licitador j. Per tant, cal completar la descripció de la subhasta especificant, per a cada licitador i i cada licitador $j \neq i$, una distribució de probabilitat F_{ij} tal que $F_{ij}(v_j)$ estableix quina és la probabilitat que la valoració real del licitador j sigui un valor igual o inferior a v_j. Per a simplificar, suposem que totes les funcions F_{ij} són iguals i consisteixen en una distribució uniforme sobre l'interval [0, 1], que constitueix l'espai on els licitadors defineixen les seves valoracions. Així, per a tot i, tot j i tot $v_j \in [0, 1]$, $F_{ij}(v_j) = v_j$. Una hipòtesi addicional és que licitadors i venedors són tots ells neutrals al risc.

Equivalència de subhastes amb valoracions privades independents
Les subhastes que es podrien qualificar de "més populars" són quatre: la de primer preu, la de segon preu, l'anglesa i l'holandesa. En el cas de valoracions privades independents, la de primer preu és estratègicament equivalent a l'holandesa i la de segon preu és equivalent a l'anglesa.

L'equivalència entre primer preu i holandesa se segueix del fet que triar quin preu oferir és el mateix que decidir en quin moment de la seqüència descendent del preu acceptar el preu.

L'equivalència entre segon preu i anglesa no és tan immediata i funciona mentre les valoracions siguin privades. D'entrada, els jocs que representen les dues subhastes no són estratègicament equivalents, perquè en la subhasta anglesa els licitadors reben informació sobre les valoracions dels rivals. L'equivalència entre segon preu i anglesa es fonamenta en el fet que el preu que paga el guanyador depèn exclusivament de les ofertes fetes pels rivals. Això fa que els licitadors es vegin forçats a acceptar qualsevol preu que no superi la seva valoració. Com a conseqüència, revelar l'autèntica valoració és una estratègia feblement dominant per als licitadors que no tinguin la màxima valoració. La conclusió és que la subhasta de segon preu i l'anglesa portaran al mateix resultat sempre que els licitadors no triïn estratègies feblement dominades.

Regles de licitació lineals

Una regla de licitació (*bidding rule*) del licitador i és una funció B_i que assigna una oferta $B_i(v_i) \geq 0$ feta per i quan la seva valoració de l'objecte és $v_i \in [0, 1]$. Una regla de licitació B_i és lineal si existeixen constants $a_i \geq 0$ i $c_i > 0$ tals que, per a tot $v_i \in [0, 1]$, $B_i(v_i) = a_i + c_i \cdot v_i$.

Subhastes amb valoracions privades independents: subhasta de primer preu

Per a simplificar, suposem que els licitadors segueixen tots la mateixa regla de licitació lineal de la forma $B_i(v_i) = c_i \cdot v_i$, on $c_i > 0$. Per tant, quan el licitador i té la valoració v_i, escriu el valor $B_i(v_i) = c_i \cdot v_i$. La solució de la subhasta consisteix en determinar els valors de c_i.

Prenguem el licitador i i suposem que escriu l'oferta b_i. Pel fet que les valoracions prenen valors en un continu, la probabilitat que dues ofertes siguin iguals és zero. Això fa que, per a què i guanyi licitant b_i, és necessari i suficient que, per a tot $j \neq i$, l'oferta b_j sigui inferior a b_i. Atès que tot j obté b_j a partir de la regla $B_j(v_j) = c_j \cdot v_j$, resulta $b_j = c_j \cdot v_j$. D'aquí es dedueix que la probabilitat que $b_j < b_i$ és igual a la probabilitat que $c_j \cdot v_j < c_i \cdot v_i$, que és igual a la probabilitat que $v_j < c_i \cdot v_i / c_j$. Per la hipòtesi que les valoracions reals v_j resulten d'una distribució de probabilitat uniforme sobre [0, 1], la probabilitat que $v_j < c_i \cdot v_i / c_j$ és l'amplada de l'interval de valors de v_j tals que $v_j < c_i \cdot v_i / c_j$ dividida per l'amplada total (l'amplada de l'interval [0, 1]). En resum, la probabilitat que l'oferta b_j sigui inferior a b_i és $c_i \cdot v_i / c_j$ i, per la hipòtesi que les distribucions de probabilitat són independents, la probabilitat $\pi(c_i)$ que i guanyi la subhasta amb l'oferta $b_i = c_i \cdot v_i$ és el producte, per a tot $j \neq i$, de la probabilitat $c_i \cdot v_i / c_j$ (on la fórmula (1) d'aquesta probabilitat es basa en el fet que hi ha $n \geq 2$ licitadors).

