Equilibri general de mercats competitius

Representació d'una economia de bescanvi $n \times m$

Sigui $\mathbb{R}_+$ el conjunt de nombres reals no negatius. Sigui $\mathbb{R}_+^m$ el conjunt de tots els vectors m-dimensionals els components dels quals són nombres reals no negatius. Un membre $x = (x_1, \ldots , x_m)$ del conjunt $\mathbb{R}_+^m$ s'anomena lot (de mercaderies). Per a $x \in \mathbb{R}_+^m$, x_k representa la quantitat de la mercaderia k que hi ha al lot. Una economia de bescanvi $n \times m$ consisteix en:

- un conjunt d'n consumidors;
- un conjunt d'm mercaderies;
- per a cada consumidor i, una funció d'utilitat $u_i : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$;
- per a cada consumidor i, un lot de dotacions de mercaderies $w_i \in \mathbb{R}_+^m$.

La interpretació és que $\mathbb{R}_+^m$ representa l'espai de consum de l'economia, això és, les quantitats de cadascuna de les m mercaderies que es poden consumir. Per a tot $x \in \mathbb{R}_+^m$, $u_i(x)$ mesura la utilitat que el consumidor i obté consumint el lot x. El lot de dotacions w_i representa la riquesa (*wealth*) del consumidor i: el llistat de les quantitats de cada mercaderia de què disposa el consumidor i. Els consumidors poden intercanviar entre si les mercaderies de què disposen. El propòsit del model d'una economia de bescanvi consisteix a determinar amb quins lots de mercaderies és previsible que acabin els consumidors a resultes del procés d'intercanvi de mercaderies. Per tant, el model d'una economia de bescanvi pretén analitzar una activitat econòmica específica: l'intercanvi de mercaderies.

L'enfocament no cooperatiu: Marie-Esprit-Léon Walras (1834-1910)

http://en.wikipedia.org/wiki/Walras

L'enfocament no cooperatiu de l'anàlisi de l'intercanvi s'atribueix a l'economista francès Léon Walras. Aquest enfocament estudia el problema de l'intercanvi de mercaderies mitjançant un mecanisme descentralitzat d'intercanvi basat en l'ús d'un sistema de preus. La idea és que l'intercanvi de cada mercaderia té lloc en un mercat on les decisions de comprar i vendre la mercaderia es fan en funció del preu de la mercaderia. Cadascun d'aquests mercats s'assumeix competitiu, la qual cosa vol dir que cada agent que hi participa pren el preu de la mercaderia com a donat.

Els preus de les mercaderies permeten atribuir un valor a la dotació de cada consumidor. Prenent aquest valor com a renda, cada consumidor selecciona un lot: (i) que no costi més que la seva renda; i (ii) que maximitzi la seva utilitat. Per tant, un consumidor no necessita conèixer més que els preus de les mercaderies per a decidir quin lot vol aconseguir. Atès que cada consumidor actua independentment dels altres, l'enfocament és no cooperatiu: cada consumidor maximitza la seva utilitat sense haver-se de preocupar de quins lots volen aconseguir els altres consumidors. El sistema de preus és l'únic instrument per a coordinar les decisions que prenen descentralitzadament els consumidors. Un sistema de preus que fa possible que, als preus donats, tots els consumidors aconsegueixin els lots desitjats s'anomena sistema de preus d'equilibri. La qüestió fonamental de l'anàlisi de l'intercanvi de mercaderies seguint l'enfocament no cooperatiu és si, i en quines condicions, existeix un sistema de preus d'equilibri.

L'enfocament cooperatiu: Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926)

http://en.wikipedia.org/wiki/Francis_Ysidro_Edgeworth · Lluís Barbé sobre Edgeworth

L'enfocament cooperatiu de l'anàlisi de l'intercanvi s'atribueix a l'economista irlandès Francis Edgeworth. Aquest enfocament estudia el problema de l'intercanvi de mercaderies mitjançant un mecanisme centralitzat de redistribució de les dotacions basat en la formació de coalicions de consumidors. La idea és que els consumidors formen coalicions i, dins cada coalició, fan propostes del repartiment de la dotació total que té la coalició. La solució del problema de l'intercanvi passa per identificar aquells repartiments que siguin estables. Un repartiment és estable si no hi ha cap coalició i una proposta de redistribució de la dotació de la coalició entre els seus membres que faci que cada membre de la coalició rebi un lot més preferit que el que aconsegueix al repartiment inicial. Vista l'economia com un joc cooperatiu, els repartiments estables són aquells que pertanyen al cor de l'economia.

Relació entre els dos enfocaments

El propòsit d'aquest tema és doble. D'una banda, presentar els resultats fonamentals de cadascun dels dos enfocaments. D'una altra, relacionar-los. La conclusió més important és que, en determinades circumstàncies, els dos enfocaments produeixen el mateix resultat. En primer lloc, es comprovarà que el repartiment de mercaderies que genera un sistema de preus d'equilibri pertany al cor de l'economia. En general, però, el cor pot contenir més repartiments a banda del que genera un sistema de preus d'equilibri. En segon lloc, es definirà un sentit en què tot repartiment del cor s'obté a través d'un sistema de preus d'equilibri: engrandint l'economia (afegint-hi més agents), es pot aconseguir encongir el cor de manera que, parlant imprecisament, cor i equilibri coincideixin.

En economies "grans" té sentit la hipòtesi del comportament competitiu dels consumidors. De fet, com més consumidors hi hagi a l'economia, menys capacitat d'influència sobre els preus de les mercaderies tindrà cada consumidor. La coincidència dels dos enfocaments en economies grans significa que amb un sistema de preus operant en mercats competitius es pot obtenir descentralitzadament el mateix resultat que es pot obtenir quan tothom pot contactar amb tothom per a formar coalicions d'intercanvi. L'enfocament cooperatiu és més costós de fer funcionar, perquè cadascú hauria de considerar l'opció de formar part de cada possible coalició i, com a mínim, això requereix tenir informació sobre la dotació de tots els altres consumidors. En economies amb milers de consumidors, aquest mecanisme seria impracticable: caldria saber de què disposa cadascun dels milers de consumidors i considerar el millor repartiment a cadascuna de les coalicions que es podrien formar. Per exemple, només amb 10 consumidors, cada consumidor podria formar part de $2^9 = 512$ coalicions. Amb 100 consumidors, les coalicions a considerar serien 1.267.650.600.228.229.401.496.703.205.376 $= 1'267 \times 10^{30}$. En canvi, amb l'enfocament no cooperatiu, l'única informació que han de rebre els consumidors és el sistema de preus, sense que calgui cap interacció entre ells[1].

[1] La massa del Sol, per comparació, s'estima al voltant de $1'98 \times 10^{30}$ quilògrams. L'estrella més propera al Sol, Proxima Centauri, es troba a uns 40.142.174.400.000 quilòmetres o 4'243 anys llum. Si s'assumeix que l'univers té una vida d'uns 15 mil milions anys, el diàmetre de l'univers està al voltant d'uns 141.912.000.000.000.000.000.000 $= 0'141 \times 10^{24}$ quilòmetres $= 0'141 \times 10^{27}$ metres. Així que si escrivim en una pissarra d'un metre de llarg els membres de cada coalició i alineem les pissarres de cada coalició, no hi hauria prou espai a l'univers per a contenir la cua de pissarres.

El model d'intercanvi de Walras
El model complementa la descripció d'una economia de bescanvi $n \times m$ amb dues hipòtesis. Primera, per a cada mercaderia hi ha un mercat competitiu on es determina un únic preu de la mercaderia. Segona, cada consumidor pren els preus de les mercaderies com a donats (consumidor competitiu o preuacceptant) i escull un lot que li maximitza la funció d'utilitat entre el conjunt de lots que no valen més (als preus donats de les mercaderies) que el lot que representa la dotació del consumidor.

La solució del model consisteix a especificar dos elements. Primer, un preu per a cada mercaderia. Aquest sistema de preus ha de ser tal que, per a cada mercaderia, la quantitat que volen comprar els consumidors és igual a la quantitat disponible de la mercaderia. I, segon, els lots que cada consumidor adquiriria a aquells preus. El primer element és un sistema de preus d'equilibri. El segon, és el repartiment de les mercaderies generat pel sistema de preus d'equilibri. A continuació es descriu com obtenir aquesta solució.

Sistema de preus d'una economia
Un sistema de preus és un vector m-dimensional $p \in \mathbb{R}_+^m$ tal que cada component del vector és el preu d'una de les mercaderies. Un sistema de preus positius és un sistema de preus on els preus de totes les mercaderies és positiu.

Valor d'un lot
Suposem que els membres del conjunt $\{1, 2, \ldots, m\}$ són els noms de les m mercaderies. Donat el sistema de preus $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, el valor del lot $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ és la suma $p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + \ldots + \xi_m p_m$ dels productes de cada quantitat ξ_k del lot pel seu preu p_k. Per a abreujar, $p \cdot \xi$ s'escriurà en comptes de $p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + \ldots + \xi_m p_m$.

