El teorema del fill malcriat (*Rotten kid theorem*)

Es tracta d'un resultat degut al Premi Nobel d'Economia de 1992 Gary Stanley Becker, publicat al seu llibre *A Treatise on the Family* (1981)[1].
http://en.wikipedia.org/wiki/Gary_Becker
http://www.hup.harvard.edu/catalog/BECTRR.html

La situació més senzilla té com a protagonistes un pare i el seu fill. El fill pot triar un tipus de conducta c que afecta positivament la seva riquesa x, però que afecta negativament la riquesa X del pare. Es podria pensar, per exemple, que es tracta d'un fill pròdig, fet a la bona vida i que no té més feina que escurar les butxaques del pare.

El pare ha de decidir quin pagament p fa al fill en forma d'herència o llegat. El pagament afecta positivament la riquesa del fill i negativament la riquesa del pare.

Finalment, postulem una funció d'utilitat per a pare i fill. La del fill depèn exclusivament de la seva riquesa $x + p$. La del pare depèn de la seva riquesa $X - p$, però també de la utilitat del fill. Per tant, el fill és egoista i el pare és altruista, en la mesura que, almenys fins a cert punt, es preocupa del benestar del seu fill. El pare ha de decidir quin pagament p fer al fill i el fill ha de decidir quina conducta c seguir.

El següent model representa formalment aquesta situació. Per a una funció del tipus $f(x, y)$, f_x designa la derivada d'f respecte d'x, en tant que f_{xy} designa la derivada d'f_x respecte d'y.

$x(c)$
Funció que expressa la riquesa del fill en termes de la conducta c triada per ell mateix. Suposem que c pertany a algun interval de nombres reals. La funció x és estrictament creixent i estrictament còncava: $x_c > 0$ i $x_{cc} < 0$.

$X(c)$
Funció que expressa la riquesa del pare en termes de la conducta c triada pel fill. La funció x és estrictament decreixent i estrictament còncava: $X_c < 0$ i $X_{cc} < 0$.

u
És la funció d'utilitat del fill. Per a simplificar, aquesta funció només depèn de la riquesa r del fill, on $r = x(c) + p$. La funció u és del tipus $u = u(x(c) + p)$, on u és estrictament creixent i estrictament còncava: $u_r > 0$ i $u_{rr} < 0$.

v
És la funció d'utilitat del pare. S'assumirà que aquesta funció pren la forma, per a algun $\lambda > 0$, $v = U(X(c) - p) + \lambda \cdot u$. La funció U captura la utilitat que el pare obté directament de la seva riquesa $R = X(c) - p$, amb U estrictament creixent i estrictament còncava: $U_R > 0$ i $U_{RR} < 0$. La part $\lambda \cdot u$ representa la utilitat que el pare obté a través de la utilitat del fill. El fet que $\lambda > 0$ representa l'altruisme del pare, ja que més utilitat del fill implica més utilitat per al pare.

[1] Es pot accedir a una previsualització incompleta del llibre aquí.

• L'objectiu del pare és $\underset{\textit{respecte de } p}{\textit{maximitzar}} \quad U(X(c) - p) + \lambda \cdot u(x(c) + p).$

Derivant respecte de p i igualant a zero s'obté la condició de primer ordre: $-U_p + \lambda u_p = 0$. Aquesta condició permet determinar el valor òptim de p en funció de c, de forma que l'equació $-U_p + \lambda u_p = 0$ defineix implícitament una funció $p = p(c)$.

Expressem la condició de primer ordre com a $U_p = \lambda u_p$. Més específicament, atesa la relació entre la p òptima i c,

$$U_p(X(c) - p(c)) = \lambda \cdot u_p(x(c) + p(c)).$$

Derivem tots dos costats respecte de c. El resultat és, aplicant la regla de la cadena,

$$U_p(X_c - p_c) = \lambda \cdot u_p(x_c + p_c).$$

D'aquí,

$$U_pX_c - U_pp_c = \lambda u_px_c + \lambda u_pp_c.$$

Aïllant p_c,

$$p_c = \frac{U_{pc}X_c - \lambda u_{pc}x_c}{U_{pc} + \lambda u_{pc}}. \tag{1}$$

• L'objectiu del fill és $\underset{\textit{respecte de } c}{\textit{maximitzar}} \quad u(x(c) + p(c))$

on s'assumeix que <u>el fill coneix la relació que hi ha entre el pagament p del pare i la seva conducta c</u>.

Derivant respecte de c (emprant la regla de la cadena) i igualant a zero s'obté la condició de primer ordre: $u_c(x_c + p_c) = 0$. Per la hipòtesi que u és estrictament creixent, $u_c \neq 0$. D'aquí se segueix (2).

$$x_c + p_c = 0 \tag{2}$$

Inserint (1) en (2),

$$0 = x_c + \frac{U_{pc}X_c - \lambda u_{pc}x_c}{U_{pc} + \lambda u_{pc}} = \frac{U_{pc}x_c + \lambda u_{pc}x_c + U_{pc}X_c - \lambda u_{pc}x_c}{U_{pc} + \lambda u_{pc}} = \frac{U_{pc}}{U_{pc} + \lambda u_{pc}}(x_c + X_c).$$

Per la concavitat estricta d'U, $U_{pc} \neq 0$. Així que la combinació d'(1) i (2) implica $x_c + X_c = 0$.