$$\pi(c_i) = \prod_{j \neq i} \frac{c_i v_i}{c_j} = c_i^{\,n-1} \prod_{j \neq i} \frac{v_i}{c_j} \tag{1}$$

Tot i que i tria licitar b_i, aquest oferiment està completament determinat pels valors c_i i v_i. El segon està donat: i no decideix quina és la seva valoració de l'objecte. En canvi, i sí que tria c_i. Per aquest motiu, (1) s'ha definit considerant que triar b_i equival a triar la constant c_i.

Per la neutralitat al risc, la funció d'utilitat d'i quan i licita b_i i té la valoració v_i és (2): la probabilitat $\pi(c_i)$ de guanyar amb l'oferta $b_i = c_i \cdot v_i$ multiplicada pel premi $v_i - b_i$ que obté quan guanya (el valor per a i de l'objecte menys el que paga per ell).

$$u_i(c_i, v_i) = \pi(c_i)[v_i - b_i] = \pi(c_i)[v_i - c_i \cdot v_i] = v_i \cdot \pi(c_i)[1 - c_i] \tag{2}$$

L'objectiu d'i és triar c_i per a maximitzar (2). Atès que v_i és una constant, maximitzar (2) equival a maximitzar $\pi(c_i)[1 - c_i]$. La condició de primer ordre és $\pi'(c_i)(1 - c_i) - \pi(c_i) = 0$, on $\pi'(c_i)$ és la derivada de $\pi(c_i)$. Sabent que

$$\pi'(c_i) = (n-1)\, c_i^{\,n-2} \prod_{j\neq i} \frac{v_i}{c_j},$$

$\pi'(c_i)(1 - c_i) - \pi(c_i) = 0$ implica

$$(n-1)\, c_i^{\,n-2} \prod_{j\neq i} \frac{v_i}{c_j} (1 - c_i) = c_i^{\,n-1} \prod_{j\neq i} \frac{v_i}{c_j}.$$

Després de cancel·lar $c_i^{\,n-2} \prod_{j\neq i} \frac{v_i}{c_j}$ a tots dos costats, $(n - 1)(1 - c_i) = c_i$. Aïllant c_i s'arriba a (3).

$$c_i = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}. \tag{3}$$

En resum, la regla de licitació lineal d'i que dóna sempre la millor resposta a les ofertes dels rivals (obtingudes també seguint regles de licitació lineals) és (4).

$$B_i(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i. \tag{4}$$

Assumint la hipòtesi de simetria dels licitadors (tots ells són indistingibles), (4) és una regla vàlida per a tot licitador i. Les regles (4) defineixen regles de licitació d'equilibri: si els rivals d'i fan servir aquesta regla, no hi ha millor elecció per a i que fer servir també aquesta regla.

La seqüència $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ és, per definició, una mostra de variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes. L'estadístic d'ordre k de la mostra és el k-èsim valor més petit de la mostra: l'estadístic d'ordre 1 és el valor més petit, el d'ordre 2 el segon més petit, etc. Si cada licitador i segueix la regla (4) i només hi ha un licitador amb valoració màxima, llavors aquest licitador amb valoració màxima és el guanyador. Atès que hi ha n licitadors, aquesta valoració màxima serà l'estadístic d'ordre n de la mostra $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Per definició, el valor esperat de l'estadistic d'ordre k és $k/(n + 1)$. Per tant, el valor esperat de la valoració més alta és $n/(n + 1)$. Amb aquesta informació es pot calcular el preu (5) expectat p pel venedor: és la licitació (calculada segons (4)) associada amb el valor esperat de la valoració més alta.
http://en.wikipedia.org/wiki/Order_statistic

$$p = \frac{n-1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n+1} \tag{5}$$

Tota l'anàlisi anterior porta al següent resultat.

Solució d'una subhasta amb valoracions privades independents de primer preu
Si els $n \geq 2$ licitadors fan servir regles de licitació lineals del tipus $B_i(v_i) = c_i \cdot v_i$, on c_i és una constant positiva i v_i és la valoració de l'objecte per part del licitador i, aleshores les úniques regles de licitació d'equilibri d'una subhasta de primer preu prenen la forma (4) i el preu esperat pel venedor és (5). Per l'equivalència amb la subhasta holandesa, aquesta mateixa és la solució d'una subhasta holandesa.