Conjunt de lots factibles a partir d'un lot
Sigui ξ un lot i p un sistema de preus. El conjunt $F(\xi, p)$ de lots factibles donat p i ξ és el conjunt $\{\xi' \in \mathbb{R}_+^m\colon p \cdot \xi' = p \cdot \xi\}$ de tots els lots que tenen un valor igual o inferior a ξ. La interpretació és que, donat el sistema de preus p, tenir el lot ξ permet aconseguir qualsevol lot a $F(\xi, p)$ mitjançant la venda de lot ξ.

Característiques dels consumidors
Cada consumidor i de l'economia $n \times m$ està exclusivament descrit per dues característiques. Primer, la seva dotació w_i de les m mercaderies, on w_i és un vector m dimensional integrat per nombres reals no negatius[2]. I segon, la seva funció d'utilitat $u_i : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ que assigna un valor numèric $u_i(\xi) \in \mathbb{R}$ a cada lot ξ de mercaderies. Una funció d'utilitat és estàndard si satisfà les propietats CON, MON i QUA que es descriuen a continuació.

[2] Les mercaderies s'entenen homogènies: cada unitat és indistingible d'una altra unitat. A més, les mercaderies estan descrites no només per les seves característiques físiques, sinó per la seva localització en l'espai i el temps. Per exemple, la mercaderia x podria representar litres d'aigua subministrats per Aigües de Reus a la ciutat de Reus el 6 de novembre de 2009. Una ficció útil és suposar que les mercaderies són infinitament divisibles, la qual cosa es podria justificar entenent que el que realment es compra i ven és la propietat de la mercaderia, que teòricament és infinitament divisible.

CON. Continuïtat. La funció u_i és contínua.

La continuïtat diu que si es varia "una mica" la quantitat de mercaderies d'un lot, el valor de la funció d'utilitat també varia només "una mica". Per tant, canvis "petits" en el lot de mercaderies no provoquen canvis "gran" en la utilitat.

MON. Monotonia. La funció u_i és monòtona: si el lot ξ' es diferencia del lot ξ només en què ξ' té més d'una de les mercaderies que ξ, aleshores $u_i(\xi') > u_i(\xi)$.

La monotonia expressa la idea que totes les mercaderies són desitjables: tenir una mica més d'una mercaderia (i no menys de les altres) fa augmentar la utilitat. Per exemple, amb dues mercaderies x i y, la funció $u(x, y) = min\{x, y\}$ és contínua però no monòtona, ja que $u(2, 1) = u(1, 1)$. Les funcions monòtones són gairebé contínues: si triem a l'atzar un lot, la probabilitat que la funció no sigui contínua sobre aquell lot és essencialment zero.

Una combinació convexa de dos lots ξ' i ξ és un lot obtingut prenent, per a algun $0 \leq \lambda \leq 1$, la fracció $\lambda\xi'$ del lot ξ' i combinant-la amb la fracció $(1 - \lambda)\xi$ del lot ξ, resultant així el lot $\lambda\xi' + (1 - \lambda)\xi$. Per exemple, si $\lambda = ⅓$, $\xi' = (9, 3, 6)$ i $\xi = (6, 12, 3)$, aleshores el lot $\lambda\xi' + (1 - \lambda)\xi = ⅓(9, 3, 6) + ⅔(6, 12, 3) = (3, 1, 2) + (4, 8, 2) = (7, 9, 4)$ és una combinació convexa d'ξ' i ξ, obtinguda acumulant la tercera part del lot ξ' amb les dues terceres parts del lot ξ.

QUA. Quasiconcavitat estricta. La funció u_i és estrictament quasicòncava: si $u_i(\xi') \geq u_i(\xi)$, aleshores per a tota combinació convexa ξ'' de ξ' i ξ, $u_i(\xi'') > u_i(\xi)$.

De manera equivalent, u_i és estrictament quasicòncava si, per a tota combinació convexa ξ'' de ξ' i ξ, $u_i(\xi'') > min\{u_i(\xi'), u_i(\xi)\}$. La quasiconcavitat estricta diu que la combinació convexa de dos lots dóna més utilitat que la que dóna el lot amb menys utilitat dels dos combinats.

Sigui u una funció d'utilitat. El conjunt $\{\xi: u(\xi) = k\}$ és el conjunt d'indiferència de nivell k: el conjunt de tots els lots que donen utilitat k. Si u satisfà MON, els conjunts d'indiferència no són "gruixuts", això és, es poden definir mitjançant funcions, les quals són representables mitjaçant corbes. Si, a més de MON, u satisfà CON, les corbes d'indiferència són contínues. I si, a més a més, u satisfà QUA, aleshores la corba d'indiferència que passa per dos lots queda per sota de la recta que uneix els dos lots. En resum, si u satisfà CON, MON i QUA, els conjunts d'indiferència d'u són corbes de la forma .

Problema de decisió dels consumidors

L'objectiu de cada consumidor i és, donat un sistema de preus p i la seva dotació w_i, aconseguir un lot que maximitzi la seva funció d'utilitat u_i entre el conjunt de lots factibles. Per tant, el problema del consumidor i, quan té la dotació w_i de mercaderies, la funció d'utilitat u_i i s'enfronta a un sistema de preus p consisteix en

$$\text{maximitzar } u_i(\xi) \text{ sotmès a } \xi \in F(p, w_i). \tag{1}$$

Solució al problema de decisió dels consumidors
Sigui p un sistema de preus positius, w_i una dotació i u_i una funció d'utilitat que satisfà CON, MON i QUA. Aleshores, el problema (1) té solució i la solució és única.

Funcions de demanda
Fixada una funció d'utilitat estàndard u_i, la funció de demanda d_i del consumidor i assigna a cada parell (p, w_i), format per un sistema de preus p i una dotació w_i, l'únic lot $d_i(p, w_i)$ que és solució del problema (1). Formalment, $d_i(p, w_i) = \xi$ si, i només si, $\xi \in F(p, w_i)$ i $u_i(\xi) \geq u_i(\xi')$ per a tot $\xi' \in F(p, w_i)$.

La funció de demanda d_i tal com s'ha definit anteriorment és una funció de demanda global del consumidor i: diu quant demanda i de cada mercaderia. Així, els valors $d_i(p, w_i)$ d'aquesta funció són vectors m-dimensionals. Per a la mercaderia k, el componenent k del lot $d_i(p, w_i)$ seria la quantitat demandada de la mercaderia k donat el sistema de preus p i la dotació w_i. Per això, per a cada mercaderia k, es pot definir la funció de demanda d_{ik} de la mercaderia k del consumidor i com aquella tal que $d_{ik}(p, w_i)$ és el component k del vector $d_i(p, w_i)$.

Continuïtat de les funcions de demanda
Si u_i és una funció d'utilitat que satisfà CON, MON i QUA, aleshores la funció de demanda d_i és contínua per a tot sistema de preus positius.

Exemple 1 de càlcul de funcions de demanda
En una economia 3 × 2, sigui $u_1(x_1, y_1) = x_1y_1$ la funció d'utilitat del consumidor 1 i $w_1 = (w_{1x}, w_{1y}) = (1, 1)$ la seva dotació. La funció de demanda del consumidor 1 s'obté a partir de les condicions $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} / \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{p_x}{p_y}$ i $p_xx_1 + p_yy_1 = p_xw_{1x} + p_yw_{1y}$, on $w_{1x} = w_{1y} = 1$. Per tant, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{p_x}{p_y}$ i $p_xx_1 + p_yy_1 = p_x + p_y$. De la primera equació resulta $p_xx_1 = p_yy_1$ i, substituint p_yy_1 a la segona, s'obté (2), que és la funció de demanda del consumidor 1 de la mercaderia x. De manera similar s'obté (3), que és la funció de demanda del consumidor 1 de la mercaderia y.

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{p_y}{2p_x} \tag{2}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} + \frac{p_x}{2p_y} \tag{3}$$

Exemple 2 de càlcul de funcions de demanda
En una economia 3 × 2, sigui $u_2(x_2, y_2) = x_2 + y_2$ la funció d'utilitat del consumidor 2 i $w_2 = (w_{2x}, w_{2y}) = (0, 1)$ la seva dotació. Per a l'obtenció de les funcions de demanda de cada mercaderia cal considerar tres casos: $p_x > p_y$, $p_x < p_y$ i $p_x = p_y$.

