# Exemple sobre el Teorema de Kuhn

Considera el joc seqüencial *G* amb memòria perfecta (i informació imperfecta) de la Fig. 1. El joc de la Fig. 2 és la seva representació com a joc simultani.

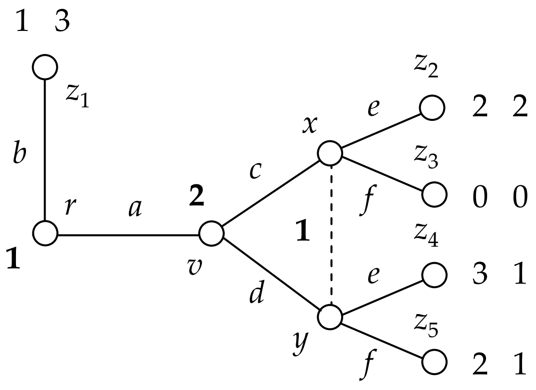


Fig. 1

| | | **2** | |
|---|---|---|---|
| | | *c* | *d* |
| **1** | *ae* | 2 2 | 3 1 |
| | *af* | 0 0 | 2 1 |
| | *be* | 1 3 | 1 3 |
| | *bf* | 1 3 | 1 3 |

Fig. 2

El <u>Teorema de Kuhn</u> estableix que, en tot joc amb memòria perfecta, el pagament esperat que cada jugador *i* obté del vector σ d'estratègies mixtes σ coincideix amb el pagament esperat que *i* obté del vector β d'estratègies de comportament que representen les estratègies mixtes de σ.

**Estràtegia mixta → Estràtegia de comportament**

Il·lustrem el teorema amb el vector d'estratègies mixtes $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ tal que $\sigma_1(ae) = \frac{5}{12}$, $\sigma_1(af) = \frac{4}{12}$, $\sigma_1(be) = \frac{2}{12}$, $\sigma_1(bf) = \frac{1}{12}$ i $\sigma_2(c) = \frac{1}{2}$. Primer trobem les estratègies de comportament $\beta_1$ i $\beta_2$ que representen aquestes estratègies mixtes. Per al cas del jugador 2 és fàcil: <u>atès que només té un conjunt d'informació, les estratègies mixtes i les de comportament coincideixen</u>. Per tant, $\beta_2 = \sigma_2$: l'estratègia mixta $\sigma_2(c) = \frac{1}{2}$ ja diu al jugador 2 què ha de fer en cada conjunt d'informació.

En canvi, l'estratègia mixta $\sigma_1$ no diu què ha de fer el jugador 1 en cadascun dels seus conjunts d'informació. Considerem primer el conjunt d'informació {*r*}. Es tracta de determinar quines són les probabilitats de triar *a* i de triar *b* que estan embotides a $\sigma_1$.

Comencem per l'acció *a*. El primer pas consisteix a determinar quines estratègies pures del jugador 1 són compatibles amb el conjunt d'informació {*r*}. Una estratègia pura d'1 és <u>compatible</u> amb {*r*} si existeix alguna estratègia pura del jugador 2 que fa que la probabilitat d'arribar al conjunt d'informació {*r*} sigui positiva. Però atès que *r* és l'arrel, la probabilitat d'arribar a *r* és 1: el joc comença allà. En conseqüència, totes les estratègies del jugador 1 són compatibles amb {*r*}. El primer pas culmina sumant les probabilitats que $\sigma_1$ assigna a totes les estratègies pures d'1 compatibles amb {*r*}. Atès que totes són compatibles i que $\sigma_1$ és una distribució de probabilitat sobre el total d'estratègies pures d'1, la suma de les probabilitats de les estratègies pures d'1 que són compatibles amb {*r*} és 1.