Solució d'una subhasta amb valoracions privades independents de segon preu
Si no s'adopten regles de licitació feblement dominades, les úniques regles de licitació d'equilibri a una subhasta de segon preu són del tipus $B_i(v_i) = v_i$ i el preu esperat pel venedor quan es fan servir aquestes regles és (5). Per l'equivalència amb la subhasta anglesa, aquesta mateixa és la solució d'una subhasta anglesa.

Tant a la subhasta anglesa com a la de segon preu, oferir un preu igual a la pròpia valoració defineix l'única regla de licitació feblement dominant. Remogudes les regles dominades, guanya la subhasta el licitador amb la valoració més alta i, amb probabilitat 1, paga la segona valoració més alta v_2. El preu esperat coincideix amb el valor esperat de l'estadístic d'ordre $n - 1$, que és (5).

Analitzem el cas d'una subhasta anglesa, implementada de la següent forma. El subhastador anuncia un valor inicial b^0, i això defineix la ronda 0. A continuació, els licitadors poden fer ofertes seqüencialment, un rere un altre, de manera que l'última oferta ha de ser superior a l'anterior. Cada oferta defineix una ronda. Així, la subhasta entra a la ronda 1 si hi ha algun licitador que faci una oferta $b^1 > b^0$. Si algun licitador fa una oferta $b^2 > b^1$, s'entra a la ronda 2. Qui faci l'oferta a l'última ronda s'emporta l'objecte a canvi de la seva oferta. L'anàlisi portarà a la conclusió que cap licitador no farà dues ofertes consecutives i que no se seleccionaran estratègies feblement dominades.

• <u>En una subhasta anglesa, ningú no oferta més de la seva valoració</u>. Suposem que, a la ronda k de la subhasta, el licitador i oferta $b^k > v_i$. La probabilitat p_k representa la creença d'i que l'oferta b^k sigui guanyadora, això és, que a la ronda $k + 1$ ningú no faci cap oferta. La utilitat esperada de fer l'oferta $b^k > v_i$ és $p(v_i - b^k) + (1 - p) \cdot 0$. Aquest valor és negatiu si $p > 0$ i zero si $p = 0$. Per contra, ofertant com a màxim v_i, la utilitat esperada mai no és negativa. Això fa que triar b^k sigui part d'una estratègia feblement dominada per triar v_i com a màxim.

• <u>En una subhasta anglesa, tot licitador i estarà disposat a fer una oferta mentre l'última oferta (no feta per ell) sigui inferior a v_i</u>. Suposem que lúltima oferta (feta per algun $j \neq i$) és $b^k < v_i$. Sigui b^{k+1} un valor tal que $b^k < b^{k+1} < v_i$. Sigui p_{k+1} la probabilitat que representa la creença d'i que l'oferta b^{k+1} sigui guanyadora. La utilitat esperada de fer l'oferta b^{k+1} és $p(v_i - b^{k+1}) + (1 - p) \cdot 0 \geq 0$, que és positiva si $p > 0$. En canvi, la utilitat esperada de no fer cap més oferta és zero, de manera que ofertar b^{k+1} domina feblement no fer cap més oferta.

Com a conseqüència dels dos resultats anteriors, la subhasta arribarà fins a una ronda on s'assoleixi o se superi el valor v_2 corresponent a la segona valoració més alta. Així que l'oferta guanyadora d'una subhasta anglesa serà un valor b tal que $v_2 \leq b \leq v_1$ (on, de fet, b pot estar tan a prop de v_2 com es vulgui). <u>L'interès d'aquest resultat és que, a diferència del cas de la</u>

subhasta de primer preu, la solució trobada no depèn de les creences dels licitadors relatives a les valoracions dels altres licitadors: és merament el resultat de les valoracions dels licitadors.

Pel principi de revelació, la subhasta anglesa podria implementar-se mitjançant un mecanisme directe on cada licitador revela una valoració i el mecanisme assigna l'objecte al licitador que ofereix el preu més alt. Aquest mecanisme incentiva a revelar les valoracions autèntiques, de manera que l'objecte aniria a parar al mateix licitador que se l'emportaria a la subhasta anglesa (si, en cas d'empat, el mecanisme aplica el mateix desempat que es faria a la subhasta).