• Cas 1: $p_x > p_y$. En aquest cas, el consumidor 2 no demandarà res d'x: cada unitat d'x és més cara que cada unitat d'y, però cada unitat d'x proporciona la mateixa utilitat que cada unitat d'y. Per tant, $p_x > p_y$ implica $x_2 = 0$, de forma que el consumidor 2 esmerçarà tot el valor de la seva dotació en bé y. Partint de la restricció pressupostària $p_xx_2 + p_yy_2 = p_xw_{2x} + p_yw_{2y}$ del consumidor 2, si introduïm els valors $x_2 = 0$, $w_{2x} = 0$ i $w_{2y} = 1$, s'arriba a $p_y y_2 = p_y$. Atès que busquem quantitats demandades quan els preus són diferents de zero, $p_y y_2 = p_y$ implica $y_2 = 1$. En resum, si $p_x > p_y$, les funcions de demanda del consumidor 2 són (4) i (5).

$$x_2 = 0 \tag{4}$$
$$y_2 = 1 \tag{5}$$

• Cas 2: $p_x < p_y$. Ara el consumidor 2 no demandarà res d'y. Això fa que la seva funció de demanda d'y sigui (7). Anem a la restricció pressupostària $p_x x_2 + p_y y_2 = p_x w_{2x} + p_y w_{2y}$ i substituïm els valors coneguts: $y_2 = 0$ i $(w_{2x}, w_{2y}) = (0, 1)$. Com a resultat, $p_x x_2 = p_y$. Aïllant x_2, s'arriba a (6), que és la funció de demanda d'x del consumidor 2 quan $p_x < p_y$.

$$x_2 = \frac{p_y}{p_x} \tag{6}$$
$$y_2 = 0 \tag{7}$$

• Cas 3: $p_x = p_y$. Si $p_x = p_y$ el consumidor 2 és indiferent entre tots els lots que pugui adquirir amb el valor $p_x w_{3x} + p_y w_{3y}$ de la seva dotació $(w_{3x}, w_{3y}) = (0, 1)$. Aquest valor és $p_x{\cdot}0 + p_y{\cdot}1 = p_y$. En conseqüència, 2 demandarà qualsevol parell (x_2, y_2) tal que $p_x x_2 + p_y y_2 = p_y$. En tal cas, 2 no té una funció de demanda sinó una correspondència de demanda, perquè, fixats els preus de les mercaderies, molts lots (i no merament un) poden maximitzar la seva funció d'utilitat.

Exemple 3 de càlcul de funcions de demanda

En una economia 3×2, sigui $u_3(x_3, y_3) = min\{x_3, y_3\}$ la funció d'utilitat del consumidor 2 i $w_3 = (1, 0)$ la seva dotació. El fet que $u_3(x_3, y_3) = min\{x_3, y_3\}$ fa que el consumidor sempre demandi la mateixa quantitat de totes dues mercaderies. Per a demostrar aquest resultat, suposem que $x_3 > y_3$. Definim $r = x_3 - y_3$. Això significa que les últimes r unitats d'x no aporten utilitat: si es treuen r unitats d'x, la utilitat es manté igual.

Així que el consumidor 3 podria reternir, per exemple, $r/2$ unitats d'x i canviar les altres $r/2$ unitats per mercaderia y. El resultat seria que, amb l'increment d'y, la utilitat total també s'incrementaria. La conclusió és que amb un lot tal que $x_3 > y_3$ el consumidor no maximitza la seva utilitat. El mateix raonament s'aplicaria al cas $x_3 < y_3$.

Atès que la maximització d'utilitat del consumidor 3 requereix $x_3 = y_3$, les seves funcions de demanda s'obtenen a partir de la seva restricció pressupostària $p_x x_3 + p_y y_3 = p_x w_{3x} + p_y w_{3y}$, on $w_{3x} = 1$ i $w_{3y} = 0$. Amb $x_3 = y_3$, si se substitueix y_3 a la restricció pressupostària, aquesta es transforma en $x_3(p_x + p_y) = p_x$, d'on s'obté (7), la funció de demanda d'x del consumidor 3. Sabent que $x_3 = y_3$, (7) implica (8), que és la funció de demanda d'y del consumidor 3.

$$x_3 = \frac{p_x}{p_x + p_y} \tag{7}$$
$$y_3 = \frac{p_x}{p_x + p_y} \tag{8}$$

Funcions d'excés de demanda agregada

Fixades les dotacions i les funcions d'utilitat dels consumidors (per tant, fixada una economia de bescanvi), la funció d'excés de demanda agregada de la mercaderia k és la diferència entre la suma de les funcions de demanda de la mercaderia k de tots els consumidors menys la suma de la quantitat de mercaderia k que tenen els consumidors com a dotació. En símbols,

$$z_k(p) = \Sigma_{i \in N}\, d_{ik}(w_i, p) - \Sigma_{i \in N}\, w_{ik},$$

on N és el conjunt de consumidors de l'economia, p és un sistema de preus, d_{ik} és la funció de demanda de la mercaderia k del consumidor i i w_{ik} és la quantitat de mercaderia k que hi ha a la dotació del consumidor i.

Quan $z_k(p) > 0$, la quantitat total demandada de la mercaderia k quan el sistema de preus és p resulta ser superior a la quantitat total disponible de mercaderia k. Dit d'una altra manera, $z_k(p) > 0$ significa que hi ha un excés de demanda (agregada) de la mercaderia k. Quan $z_k(p) < 0$ es produeix el contrari: hi ha un excés d'oferta (agregada) de la mercaderia k.

Propietats de les funcions d'excés de demanda agregada

Si les funcions d'utilitat de tots els consumidors satisfan CON, MON i QUA, aleshores, per a tot sistema de preus positius p:

(i) per a tota mercaderia k, la funció z_k és contínua a p;
(ii) per a tota mercaderia k, la funció z_k és homogènia de grau 0; i
(iii) es compleix la llei de Walras.

Que z_k sigui homogènia de grau 0 vol dir que, per a tot p i $\lambda > 0$, $z_k(\lambda p) = z_k(p)$. Aquest resultat se segueix del fet que, per a cada consumidor i, la seva funció de demanda d_{ik} de la mercaderia k també és homogènia de grau 0: si tots els preus es multipliquen per la mateixa constant positiva, aleshores el consumidor continua triant el mateix lot. Per la homogeneïtat de grau 0, els sistemes de preus p i λp són indistingibles pel que fa als seus efectes sobre les demandes i sobre els excessos de demanda: en una economia es produeixen els mateixos intercanvis si amb $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ que amb $\lambda p = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_m)$, on $\lambda > 0$.

Llei de Walras

Sigui M el conjunt de mercaderies. La llei de Walras estableix que, per a tot sistema de preus positius p, $\Sigma_{k \in M}\, p_k \cdot z_k(p) = 0$.

La llei de Walras diu que la suma dels valors dels excessos de demanda (positius o negatius) és zero.

Exemple 1 de càlcul de funcions d'excés de demanda agregada

Sigui l'economia 2×2 tal que: (i) $u_1(x_1, y_1) = x_1y_1$ i $w_1 = (1, 1)$; i (ii) $u_2(x_2, y_2) = x_2y_2 + x_2$ i $w_2 = (1, 0)$. Això fa que la quantitat total w_x de mercaderia x sigui $w_{1x} + w_{2x} = 1 + 1 = 2$ i que la quantitat total d'y sigui $w_y = 1$. Les funcions de demanda del consumidor 1 són (2) i (3). Les del consumidor 2 són (9) i (10).

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{p_y}{2p_x} \tag{9}$$

$$y_2 = \frac{p_x}{2p_y} - \frac{1}{2} \tag{10}$$

La suma de (2) i (9) és la funció de demanda agregada de mercaderia x. L'equació (11) és la funció z_x d'excés de demanda agregada de mercaderia x, que és la funció de demanda agregada d'x menys la dotació total w_x d'x (la dependència de z_x de les dotacions w_1 i w_3 és implícita perquè ja s'han substituït els valors w_{1x} i w_{3x})

$$z_x(p_x, p_y) = x_1 + x_2 - (w_{1x} + w_{2x}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{p_y}{2p_x}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{p_y}{2p_x}\right) - 2 = \frac{p_y}{p_x} - 1 \tag{11}$$

La funció z_y d'excés de demanda agregada de mercaderia y és (12).

$$z_y(p_x, p_y) = y_1 + y_2 - (w_{1y} + w_{2y}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{p_x}{2p_y}\right) + \left(\frac{p_x}{2p_y} - \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{p_x}{p_y} - 1 \tag{12}$$

La llei de Walras estableix $p_x \cdot z_x + p_y \cdot z_y = 0$, amb $p_x \neq 0 \neq p_y$. (13) demostra que es compleix.

$$p_x \cdot z_x + p_y \cdot z_y = p_x\left(\frac{p_y}{p_x} - 1\right) + p_y\left(\frac{p_x}{p_y} - 1\right) = p_y - p_x + p_x - p_y = 0 \tag{13}$$

Exemple 2 de càlcul de funcions d'excés de demanda agregada

Sigui l'economia 2 × 2 tal que: (i) $u_1(x_1, y_1) = x_1 y_1$ i $w_1 = (1, 1)$; i (ii) $u_2(x_2, y_2) = x_2 + y_2$ i $w_2 = (0, 1)$. Ara la funció d'excés de demanda agregada de cada mercaderia està definida per trams.

Si $p_x > p_y$, seguint (2) i (4), $z_x(p_x, p_y) = x_1 + x_2 - w_x = \left(\frac{1}{2} + \frac{p_y}{2p_x}\right) + 0 - 1 = \frac{p_y}{2p_x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_y}{p_x} - 1\right)$. Si $p_x < p_y$, seguint (2) i (6), $z_x(p_x, p_y) = x_1 + x_2 - w_x = \left(\frac{1}{2} + \frac{p_y}{2p_x}\right) + \frac{p_y}{p_x} - 1 = \frac{3p_y}{2p_x} - \frac{1}{2}$. Si $p_x = p_y$, z_x no és una funció, sinó una correspondència, ja que $x_2 = \frac{p_y}{p_x}(1 - y_2)$, on $0 \leq y_2 \leq 1$.