El segon pas consisteix a identificar, entre les estratègies pures d'1 compatibles amb {*r*}, aquelles on es juga *a* i sumar les probabilitats d'aquestes estratègies a $\sigma_1$. Les estratègies compatibles on es juga $a$ són $ae$ i $af$. La suma de les probabilitats és $\sigma_1(ae) + \sigma_1(af) = 5/12 + 4/12 = 3/4$. La probabilitat $\beta_1(a)$ que l'estratègia de comportament que representa $\beta_1$ atribueix a l'acció $a$ és el quocient entre el segon valor trobat, ¾, i el primer, 1. Així, $\beta_1(a) = 3/4$. Per definició, una estratègia de comportament especifica una distribució de probabilitat sobre les accions del conjunt d'informació $\{r\}$. Com que $\beta_1(a) = 3/4$, resulta que $\beta_1(b) = 1/4$. Ja tenim la distribució de probabilitat que l'estratègia de comportament $\beta_1$ que representa l'estratègia mixta $\sigma_1$ assigna al conjunt d'informació $\{r\}$ (per a més claredat, es podria haver escrit $\beta_{1r}(a) = 3/4$ i $\beta_{1r}(b) = 1/4$, per a emfasitzar que estem indicant la randomització al conjunt d'informació $\{r\}$).

Ara cal fer el mateix al segon conjunt d'informació $h = \{x, y\}$ del jugador 1. Prenguem l'acció $e$. Les estratègies pures d'1 compatibles amb $h$ són només dues : $ae$ i $af$ (perquè si es tria $b$ a l'arrel, no hi ha manera d'assolir el conjunt d'informació $h$). La suma de les probabilitats d'aquestes estratègies, segons $\sigma_1$, és $\sigma_1(ae) + \sigma_1(af) = 5/12 + 4/12 = 3/4$. Com que estem considerant l'acció $e$, cal seleccionar (entre les estratègies pures compatibles amb $h$) aquelles on es tria $e$. Només n'hi ha una: $ae$. La seva probabilitat, segons $\sigma_1$, és $\sigma_1(ae) = 5/12$. D'aquí, $\beta_1(e) = 5/12 \,/\, 3/4$ : la proporció de probabilitat dels casos on es juga $e$ respecte del total de casos compatibles amb $h$. En suma, $\beta_1(e) = 5/12 \,/\, 3/4 = 5/9$ i $\beta_1(f) = 1 - \beta_1(e) = 4/9$. Recapitulant: l'estratègia de comportament $\beta_1 = (\beta_{1r}, \beta_{1h})$, on $h$ és el segon conjunt d'informació del jugador 1, que representa l'estratègia mixta $\sigma_1$ satisfà $\beta_{1r}(a) = 3/4$, $\beta_{1r}(b) = 1/4$, $\beta_{1h}(e) = 5/9$ i $\beta_{1h}(f) = 4/9$.

> **Exercici 1.** Als càlculs anteriors, no ha jugat cap paper la manera en què es distribueix la probabilitat restant $1 - [\sigma_1(ae) + \sigma_1(af)]$ entre $be$ i $bf$. Comprova que $\sigma_1$ té la mateixa representació com a estratègia de comportament que l'estratègia mixta $\tau_1$ tal que $\tau_1(ae) = \sigma_1(ae)$, $\tau_1(af) = \sigma_1(af)$, $\tau_1(be) = 1/12$ i $\tau_1(bf) = 2/12$.

Comparem els pagaments dels jugadors que juguen $\sigma$ amb els pagaments que juguen $\beta$. Els pagaments de jugar $\sigma$ es determinen a la representació com a joc simultani. Per exemple, per al jugador 1, si $\sigma_1(ae) = 5/12$, $\sigma_1(af) = 4/12$, $\sigma_1(be) = 2/12$, $\sigma_1(bf) = 1/12$ i $\sigma_2(c) = 1/2$ aleshores el pagament esperat d'1 és el pagament esperat de triar $ae$ $(2 \cdot 5/12 \cdot 1/2 + 3 \cdot 5/12 \cdot 1/2)$ més el pagament esperat de triar $af$ $(0 \cdot 4/12 \cdot 1/2 + 2 \cdot 4/12 \cdot 1/2)$ més el pagament esperat de triar $be$ $(1 \cdot 2/12 \cdot 1/2 + 1 \cdot 2/12 \cdot 1/2)$ més el pagament esperat de triar $bf$ $(1 \cdot 1/12 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/12 \cdot 1/2)$. Total: $39/24$.