Teorema d'equivalència d'ingressos de Vickrey
Si els licitadors són neutrals al risc, simètrics (mateixes creences sobre les valoracions dels altres) i les seves valoracions privades es representen mitjançant variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes sobre l'interval [0, 1], *aleshores el preu (definit per (5)) que espera obtenir el venedor és el mateix en cadascuna de les quatre subhastes següents: anglesa, holandesa, en sobre tancat de primer preu i en sobre tancat de segon preu.*
http://www.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Spulido/Auctions/whyauctions.html
http://www.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Spulido/Auctions/revenue.html

Sóc el venedor: millor fer una subhasta anglesa o de primer preu?
Les solucions indicades anteriorment fan referència a valors esperats: quin seria el resultat mitjà de totes les possibilitats. Això no treu que, en un cas concret, dos tipus de subhastes produeixin resultats diferents. És el mateix que passa amb les probabilitats. Imaginem que es llencen simultàniament dues monedes i que has de pagar tants euros com creus surtin i reps tants euros com cares surtin. Tot i que el pagament esperat és zero, això no impedeix que en algun cas es rebin 2 euros i en algun altre es paguin 2 euros.

Comparem, per exemple, una subhasta de primer preu i una anglesa amb dos licitadors. Suposem que v_1 = 0'8 i v_2 = 0'75 (les unitats podrien ser milions d'euros). A una subhasta anglesa, el venedor expectaria obtenir una mica més de 0'75. A una subhasta en sobre tancat de primer preu, assumint creences dels licitadors sobre les valoracions del rival uniformement distribuïdes sobre [0, 1], la licitació guanyadora seria, aplicant (4), ½·0'8 = 0'4. En aquest cas, la subhasta anglesa generaria uns ingressos un 87'5% superiors als que generaria la subhasta de primer preu. Per tant, l'ingrés per al venedor d'una subhasta depèn tant de les valoracions dels licitadors com de les seves creences sobre les valoracions dels altres.

L'exemple anterior podria donar a entendre que la subhasta anglesa és més profitosa que la de primer preu, si més no perquè a l'anglesa els licitadors reben informació sobre les valoracions dels altres. El següent exemple mostra que no és així: si v_1 = 0'8 i v_2 = 0'1, la licitació guanyadora a la subhasta de primer preu seria 0'4, mentre que la guanyadora a la subhasta anglesa seria poc més de 0'1. Així, el rendiment de la subhasta de primer preu per al venedor seria prop d'un 400% superior al rendiment de la subhasta anglesa.

La maledicció del guanyador (*the winner's curse*)
http://www.gametheory.net/Mike/applets/WinnerCurse/
http://en.wikipedia.org/wiki/Winner's_curse
Considerem la següent subhasta, proposada per Martin Shubik: es tracta de subhastar 1 €, de forma que l'oferta més alta se l'emporta i tant el licitador que ofereix el preu més alt com el que ofereix el segon preu més alt paguen la seva oferta. Aquesta subhasta té un únic equilibri de Nash: qui fa la primera oferta, ofereix 1 € i la resta de licitadors no liciten.

L'interessant d'aquest subhasta no és que l'equilibri sigui únic, sinó que la subhasta podria acabar amb algú oferint un preu superior a 1 €! Suposem, per exemple, que la primera oferta, feta pel licitador *i*, és de 0'8 €. Aleshores un altre licitador *j* pot pensar que podria guanyar oferint una mica més, com ara 0'9 €. En aquest punt, tots dos són víctimes d'una dinàmica perversa. Perquè *i* es veu obligat a oferir preu un altre cop: si no ho fa, paga 0'8; si ofereix, per exemple, 1 € el resultat net és que ni guanya ni perd (paga 1 € i rep 1 €). Imaginem que *i* ofereix el preu 1 €. Llavors *j* és víctima del mateix problema: si no continua licitant, perd 0'9 €; si licita, posem per cas, 1'1 €, només perd 1'1 – 1 = 0'1 €. Però el procés no s'atura aquí: *i* preferiria oferir 1'2 € (i perdre 0'2 €) a no licitar més (i perdre la seva última oferta, 1 €). I l'espiral pot seguir i seguir…

Aliprantis i Chakrabarti (2000, p. 182) assenyalen que, segons una informació de *The Indianapolis Star* d'abril del 1997, en una subhasta de 20 $ les licitacions van arribar a superar els 15.000 $. Aquest fet il·lustra el fenomen conegut com a maledicció del guanyador, que és susceptible de produir-se en subhastes amb valoracions comunes.