Equilibri d'un mercat

El mercat de la mercaderia k es troba en equilibri amb el sistema de preus positius p si l'excés de demanda agregada de la mercaderia k és zero: $z_k(p) = 0$.

Una implicació de la llei de Walras és que si $m - 1$ mercats es troben en equilibri amb el sistema de preus positius p, aleshores el mercat restant també es troba en equilibri. De fet, suposem que tots els mercats tret del mercat m estan en equilibri. Això vol dir que, per a tot $k \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$, $z_k(p) = 0$. Per la llei de Walras, $p_m \cdot z_m(p) + \Sigma_{k \in M \setminus \{m\}}\, p_k \cdot z_k(p) = 0$. Atès que tots els mercats tret de l'm s'ha assumit en equilibri, $\Sigma_{k \in M \setminus \{m\}}\, p_k \cdot z_k(p) = \Sigma_{k \in M \setminus \{m\}}\, p_k \cdot 0 = 0$. Per tant,

$p_m \cdot z_m(p) = 0$. Per la hipòtesi que p és un sistema de preus positius, $p_m \neq 0$. Així que $z_m(p) = 0$, la qual cosa implica que el mercat de la mercaderia m també està en equilibri.

Per exemple, a l'economia amb funcions d'excés de demanda (11) i (12), suposem que el mercat d'x està en equilibri. Per tant, (11) és zero, la qual cosa implica $p_x = p_y$. Donat aquest resultat, (12) també és zero i, en conseqüència, el mercat d'y també es troba en equilibri.

Sistema de preus d'equilibri d'una economia
El sistema de preus positius p constitueix un sistema de preus d'equilibri d'una economia amb dotacions $w = (w_i)_{i \in N}$ si $\Sigma_{i \in N}\, d_i(w_i, p) = \Sigma_{i \in N}\, w_i$. Per tant, el sistema de preus positius p és un sistema de preus d'equilibri si, i només si, tots els mercats estan en equilibri. Per la llei de Walras, si tots tret d'un estan en equilibri, el darrer mercat també estarà en equilibri.

Assignació de les mercaderies d'una economia
Una assignació en una economia bescanvi $n \times m$ amb dotacions $w = (w_i)_{i \in N}$ és un vector n-dimensional $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_n)$ de lots, un per a cada consumidor, tal que $\Sigma_{i \in N}\, \alpha_i = \Sigma_{i \in N}\, w_i$.

Una assignació és una forma de repartir-se les dotacions de totes les mercaderies entre els consumidors. El vector $(w_i)_{i \in N}$ de dotacions de cada consumidor és una assignació.

Com a il·lustració addicional, sigui una economia 3×3 tal que $w_1 = (2, 1, 0)$, $w_2 = (0, 1, 2)$ i $w_3 = (1, 0, 4)$, on el primer component és la quantitat d'x, el segon la d'y i el tercer la de z. El vector de lots $w = (w_1, w_2, w_3)$ és una assignació. El vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tal que $\alpha_1 = (3, 2, 4)$ i $\alpha_2 = \alpha_3 = (0, 0, 0)$ és una assignació. El vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tal que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = (1, 2/3, 2)$ és una assignació. Els següents vectors β i γ no són assignacions: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = (1, 1, 1)$; i $\gamma_1 = (3, 0, 0)$, $\gamma_2 = (0, 1, 0)$ i $\gamma_3 = (0, 0, 4)$ no és una assignació.

Distribució d'equilibri (general) d'una economia (o equilibri walrasià)
Fixades les funcions d'utilitat dels consumidors, una assignació α d'una economia amb dotacions w és una assignació d'equilibri si existeix un sistema de preus p d'equilibri tal que, per a tot consumidor i, $d_i(w_i, p) = \alpha_i$. Sigui $E(w)$ el conjunt d'assignacions d'equilibri d'una economia amb dotacions w.

Existència de l'equilibri d'una economia
Sigui una economia bescanvi $n \times m$ tal que:

- *(i)* *la funció d'excés de demanda de cada mercaderia existeix i és contínua per a tot sistema de preus positius;*
- *(ii)* *es compleix la llei de Walras; i*
- *(iii)* *si $\{p^t\}_{t=1}^{\infty}$ és una seqüència de sistemes de preus positius que convergeix a un sistema de preus p tal que, per a alguna mecaderia k, $p_k = 0$, llavors la seqüència $\{z_k(p^t)\}_{t=1}^{\infty}$ d'excessos de demanda agregada de la mercaderia k tendeix cap a infinit.*

Aleshores existeix un sistema de preus d'equilibri de l'economia. Si les funcions d'utilitat de tots els consumidors satisfan CON, MON i QUA, i si la suma de les dotacions de cada mercaderia és positiva, aleshores (i), (ii) i (iii) se satisfan.

La condició (iii) assegura que si el preu d'una mercaderia k s'apropa a zero, aleshores la demanda agregada de k (i, per tant, l'excés de demanda agregada de k) és arbitràriament gran. *Grosso modo*, (iii) diu: "preu zero d'una mercaderia, demanda infinita de la mercaderia". D'altra banda, queda garantida l'existència d'algun equilibri si: (i) per a tota mercaderia k, $\Sigma_{i\in N}\ w_{ik} > 0$; i (ii) per a tot consumidor i, u_i satisfà CON, MON i QUA. Es presenta a continuació una demostració de l'existència de l'equilibri per a economies amb dues mercaderies. Per a simplificar la prova, s'ha afegit una hipòtesi més: homogeneïtat de grau 0.

Existència d'equilibri walrasià en economies $n \times 2$

Existeix un equilibri general en una economia $n \times 2$ si les funcions d'excés de demanda agregada de cada mercaderia:

- *(i) són contínues;*
- *(ii) satisfan la llei de Walras;*
- *(iii) quan el preu de qualsevol de les mercaderies tendeix a zero, l'excés de demanda agregada d'aquesta mercaderia tendeix a infinit; i*
- *(iv) són homogènies de grau zero.*

Demostració. Cal provar l'existència de (p_x, p_y) tal que $z_x(p_x, p_y) = z_y(p_x, p_y) = 0$.

• Pas 1: Per (ii), per a tot (p_x, p_y), $p_x\, z_x(p_x, p_y) + p_y\, z_y(p_x, p_y) = 0$.

• Pas 2. Es dedueix de (iv) que, per a tot (p_x, p_y), existeix un p_x' tal que $z_x(p_x, p_y) = z_x(p_x', 1 - p_x') =: Z_x(p_x')$. Això significa que els preus poden ser normalitzats, suposant que $p_x + p_y = 1$, sense que es modifiqui la funció d'excés de demanda d'x. Com a resultat d'això, podem suposar que la funció d'excés de demanda d'x només depèn del preu d'x.

• Pas 3. La mateixa conclusió del pas 2 val per a z_y i, a més, per a un mateix vector de preus (p_x, p_y), un mateix p_x' fa que $z_x(p_x, p_y) = z_x(p_x', 1 - p_x')$ i que $z_y(p_x, p_y) = z_y(p_x', 1 - p_x') =: Z_y(p_x')$.

• Pas 4. Pels tres passos anteriors, per a tot p_x, $p_xZ_x(p_x) + (1 - p_x)Z_y(p_x) = 0$.

• Pas 5: existeix un p_x^* tal que $Z_x(p_x^*) = 0$. Per (iii), si $p_x \to 0$ aleshores $Z_x(p_x) \to \infty$. Per tant, per (i) i el pas 2, existeix $0 < p_x < 1$ tal que $Z_x(p_x) > 0$. Si $p_x \to 1$, per la condició que $p_y = 1 - p_x$, es conclou que $p_y \to 0$. Així, per (iii) i el pas 3, existeix $0 < p_x < 1$ tal que $Z_y(p_x) > 0$. Per la llei de Walras, $Z_y(p_x) > 0$ i $p_x > 0$ impliquen $Z_x(p_x) < 0$. En suma, per a algun valor de p_x, $Z_x(p_x) > 0$ i, per a algun altre valor de p_x, $Z_x(p_x) < 0$. Per (i) i el teorema del valor mitjà, existeix un p_x^* entre 0 i 1 tal que $Z_x(p_x^*) = 0$.

• Pas 6: si $Z_x(p_x^*) = 0$ i $p_x^* > 0$ aleshores $Z_y(p_x^*) = 0$.■

Exemple de càlcul de l'equilibri d'una economia

Sigui l'economia 3×2 tal que: (i) $u_1(x_1, y_1) = x_1y_1$ i $w_1 = (1, 1)$; (ii) $u_2(x_2, y_2) = x_2 + y_2$ i $w_2 = (0, 1)$; i (iii) $u_3(x_3, y_3) = min\{x_3, y_3\}$ i $w_3 = (1, 0)$. Les funcions de demanda són (2)–(8). Les condicions d'equilibri dels dos mercats són (14) i (15).

$$x_1 + x_2 + x_3 = w_{1x} + w_{2x} + w_{3x} = 1 + 0 + 1 = 2 \tag{14}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = w_{1y} + w_{2y} + w_{3y} = 1 + 1 + 0 = 2 \quad (15)$$

Per la llei de Walras, (14) es compleix si, i només si, (15) es compleix. Això vol dir que només una de les dues condicions entre (14) i (15) és útil. Fem servir la condició (14). La funció de demanda d'x del consumidor 2 determina tres casos.