Els pagaments de jugar $\beta$ es determinen al propi joc seqüencial. Novament per al jugador 1, si $\beta_{1r}(a) = 3/4$, $\beta_{1r}(b) = 1/4$, $\beta_{1h}(e) = 5/9$, $\beta_{1h}(f) = 4/9$ i $\beta_2(c) = \beta_2(d) = 1/2$ aleshores el pagament esperat d'1 és el pagament 1 obtingut al node terminal $z_1$ per la probabilitat d'arribar a $z_1$ $(1 \cdot \beta_{1r}(b) = 1 \cdot 1/4)$ més el pagament 2 obtingut al node terminal $z_2$ per la probabilitat d'arribar a $z_2$ $(2 \cdot \beta_{1r}(a) \cdot \beta_2(c) \cdot \beta_{1h}(e) = 2 \cdot 3/4 \cdot 1/2 \cdot 5/9)$ més el pagament 0 obtingut al node terminal $z_3$ per la probabilitat d'arribar a $z_3$ $(0 \cdot \beta_{1r}(a) \cdot \beta_2(c) \cdot \beta_{1h}(f) = 0 \cdot 3/4 \cdot 1/2 \cdot 4/9)$ més el pagament 3 obtingut al node terminal $z_4$ per la probabilitat d'arribar a $z_4$ $(3 \cdot \beta_{1r}(a) \cdot \beta_2(d) \cdot \beta_{1h}(e) = 3 \cdot 3/4 \cdot 1/2 \cdot 5/9)$ més el pagament 2 obtingut al node terminal $z_5$ per la probabilitat d'arribar a $z_5$ $(2 \cdot \beta_{1r}(a) \cdot \beta_2(d) \cdot \beta_{1h}(f) = 2 \cdot 3/4 \cdot 1/2 \cdot 4/9)$. Total: $39/24$. Això significa que al jugador 1 tant li fa jugar $\sigma_1$ que jugar $\beta_1$: n'obté el mateix pagament esperat.

> **Exercici 2.** Comprova que el jugador 2 obté el mateix pagament esperat quan es juga $\sigma$ al joc de la Fig. 1 que quan es juga $\beta$ al joc de la Fig. 2.

**Estràtegia de comportament → Estràtegia mixta**

El procediment per a passar d'una estratègia de comportament a una de mixta és immediat: <u>la probabilitat que la mixta assigna a l'estratègia *s* d'un jugador és el producte de les probabilitats que la de comportament atribueix a les accions que formen *s*</u>.

Per exemple, partim de l'estratègia de comportament obtinguda abans per al jugador 1: $\beta_{1r}(a) = 3/4$, $\beta_{1r}(b) = 1/4$, $\beta_{1h}(e) = 5/9$ i $\beta_{1h}(f) = 4/9$. Aleshores, l'estratègia mixta $\tau_1$ que representa l'estratègia de comportament $\beta_1$ satisfà el següent: $\tau_1(ae) = \beta_{1r}(a) \cdot \beta_{1h}(e) = 3/4 \cdot 5/9 = 15/36$; $\tau_1(af) = \beta_{1r}(a) \cdot \beta_{1h}(f) = 3/4 \cdot 4/9 = 12/36$; $\tau_1(be) = \beta_{1r}(b) \cdot \beta_{1h}(e) = 1/4 \cdot 5/9 = 5/36$; i $\tau_1(bf) = \beta_{1r}(b) \cdot \beta_{1h}(f) = 1/4 \cdot 4/9 = 4/36$.

> **Exercici 3.** Comprova que l'estratègia de comportament que representa l'estratègia mixta $\tau_1$ és $\beta_1$.

Per l'Exercici 3 i pel Teorema de Kuhn, jugar $(\beta_1, \beta_2)$ proporciona a cada jugador el mateix pagament esperat que jugar $(\tau_1, \sigma_2) = (\tau_1, \beta_2)$.

> **Exercici 4.** Verifica que el pagament esperat del jugador 1 a la jugada $(\beta_1, \beta_2)$ és el mateix que el seu pagament esperat a la jugada $(\tau_1, \sigma_2)$.