Subhastes amb valoracions comunes
Una subhasta amb valoració comuna (*common-value auction*) és una subhasta en sobre tancat de primer preu tal que: (i) el valor real de l'objecte per a tots els licitadors és el mateix; i (ii) cada licitador ignora el valor real de l'objecte però rep informació privada sobre aquest valor (mitjançant "senyals").

L'exemple típic són subhastes de drets d'explotació temporal de determinats recursos (com ara petroli o gas) que es troben sota l'oceà (recentment, per exemple, Repsol ha descobert el jaciment de gas més gran trobat mai a Veneçuela). Aquests recursos tenen un valor, però desconegut: fins que l'explotació no es duu a terme, no es poden determinar els costs d'obtenir els recursos, ni la seva qualitat o quantitat. Els possibles licitadors poden realitzar estudis sobre el jaciment que els permetin fer una estimació més acurada del seu valor. Els resultats d'aquests estudis serien el "senyal" que rep, privadament, el licitador que encarrega els estudis.

Una altra il·lustració la proporcionen les subhastes de l'espectre electromagnètic (llicències de 4G, per exemple). Una subhasta canadenca d'espectre va acabar el juliol el 2008, després de 331 rondes, arreplegant 4.250 milions de dòlars. Una subhasta famosa al seu temps per ser dissenyada per economistes especialistes en subhastes fou la de 3G del Regne Unit, finalitzada el 27 d'abril del 2000, que va aconseguir 22'5 milions de lliures esterlines (34.000 milions de dòlars). La fama és deguda al fet que aquest import representà entre 5 i 10

vegades més les estimacions fetes prèviament als mitjans de comunicació sobre el resultat de la subhasta.
http://en.wikipedia.org/wiki/Spectrum_auction
http://www.nuff.ox.ac.uk/users/klemperer/spectrumindex.htm
http://www.nuff.ox.ac.uk/users/klemperer/VirtualBook/17_Chapter6.pdf

La maledicció del guanyador té lloc quan la victòria del licitador guanyador es produeix com a resultat de rebre un senyal massa optimista, de manera que s'acaba pagant més del seu valor. Per exemple, suposem que 100 és el valor d'uns terrenys petrolífers i que una companyia pensa que el valor està entre 50 i 200. Si les seves estimacions porten a un valor de 150, guanyar la subhasta oferint un preu de 120 causaria una pèrdua a la companyia de 120 – 100 = 20: la maledicció del guanyador.

Es pot interpretar que Telefònica va ser víctima d'aquesta maledicció quan, fruit de l'optimisme generat pel desenvolupament de la tecnologia UMTS, va adquirir al 2000 una llicència de UMTS a Itàlia per 3.250 milions d'euros i una altra a Suïssa per 50 milions de francs suïssos (uns 35 milions d'euros). Posteriorment a la compra es va fer evident que les inversions fetes per a obtenir benefici de les llicències no es podrien rendibilitzar, motiu pel qual, ja al 2002, Telefònica va anunciar que renunciava a l'explotació de la llicència italiana. Al 2004 va fracassar l'intent de vendre-la a Enel. Al 2006, Telefònica va perdre les dues llicències, en el cas suís per no haver fet el desenvolupament necessari d'infraestructures.
http://www.foroteleco.com/telefonica-umts-italia/
http://www.laflecha.net/canales/moviles/noticias/200604151

Model d'una subhasta amb valoracions comunes amb dos licitadors
Suposem que l'objecte que se subhasta pot tenir dos valors, un d'alt v_a i un altre de baix v_b. Hi ha dos licitadors, 1 i 2. Cada $i \in \{1, 2\}$ pot rebre un senyal w_i consistent en un valor de l'interval [0, 1]. Els senyals són realitzacions de variables aleatòries independents i uniformement distribuïdes sobre [0, 1]. Específicament, per a $w \in [0, 1]$, la probabilitat $p(w, v_a)$ que el valor de l'objecte sigui alt quan es rep el senyal w és w mateix: per a tot $w \in [0, 1]$, $p(w, v_a) = w$. En conseqüència, per a $w \in [0, 1]$, $p(w, v_b) = 1 - w$.

El senyal w serà informatiu mentre $w \neq ½$. La raó és que l'esperança d'una variable aleatòria uniformement distribuïda sobre [0, 1] és ½ (la intuïció d'aquest resultat és que si es prenen aleatòriament valors de l'interval [0, 1], la mitjana dels valors serà ½). Això significa que, abans de rebre el senyal, la probabilitat que l'objecte tingui un valor alt és ½. Després de rebre el senyal w, aquesta probabilitat passa a ser w. Així, quan s'observa el senyal w, el valor esperat de l'objecte és $v(w) = w \cdot v_a + (1 - w)v_b$.