• Cas 1: $p_x < p_y$. En aquest cas, $x_2 = 0$. Així que substituint (1), (3) i (7) a la condició (14), s'obté $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{p_y}{p_x}+0+\frac{p_x}{p_x+p_y}=2$. Per tant, $\frac{1}{2}\frac{p_y}{p_x}+\frac{p_x}{p_x+p_y}=\frac{3}{2}$. Aquesta condició és equivalent a $\frac{1}{2}\frac{p_y}{p_x}+\frac{1}{1+\frac{p_y}{p_x}}=\frac{3}{2}$. Definint $p^* = \frac{p_y}{p_x}$, tenim $\frac{1}{2}p^*+\frac{1}{1+p^*}=\frac{3}{2}$, que equival a $p^* + \frac{2}{1+p^*}=3$. Multiplicant tot per $(1 + p^*)$, s'arriba a $p^{*2} - 2p^* - 1 = 0$. Resolent per al valor positiu de p^*, s'obté $p^* = 1 + \sqrt{2}$. Sabent que $\frac{p_y}{p_x} = 1 + \sqrt{2}$, (1) dicta que $x_1 = 1 + \sqrt{½}$, en tant que, per (7), $x_3 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4-2} = 1 - \sqrt{½}$.

D'altra banda, $\frac{p_y}{p_x} = 1 + \sqrt{2}$ implica $\frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2} - 1$. Sabent això, (2), (4) i (8) permeten determinar les quantitats demandades d'y: $y_1 = \sqrt{½}$, $y_2 = 1$ i $y_3 = 1 - \sqrt{½}$. Aquests valors satisfan la condició (15) d'equilibri del mercat d'y, ja que $y_1 + y_2 + y_3 = \sqrt{½} + 1 + 1 - \sqrt{½} = 2 = 1 + 1 + 0 = w_{1y} + w_{2y} + w_{3y}$.

Recapitulant, l'única assignació e d'equilibri, quan $p_x < p_y$, satisfà $e_{1x} = 1 + \sqrt{½}$, $e_{1y} = \sqrt{½}$, $e_{2x} = 0$, $e_{2y} = 1$, $e_{3x} = 1 - \sqrt{½}$ i $e_{3y} = 1 - \sqrt{½}$. Atès que la dotació del consumidor 1 és $w_{1x} = w_{1y} = 1$, el pas de l'assignació w a l'assignació e significa que el consumidor 1 compra $\sqrt{½}$ unitats d'x (comença amb 1 unitat d'x i finalitza amb $1 + \sqrt{½}$) i, a canvi, ven $1 - \sqrt{½}$ unitats d'y (comença amb 1 unitat d'y i acaba amb $\sqrt{½}$). Precisament, la relació de preus d'equilibri $p_y/p_x = 2$ indica que dues unitats d'x s'intercanvien per una unitat d'y (de manera que vendre $1 - \sqrt{½}$ unitats d'y comporta rebre $\sqrt{½}$ d'x, ja que $\sqrt{½}$ és el doble d'$1 - \sqrt{½}$).

Per al consumidor 2, el pas de w a e representa que 2 no participa en l'intercanvi, ja que 2 manté la seva dotació. I per al consumidor 3, el pas de w a e s'interpreta en el sentit que 3 actua com a venedor d'x (comença amb 1 unitat d'x i acaba amb $1 - \sqrt{½}$ unitats) i com a comprador d'y (comença amb 0 unitats d'y i acaba amb $1 - \sqrt{½}$ unitats). De fet, la intepretació és que, en el pas de w a e, els consumidors 1 i 3 intercanvien: 1 lliura a 3 la quantitat $1 - \sqrt{½}$ de la mercaderia y i a canvi rep de 3 la quantitat $\sqrt{½}$ de la mercaderia x. En resum, tot parell (p_x, p_y) tal que $p_y = p_x (1 + \sqrt{2})$ constitueix un sistema de preus d'equilibri. Cadascun d'aquests parells genera la mateixa assignació e d'equilibri: $e_{1x} = 1 + \sqrt{½}$, $e_{1y} = \sqrt{½}$, $e_{2x} = 0$, $e_{2y} = 1$, $e_{3x} = 1 - \sqrt{½}$ i $e_{3y} = 1 - \sqrt{½}$.

• Cas 2: $p_x > p_y$. En aquest cas, $x_2 = 0$. Així que substituint (1), (5) i (7) a la condició (14), s'obté $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{p_y}{p_x} + \frac{p_y}{p_x} + \frac{p_x}{p_x + p_y} = 2$. Per tant, $\frac{3}{2}\frac{p_y}{p_x} + \frac{p_x}{p_x + p_y} = \frac{3}{2}$. Aïllant $\frac{p_y}{p_x}$, s'obté $\frac{p_y}{p_x} = 1/\sqrt{3}$.

Amb $\frac{p_y}{p_x} = 1/\sqrt{3}$ es poden calcular totes les quantitats demandades: $x_1 = ½(1 + 1/\sqrt{3})$, $x_2 = 1/\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}/(1 + \sqrt{3})$, $y_1 = ½(1 + \sqrt{3})$, $y_2 = 0$ i $y_3 = \sqrt{3}/(1 + \sqrt{3})$. Aquest conjunt de quantitats defineix una segona assignació d'equilibri.

• Cas 3: $p_x = p_y$. En aquest cas, $\frac{p_y}{p_x} = 1$, de forma que, per (1), $x_1 = 1$ i, per (7), $x_3 = ½$. Donats aquests valors, per (14), $x_2 = ½$. Tal com es va argumentar quan es van obtenir les funcions de demanda del consumidor 2, si $p_x = p_y$, aleshores 2 demandarà qualsevol parell (x_2, y_2) tal que $p_x x_2 + p_y y_2 = p_y$. Atès que $x_2 = ½$, y_2 satisfà $\frac{1}{2}p_x + p_y y_2 = p_y$. Dividint-ho tot per p_x, $\frac{1}{2} + \frac{p_y}{p_x}\,y_2 = \frac{p_y}{p_x}$. Atès que $\frac{p_y}{p_x} = 1$, $y_2 = ½$. D'altra banda, per (2), $y_1 = 1$ i, per (8), $y_3 = ½$.

Com a resum, quan $p_x = p_y$, l'única assignació e d'equilibri satisfà $e_{1x} = 1$, $e_{1y} = 1$, $e_{2x} = ½$, $e_{2y} = ½$, $e_{3x} = ½$ i $e_{3y} = ½$. El pas de la dotació w a l'assignació d'equilibri e implica que 1 no participa en l'intercanvi (manté la seva dotació $w_1 = (1, 1)$) i que 2 compra a 3 ½ unitat d'x a canvi de ½ unitats d'y (atès que el preu relatiu $p_y/p_x = 1$, indicant que una unitat d'x s'intercanvia per una unitat d'y).

El Teorema de Sonnenschein-Mantel-Debreu (Teorema SMD)

Es tracta d'un resultat inicialment formulat per Hugo Freund Sonnenschein[3] (1940), economista estatunidenc, i refinat i esclarit posteriorment per Rolf Ricardo Mantel[4] (1934–1999), economista argentí, i Gérard Debreu[5] (1921–2004), economista i matemàtic francès, Premi Nobel d'Economia al 1983, "for having incorporated new analytical methods into economic theory and for his rigorous reformulation of the theory of general equilibrium". http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1983/

La versió del teorema formulada per Debreu diu que qualsevol funció d'excés de demanda agregada (d'una economa) triada arbitràriament, definida sobre el conjunt Δ de sistemes de preus positius i normalitzats (que la suma de preus sigui 1), que sigui contínua i que satisfaci la llei de Walras coincideix, en el domini de preus Δ, amb la funció d'excés de demanda agregada d'una economia on les funcions d'utilitat satisfan CON, MON i QUA.

---

[3] Sonnenschein, H. (1972): "Market excess demand functions", *Econometrica* 40, 549–563 i "Do Walras' law and continuity characterise the class of community excess demand functions?", *Journal of Economic Theory* 6, 345–354.

[4] Mantel, R. (1976): "Homothetic preferences and community excess demand functions?", *Journal of Economic Theory* 12, 197–201.

[5] Debreu, G. (1974): "Excess demand functions", *Journal of Mathematical Economics* 1, 15–23.

Quina rellevància té aquest teorema? D'entrada, en quin tipus de funcions de demanda es pensa quan es fa servir el model microeconòmic d'oferta i demanda d'una mercaderia? En funcions de demanda "ben comportades", això és, decreixents amb el preu de la pròpia mercaderia. Funcions de demanda que satisfan aquesta propietat faciliten la conclusió que l'equilibri de mercat és únic i estable. Amb dotacions fixes de les mercaderies, les funcions d'oferta són verticals i l'equilibri de mercat existeix i és únic amb funcions de demanda de mercat decreixents. És ben sabut que aquestes funcions de demanda resulten assumint que les funcions d'utilitat satisfan CON, MON i QUA. Anomenem "consumidors ben comportats" aquells amb funcions d'utilitat que satisfan CON, MON i QUA.