Recapitulem. El fill tria c per a maximitzar la seva pròpia utilitat, que depèn només de la seva pròpia riquesa. Però si el fill tria c tenint present la reacció del pare a la seva elecció de c, llavors resulta que tria un valor de c que satisfà $x_c + X_c = 0$, que és, ves per on, la condició de maximització de la suma $x(c) + X(c)$ de les riqueses de fill i pare! Així que <u>l'egoista fill es torna benevolent escollint una conducta que maximitza la riquesa conjunta de fill i pare</u>.

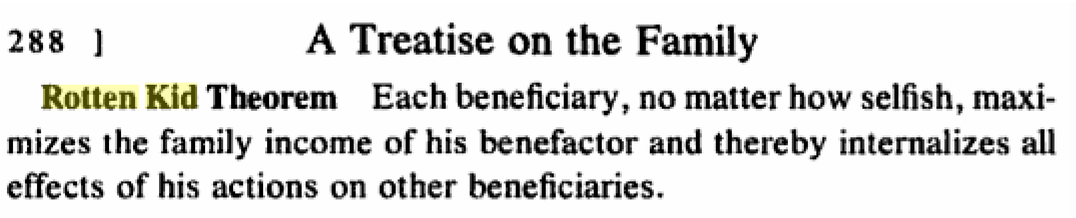
Teorema del fill malcriat

En el model descrit anteriorment, on el pare tria p després que el fill triï c i sabent què ha triat el fill, el fet que el fill sigui egoista no impedeix que, a la pràctica, actuï benevolentment, tractant de maximitzar una funció que depèn tant de la seva pròpia riquesa com de la riquesa del pare.

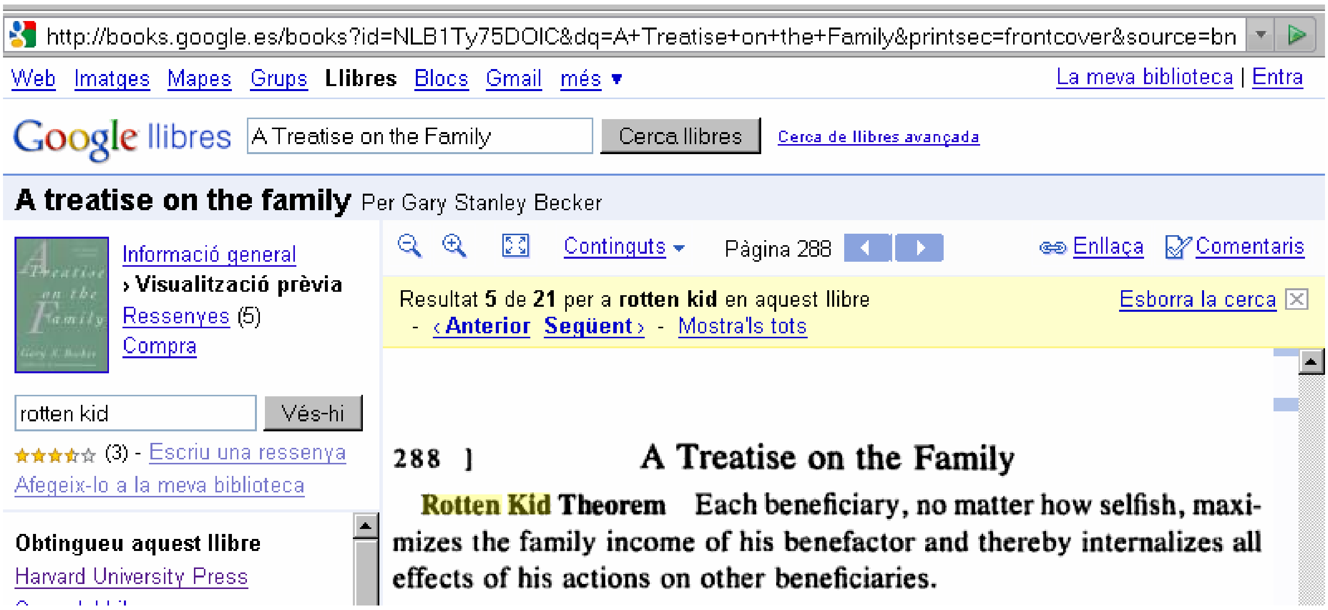
Una interpretació del teorema és que, en les condicions descrites i amb les hipòtesis assumides, l'altruisme del pare és capaç de neutralitzar l'egoisme del fill, si el premi al fill s'atorga en el moment oportú (després de conèixer la conducta del fill). Com a exemple d'una relació principal-agent (pare i fill), el resultat mostra com és possible que el pare indueixi el fill a actuar en benefici col·lectiu, malgrat la seva intenció d'actuar en benefici exclusivament propi. El pagament del pare es podria interpretar com l'incentiu (que dóna el principal) per a què el fill (l'agent) triï la conducta apropiada.

Des del punt de vista del disseny de mecanismes, el teorema suggereix que els pares haurien de retardar al màxim les donacions (herències) als fills. En cas contrari, els fills perden l'incentiu a seguir una conducta benevolent (beneficiosa pels interessos globals de la família): si el pagament es rep abans de decidir la conducta, aquesta es troba lliure de condicionants i res no indueix els fills a actuar en benefici de la família.

El teorema anterior s'estén al cas que el fill tingui germans. La formulació de Becker es reprodueix a continuació.


288] A Treatise on the Family

Rotten Kid Theorem Each beneficiary, no matter how selfish, maximizes the family income of his benefactor and thereby internalizes all effects of his actions on other beneficiaries.



Més a http://en.wikipedia.org/wiki/Rotten_kid_theorem.