Regles de licitació d'equilibri d'una subhasta amb valoracions comunes amb dos licitadors
Al model anterior, sigui w_1 el senyal que rep 1 i w_2 el senyal que rep 2. Llavors les regles de licitació (6) constitueixen un equilibri de Nash simètric de la subhasta amb valoracions comunes.

$$B_1(w_1) = v_b + \frac{1}{2}(v_a - v_b)w_1 \quad \text{i} \quad B_2(w_2) = v_b + \frac{1}{2}(v_a - v_b)w_2 \tag{6}$$

Per la simetria de la situació, n'hi ha prou amb considerar el licitador 1 i demostrar que la regla $B_1(w_1) = v_b + \frac{1}{2}(v_a - v_b)w_1$ maximitza el pagament esperat d'1 quan 2 segueix la regla $B_2(w_2) = v_b + \frac{1}{2}(v_a - v_b)w_2$. Passem a calcular la millor resposta b_1 del licitador 1 (quan 1 rep el senyal w_1) a l'oferta que $B_2(w_2)$ que el licitador 2 fa (quan 2 rep el senyal w_2). Si 2 ofereix el preu $B_2(w_2)$, la probabilitat $\pi(b_1)$ que 1 guanyi amb l'oferta b_1 és la probabilitat que $b_1 \geq B_2(w_2) = v_b + (v_a - v_b)w_2/2$. Aïllant w_2, es conclou que $\pi(b_1)$ és la probabilitat que

$$w_2 \leq \frac{2(b_1 - v_b)}{v_a - v_b}.$$

• <u>Cas 1</u>: si $b_1 < v_b$, $\pi(b_1) = 0$. Per definició, $B_2(w_2) \geq v_b$. Per tant, $b_1 < v_b$ implica $b_1 < B_2(w_2)$, de manera que 1 no pot guanyar. Si 1 no pot guanyar, $\pi(b_1) = 0$.

• <u>Cas 2</u>: si $\frac{1}{2}(v_a + v_b) < b_1$, $\pi(b_1) = 1$. El màxim de $B_2(w_2)$ s'assoleix amb $w_2 = 1$. Així, $B_2(1) = v_b + \frac{1}{2}(v_a - v_b) = \frac{1}{2}(v_a + v_b)$. Per consegüent, si $(v_a + v_b)/2 < b_1$, el licitador 1 guanya segur oferint b_1.

• <u>Cas 3</u>: si $v_b \leq b_1 \leq \frac{1}{2}(v_a + v_b)$, $\pi(b_1) = \frac{2(b_1 - v_b)}{v_a - v_b}$. Ara 1 pot guanyar o perdre. Atès que w_2 és la realització d'una variable uniformement distribuïda sobre [0, 1], la probabilitat de guanyar és l'amplada de l'interval $[0, \frac{2(b_1 - v_b)}{v_a - v_b}]$, que és $\frac{2(b_1 - v_b)}{v_a - v_b}$.

La <u>funció d'utilitat esperada</u> $u_1(b_1, w_1)$ del licitador 1 quan fa l'oferta b_1 i rep el senyal w_1 és $u_1(b_1, w_1) = \pi(b_1)\cdot(v(w_1) - b_1)$ on $v(w_1) = w_1\cdot v_a + (1 - w_1)v_b$ és el valor que 1 expecta que tingui l'objecte quan rep el senyal w_1. <u>El màxim d'aquesta funció s'assoleix en el cas 2</u>: en el cas 1, el licitador 1 perd; i en el cas 3, tot i que guanya, podria guanyar oferint menys.

El valor d'$u_1(b_1, w_1)$ quan $v_b \leq b_1 \leq (v_a + v_b)/2w_1$ és $u_1(b_1, w_1) = \frac{2(b_1 - v_b)}{v_a - v_b}\cdot[v(w_1) - b_1]$. Comprova que, derivant respecte de b_1 i igualant a zero, s'arriba a $b_1 = \frac{v(w_1)}{2} = v_b + \frac{1}{2}(v_a - v_b)w_1 = B_1(w_1)$.

Bibliografia

- Aliprantis, Charalambos i Chakrabarti, Subir K. (2000): *Games and Decision Making*, Oxford University Press: Nova York, capítol 6.