Quan s'agreguen mercats cercant un equilibri general (un equilibri simultani de tots els mercats), seria desitjable poder reproduir el mateix resultat d'unicitat i estabilitat a escala global. En particular, seria desitjable que consumidors ben comportats generessin funcions d'excés de demanda agregada que impliquessin unicitat i estabilitat de l'equilibri general. El Teorema SMD diu que aquesta esperança és vana: <u>tenir consumidors ben comportats a l'economia no garanteix que les funcions d'excés de demanda agregada siguin també "ben comportades"</u>. De fet, essencialment <u>qualsevol funció d'excés de demanda pot ser el resultat de tenir consumidors ben comportats</u>: les úniques propietats que els consumidors ben comportats transmeten a les funcions d'excés demanda agregada són la continuïtat i la llei de Walras (i alguna propietat de contorn), que és ben poca cosa per a establir resultats d'unicitat i estabilitat de l'equilibri general.

Per tot plegat, el Teorema SMD és conegut com a "*Anything goes theorem*": <u>el teorema de qualsevol cosa pot passar</u>. Una implicació del Teorema SMD és que <u>la teoria sobre l'equilibri general presentada (la joia de la corona de la teoria econòmica) no és informativa en el sentit que no imposa cap restricció que es pugui contrastar empíricament</u>: la mateixa funció d'excés de demanda agregada pot resultar d'assumir consumidors ben comportats que d'assumir-los irracionals o eixelebrats. En resum, que una economia estigui formada per consumidors ben comportats no impedeix que la funció d'excés de demanda agregada de l'economia pugui tenir qualsevol forma[6]. A continuació es presenta un enunciat formal del Teorema SMD.

• **Teorema SMD.** Sigui z funció d'excés de demanda agregada, definida sobre sistemes de preus <u>positius</u>, de manera que, per a tot p, $z(p) = (z_1(p), \ldots, z_m(p))$ és el vector dels excessos de demanda agregada de cadascuna de les m mercaderies amb sistema de preus p. Si z és <u>contínua</u> i satisfà la <u>llei de Walras</u>, aleshores existeix una economia en què:

(i) les funcions d'utilitat de tots els consumidors satisfan CON, MON i QUA: i

(ii) z és la funció d'excés de demanda agregada d'aquesta economia.

[6] A http://homepage.newschool.edu/het//profiles/sonnens.htm es diu el següent sobre el Teorema SMD: "the DSM Theorem claims that market demand functions, upon which all the "intuitive" results of market-level and macro-level economics rest, are essentially shapeless. <u>It essentially destroyed the "microfoundations" project of economic theory, i.e. to describe demand and supply as a result of the decentralized utility-maximizing agents</u>. The DSM theorem provides the following result: *even if* everybody has nicely-shaped individual demand functions, we *cannot* say that the market demand function will possess a nice shape too. Thus, <u>the efforts that have been made in the last century to describe demand as a result of utility-maximization are essentially wasted</u> - for the desired result."

Distribucions Paretoeficients d'una economia

Fixades les funcions d'utilitat dels consumidors, sigui $P(w)$ el conjunt de les assignacions Paretoeficients d'una economia amb dotacions w, on una assignació α és Paretoeficient si no existeix cap altra assignació β tal que:

(i) per a tot consumidor i, $u_i(\beta_i) \geq u_i(\alpha_i)$; i
(ii) per a algun consumidor j, $u_j(\beta_j) > u_j(\alpha_j)$.

Que α sigui o no Paretoeficient depèn només de la quantitat total de cada mercaderia, i no de com aquesta quantitat total està distribuïda com a dotació entre els consumidors.

Càlcul de les assignacions Paretoeficients

L'assignació α és Paretoeficient a una economia de bescanvi $n \times m$ amb dotacions $(w_i)_{i\in N}$ si, i només si, per a tot consumidor i, α és solució del problema

$$\begin{array}{lll} \textit{maximitzar} & u_i(\beta_i) & \\ \textit{sotmès a} & u_j(\beta_j) = u_j(\alpha_j) & \textit{per a tot consumidor } j \in N\setminus\{i\} \\ & \Sigma_{j\in N}\, \beta_{jk} = \Sigma_{j\in N}\, w_{jk} & \textit{per a tota mercaderia } k. \end{array}$$

Per tant, les condicions per a trobar les assignacions Paretoeficients poden formular-se en termes de la maximització de la utilitat d'un consumidor i qualsevol sotmesa a la restricció que els altres consumidors $j \neq i$ assoleixin un nivell d'utilitat predeterminat u_j^* (i a la restricció que la suma de les quantitats de cada mercaderia k de l'assignació coincideixi amb la quantitat total disponible de la mercaderia k). Això implica resoldre el següent problema.

$$\begin{array}{lll} \textit{maximitzar} & u_i(\beta_i) & \\ \textit{sotmès a} & u_j(\beta_j) = u_j^* & \textit{per a tot consumidor } j \in N\setminus\{i\} \\ & \Sigma_{j\in N}\, \beta_{jk} = \Sigma_{j\in N}\, w_{jk} & \textit{per a tota mercaderia } k. \end{array}$$

El lagrangià corresponent seria

$$L(\beta, \lambda, \mu) = u_i(\beta_i) + \Sigma_{j\in N\setminus\{i\}}\, \lambda_j(u_j^* - u_j(\beta_j)) + \Sigma_{k\in M}\, \mu_k(\Sigma_{j\in N}\, w_{jk} - \Sigma_{j\in N}\, \beta_{jk}).$$

Suposem que les funcions d'utilitat són diferenciables i satisfan CON, MON i QUA. Aleshores, les condicions de primer ordre per a maximitzar L són necessàries i suficient per a trobar les solucions interiors, això és, aquelles on cap consumidor no rep la quantitat 0 d'alguna mercaderia. Les condicions de primer ordre serien:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_{ik}} = \frac{\partial u_i(\beta_i)}{\partial \beta_{ik}} - \mu_k = UMg_{ik} - \mu_k = 0 \qquad \text{per a tota mercaderia } k$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_{jk}} = \lambda_j \frac{\partial u_j(\beta_j)}{\partial \beta_{jk}} - \mu_k = \lambda_j \cdot UMg_{jk} - \mu_k = 0 \qquad \text{per a tot consumidor } j \neq i \text{ i tota mercaderia } k$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = u_j^* - u_j(\beta_j) = 0 \qquad \text{per a tot consumidor } j \neq i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_k} = \Sigma_{j\in N}\, w_{jk} - \Sigma_{j\in N}\, \beta_{jk} = 0 \qquad \text{per a tota mercaderia } k$$

on UMg_{rk} és la funció d'utilitat marginal del consumidor r de la mercaderia k.

El quart grup d'equacions és la restricció de factibilitat (o d'equilibri de mercats): per a tota mercaderia k, la suma $\Sigma_{j\in N}\ \beta_{jk}$ del que reben els consumidors de la mercaderia k és igual a l'estoc $\Sigma_{j\in N}\ w_{jk}$ total de mercaderia k existent. El tercer grup d'equacions és la restricció d'utilitat dels altres consumidors: per a tot consumidor $j \neq i$, $u_j(\beta_j) = u_j^*$.

Del primer grup d'equacions resulta que, per a tot parell de mercaderies k i q,

$$\frac{UMg_{ik}}{UMg_{iq}} = \frac{\mu_k}{\mu_q}.$$

Del segon grup d'equacions resulta que, per a tot parell de mercaderies k i q, i tot consumidor $j \neq i$,

$$\frac{UMg_{jk}}{UMg_{jq}} = \frac{\mu_k/\lambda_j}{\mu_q/\lambda_j} = \frac{\mu_k}{\mu_q}.$$

Combinant aquests dos resultat, s'obté que, per a tot parell de mercaderies k i q, i tot consumidor $j \neq i$,

$$\frac{UMg_{ik}}{UMg_{iq}} = \frac{UMg_{jk}}{UMg_{jq}}. \qquad (16)$$

L'anterior diu que, en una assignació Paretoeficient on tots els consumidors reben una quantitat positiva de totes les mercaderies, el quocient d'utilitats marginals entre dues mercaderies (la relació marginal de substitució d'una mercaderia per l'altra) és la mateixa per a tots els consumidors. (16) és equivalent a la condició

$$\frac{UMg_{ik}}{UMg_{jk}} = \frac{UMg_{iq}}{UMg_{jq}}$$

que estableix que el quocient d'utilitats marginals de dos consumidors és el mateix per a totes les mercaderies.

Exemple 1 de càlcul d'assignacions Paretoeficients
Sigui l'economia 2 × 2 tal que $u_1(x_1, y_1) = x_1^2 y_1$, $w_1 = (0, 2)$, $u_2(x_2, y_2) = x_2 y_2^2$ i $w_2 = (1, 0)$. Aplicant (16),

$$\frac{2y_1}{x_1} = \frac{2x_1y_1}{x_1^2} = \frac{UMg_{1x}}{UMg_{1y}} = \frac{UMg_{2x}}{UMg_{2y}} = \frac{y_2^2}{2x_2y_2} = \frac{y_2}{2x_2}.$$

Les restriccions de factibilitat exigeixen $x_1 + x_2 = 1$ i $y_1 + y_2 = 2$. Aïllant les variables referides al consumidor 2, s'obté $x_2 = 1 - x_1$ i $y_2 = 2 - y_1$. Substituint a l'equació anterior,

$$\frac{2y_1}{x_1} = \frac{y_2}{2x_2} = \frac{2 - y_1}{2(1 - x_1)}.$$

Per consegüent, $4y_1 = 2x_1 + 3x_1y_1$.

Aïllant x_1,

$$x_1 = \frac{4y_1}{2+3y_1}. \tag{17}$$

Com a resultat d'això, totes les assignacions Paretoeficients $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ on $x_1 \neq 0 \neq y_1$ i $x_2 \neq 0 \neq y_2$ són tals que $x_1 = 4y_1 / (2 + 3y_1)$. Així, triant un valor qualsevol (però factible) d'y_1, la fórmula (17) determina x_1. Com es troben els valors (x_2, y_2)? Donat el valor triat d'y_1, la condició de factibilitat $y_1 + y_2 = 2$ permet de calcular y_2. I havent-se computat x_1 mitjançant (17), la condició de factibilitat $x_1 + x_2 = 1$ permet de calcular x_2. En resum, les assignacions Paretoeficients on $x_1 \neq 0 \neq y_1$ i $x_2 \neq 0 \neq y_2$ satisfan, per a tot $0 < y_1 < 2$,

$$\left(\left(\frac{4y_1}{2+3y_1}, y_1\right), \left(1 - \frac{4y_1}{2+3y_1}, 2 - y_1\right)\right).$$

Exemple 2 de càlcul d'assignacions Paretoeficients

Sigui l'economia 3×2 tal que: (i) $u_1(x_1, y_1) = x_1y_1$ i $w_1 = (1, 1)$; (ii) $u_2(x_2, y_2) = x_2 + y_2$ i $w_2 = (0, 1)$; i (iii) $u_3(x_3, y_3) = min\{x_3, y_3\}$ i $w_3 = (1, 0)$. En aquest cas, la funció u_3 no és diferenciable i no es poden aplicar les equacions de (16). Però $u_3(x_3, y_3) = min\{x_3, y_3\}$ implica que, en tota assignació Paretoeficient, $x_3 = y_3$. Si aquest no fos el cas, 3 podria lliurar l'excés d'una mercaderia al consumidor 2, de manera que 3 mantindria la seva utilitat i 2 l'augmentaria.

Passant al consumidor 1, en una assignació Paretoeficient la utilitat marginal d'1 consumint x hauria de ser igual a la utilitat marginal d'1 consumint y. Per a comprovar-ho, suposem que $UMg_{1x} > UMg_{1y}$. Atès que $UMg_{1x} = y_1$ i $UMg_{1y} = x_1$, s'ha de tenir $y_1 > x_1$. Aleshores 1 podria prendre la quantitat $\varepsilon > 0$, tan petita com es vulgui, d'y i intercanviar-la per la quantitat ε d'x amb el consumidor 2. Atès que $u_2(x_2, y_2) = x_2 + y_2$, a 2 li és igual tenir ε unitats d'x que ε unitats d'y. Però 1 hi surt guanyant perquè la utilitat guanyada per les ε unitats d'x és superior a la utilitat perduda de les ε unitats d'y (ja que la utilitat marginal d'x és superior a la d'y). En resum, en tota assignació Paretoeficient (on 2 rep quantitats positives de totes dues mercaderies), $x_1 = y_1$.

Finalment, considerem les condicions de factibilitat: a $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ i $y_1 + y_2 + y_3 = 2$. D'aquí resulta $x_2 = 2 - x_1 - x_3$ i $y_2 = 2 - y_1 - y_3$. Donat $x_1 = y_1$ i $x_3 = y_3$, se'n deriva que $x_2 = y_2$. Com a conclusió, a totes les assignacions Paretoeficients on 2 rep una quantitat positiva de totes dues mercaderies, tots els consumidors reben la mateixa quantitat de totes les mercaderies.

Vetos a una assignació

Una coalició S de consumidors pot <u>vetar</u> una assignació α d'una economia amb dotacions w si existeix alguna altra assignació β tal que:

(O1) $\Sigma_{i \in S}\, \beta_i = \Sigma_{i \in S}\, w_i$;
(O2) per a tot consumidor $i \in S$, $u_i(\beta_i) \geq u_i(\alpha_i)$; i
(O3) per a algun consumidor $j \in S$, $u_j(\beta_j) > u_j(\alpha_j)$.

Una coalició pot vetar l'assignació α si els seus membres poden repartir-se les dotacions que aporten a la coalició de manera que ningú de la coalició no té menys utilitat que amb α i algú en té més.

Cor d'una economia

Fixades les funcions d'utilitat, el cor $C(w)$ d'una economia amb dotacions w és el conjunt de totes les assignacions que cap coalició de consumidors no pot vetar. Per tant, si $\alpha \in C(w)$, aleshores no existeix cap assignació β que satisfaci les condicions (O1), (O2) i (O3).

Relació entre el cor i la Paretoeficiència

Que una assignació α sigui Paretoeficient significa que la coalició formada per tots els consumidors no pot vetar α. D'aquí se'n desprèn que tota assignació del cor d'una economia és Paretoeficient: $C(w) \subseteq P(w)$.

El Primer Teorema Fonamental de l'Economia del Benestar (1r TF)

Sigui una economia de bescanvi $n \times m$ amb dotacions w i on les funcions d'utilitat dels consumidors són estrictament creixents. Aleshores, $E(w) \subseteq P(w)$: tota assignació d'equilibri és Paretoeficient.

Donada la relació entre cor i Paretoeficiència, el 1r TF és un corol·lari del següent resultat.

El Primer Teorema Fonamental de l'Economia del Benestar (versió 2)

Fixades les funcions d'utilitat, sigui una economia de bescanvi $n \times m$ amb dotacions w i on les funcions d'utilitat dels consumidors són estrictament creixents. Aleshores, $E(w) \subseteq C(w)$: tota assignació d'equilibri pertany al cor de l'economia.

Demostració. L'objectiu és arribar a una contradicció de la suposició que $E(w) \subseteq C(w)$ és fals. Per tant, suposem que $\alpha \in E(w)$ però $\alpha \notin C(w)$. El fet que $\alpha \in E(w)$ implica l'existència d'una sistema de preus d'equilibri p tal que, per a tot consumidor i, $d_i(w_i, p) = \alpha_i$. El fet que $\alpha \notin C(w)$ significa que existeix alguna coalició S de consumidors i alguna assignació β tal que (O1), (O2) i (O3) se satisfan. Se segueix d'(O1) que

$$p \cdot \Sigma_{i \in S}\, \alpha_i = p \cdot \Sigma_{i \in S}\, w_i \tag{18}$$

on (18) abreuja $\Sigma_k\ \Sigma_{i \in S}\ p_k \alpha_{ik} = \Sigma_k\ \Sigma_{i \in S}\ p_k w_{ik}$ (cal recordar que tant $\Sigma_{i \in S}\ \alpha_i$ com $\Sigma_{i \in S}\ \alpha_i$ són vectors m-dimensionals). Passem ara a demostrar (19).

$$u_i(\beta_i) \geq u_i(\alpha_i) \text{ implica } p \cdot \beta_i \geq p \cdot \alpha_i \tag{19}$$

La condició (19) indica que si, per a i, el lot β_i és almenys tan preferit com el lot α_i, aleshores, amb el sistema de preus, β_i és almenys tan costós com α_i. Per a demostrar-ho, suposem que no és cert: $u_i(\beta_i) \geq u_i(\alpha_i)$ però $p \cdot \beta_i < p \cdot \alpha_i$. La desiguatat $p \cdot \beta_i < p \cdot \alpha_i$ diu que, amb el sistema de preus p, el cost per al consumidor i d'adquirir el lot β_i és inferior al cost d'adquirir el lot d'equilibri α_i. Si aquest fos el cas, es podria definir un nou lot γ_i, obtingut del lot β_i augmentant un $\varepsilon > 0$ apropiadament petit la quantitat d'una de les mercaderies del lot β_i, de manera que el cost $p \cdot \gamma_i$ d'adquirir γ_i amb el sistema de preus p fos inferior al cost d'adquirir el lot α_i amb p.

Atès que u_i és estrictament creixent, $u_i(\gamma_i) > u_i(\beta_i)$ i, per hipòtesi, $u_i(\beta_i) \geq u_i(\alpha_i)$. Així doncs, $u_i(\gamma_i) > u_i(\alpha_i)$. El fet $d_i(w_i, p) = \alpha_i$ significa que, donat el sistema de preus p i la seva dotació w_i, α_i

maximitza la utilitat d'i entre tots els lots que costen el mateix o menys que α_i amb el sistema de preus p. Però hem descobert el lot γ_i, el qual dóna més utilitat que el lot α_i (ja que $u_i(\gamma_i) > u_i(\alpha_i)$) i, a més, costa menys que α_i amb el sistema de preus p (ja que $p \cdot \gamma_i < p \cdot \alpha_i$). Això contradiu el fet que α_i maximitza la utilitat d'i entre tots els lots que costen el mateix o menys que α_i amb el sistema de preus p. El mateix raonament permet de demostrar (20): si, per a i, el lot β_i és preferit al lot α_i, aleshores, amb el sistema de preus, β_i és més costós que α_i.

$$u_i(\beta_i) > u_i(\alpha_i) \text{ implica } p \cdot \beta_i > p \cdot \alpha_i \tag{20}$$

Sumem ara (O2) i (O3) per a tot membre de la coalició S. Per tant, $\Sigma_{i\in S}\, u_i(\beta_i) > \Sigma_{i\in S}\, u_i(\alpha_i)$. Això, combinat amb (19) i (20), implica $\Sigma_{i\in S}\, p \cdot \beta_i > \Sigma_{i\in S}\, p \cdot \alpha_i$. Aquesta desigualtat és equivalent a $p \cdot \Sigma_{i\in S}\, \beta_i > p \cdot \Sigma_{i\in S}\, \alpha_i$. Atès que $d_i(w_i, p) = \alpha_i$, el cost d'adquirir α_i amb el sistema de preus p coincideix amb el cost d'adquirir w_i amb el sistema de preus p. Així, $p \cdot \Sigma_{i\in S}\, \alpha_i = p \cdot \Sigma_{i\in S}\, w_i$. Com a resultat, $p \cdot \Sigma_{i\in S}\, \beta_i > p \cdot \Sigma_{i\in S}\, \alpha_i \geq p \cdot \Sigma_{i\in S}\, w_i$; això és, $p \cdot \Sigma_{i\in S}\, \beta_i > p \cdot \Sigma_{i\in S}\, w_i$, la qual cosa contradiu (18).■

El Segon Teorema Fonamental de l'Economia del Benestar (2n TF)
Fixades les funcions d'utilitat, sigui una economia de bescanvi $n \times m$ amb dotació w tal que:

(i) per a tota mercaderia k, $\Sigma_{i\in N}\, w_{ik} > 0$; i
(ii) per a tot consumidor i, u_i satisfà CON, MON i QUA.

Si $\alpha \in P(w)$, aleshores existeix una assignació w' tal que $\alpha \in E(w')$.

Si p és un sistema de preus d'equilibri que fa que $\alpha \in E(\alpha)$, llavors $\alpha \in E(w')$, per a tota dotació w' tal que, per a tot consumidor i, $\Sigma_{k\in M}\, p_k{\cdot}w'_{ik} = \Sigma_{k\in M}\, p_k{\cdot}\alpha_{ik}$. Les propietats de les funcions d'utilitat del 2n TF garanteixen que <u>si α és Paretoeficient, aleshores, per algun sistema de preus, α és una assignació d'equilibri quan la dotació és α</u>.

<u>El 1r TF estableix condicions sota les quals una economia competitiva</u> (sense externalitats ni béns públics) <u>produeix un resultat Paretoeficient</u>. És a dir, tota assignació generada per un sistema de mercats competitius supera el filtre normatiu bàsic consistent en què no hi hagi cap altra assignació on algun agent aconsegueixi quelcom de més preferit i on, simultàniament, cap agent no rebi quelcom de menys preferit. Una assignació que no fos Paretoeficient seria insatisfactòria en la mesura que es malbarataria la possibilitat d'augmentar la satisfacció d'algun agent sense perjudicar la satisfacció de cap altre agent.

La versió 2 del 1r TF diu encara més. Donada l'assignació generada pel sistema de mecats competitius, cap coalició de consumidors no pot, pels seus propis mitjans, aconseguir una assignació de lots als seus membres que no empitjorés a ningú de la coalició, en comparació amb l'assignació d'equilibri, i millorés la situació d'algun membre de la coalició. Això diu que <u>l'assignació d'equilibri és robusta a vetos per part de totes les coalicions</u>.

El 2n TF indica que, amb consumidors ben comportats, tota assignació Paretoeficient on tots els agents reben una quantitat positiva de totes les mercaderies pot ser obtinguda com a assignació d'algun equilibri de l'economia <u>si es fa una reassignació apropiada de les</u>

dotacions inicials. Així, l'objectiu d'assolir una assignació Paretoeficient α quan les dotacions són w es pot aconseguir en dues etapes. A la primera etapa les dotacions es tornarien a repartir, de forma que alguna assignació $\hat{w}$ descriuria les noves dotacions dels consumidors. A la segona etapa, els sistema de mercats competitius portaria a l'assignació α: gràcies a algun sistema de preus d'equilibri p, α seria l'assignació d'equilibri amb dotacions $\hat{w}$.

El Segon Teorema Fonamental de l'Economia del Benestar (versió amb transferències)
Fixades les funcions d'utilitat, sigui una economia de bescanvi $n \times m$ amb dotació w tal que:

(i) per a tota mercaderia k, $\Sigma_{i \in N} w_{ik} > 0$; i
(ii) per a tot consumidor i, u_i satisfà CON, MON i QUA.

Sigui α una assignació Paretoeficient tal que, per a tot consumidor i i tota mercaderia k, $\alpha_{ik} > 0$. Aleshores existeix un sistema de preus d'equilibri p i, per a cada consumidor i, un nombre real T_i tal que:

(iii) $\Sigma_{i \in N} T_i = 0$; i
(iv) per a tot consumidor i, α_i maximitza u_i quan la renda d'i és $T_i + \Sigma_{k \in M} p_{ik} \cdot w_{ik}$.

La segona versió del 2n TF substitueix la reassignació inicial de les dotacions per un mecanisme de redistribució de poder adquisitiu (en forma de crèdit, per exemple): les transferències (que poden ser positives o negatives). Així, amb transferències apropiades entre els consumidors, el sistema de mercats competitius pot emprar-se per a assolir (pràcticament) qualsevol assignació Paretoeficient seleccionada.

L'import de T_i seria el valor en alguna unitat de compte del que rep o lliura el consumidor i. És a dir, essent p el sistema de preus d'equilibri i $\hat{w}$ la reassignació de dotacions que sosté α com a assignació d'equilibri a la versió inicial del 2n TF, es podria definir $T_i = \Sigma_{k \in M} p_k \cdot w_{ik} - \Sigma_{k \in M} p_k \cdot \hat{w}_{ik}$. La versió amb transferències del Segon Teorema dóna sentit a l'existència del diner com a dipòsit de valor i mitjà de pagament: en una economia monetària, la primera etapa d'acord amb la nova versió del 2n TF per a assolir l'assignació Paretoeficient desitjada α no comportaria l'intercanvi de mercaderies, sinó el pagament de diners. Qui obligaria l'execució d'aquests pagaments? Per exemple, un organisme públic: l'Estat. Ara bé: aquesta substitució de la voluntat individual per una voluntat "col·lectiva" (mercat per Estat) crea el problema de la justificació o legitimitat de la substitució.

Exemple del 2n TF (amb transferències)
Sigui l'economia 2×2 tal que $u_1(x_1, y_1) = x_1^2 y_1$, $u_2(x_2, y_2) = x_2 y_2^2$, $w_1 = (0, 1)$ i $w_2 = (2, 0)$. Verifica: (i) que l'assignació d'equilibri d'aquesta economia és $e_1 = (2/3, 1/3)$ i $e_2 = (4/3, 2/3)$; i (ii) que tot sistema de preus d'equilibri satisfà $p_y / p_x = 2$. Comprova que l'assignació α tal que $\alpha_1 = (8/5, 1/2)$ i $\alpha_2 = (2/5, 1/2)$ és Paretoeficient. Calculem les transferències T_1 i T_2 que farien que α esdevingués l'assignació d'equilibri. Aquests valors han de fer que

$\alpha_1 = (8/5, 1/2)$ solucioni *max* u_1 *sotmès a* $p_x\alpha_{1x} + p_y\alpha_{1y} = p_x w_{1x} + p_y w_{1y} + T_1$ i que
$\alpha_2 = (2/5, 1/2)$ solucioni *max* u_2 *sotmès a* $p_x\alpha_{2x} + p_y\alpha_{2y} = p_x w_{2x} + p_y w_{2y} + T_2$.

Una manera de resoldre el problema consisteix a calcular les funcions de demanda de cada consumidor quan s'han afegit les transferències. Les funcions de demanda de les dues mercaderies del consumidor 1 s'obtindrien a partir de les dues condicions

$$\frac{UMg_{1x}}{UMg_{1y}} = \frac{p_x}{p_y} \quad \text{i} \quad p_x x_1 + p_y y_1 = p_y + T_1.$$

Així, $2x_1y_1 / x_1^2 = p_x / p_y$, d'on resulta $p_x x_1 = 2p_y y_1$. Substituint a la restricció pressupostària modificada, $3p_y y_1 = p_y + T_1$. Aïllant y_1, s'arriba a la funció de demanda de la mercaderia y del consumidor 1: $y_1 = ⅓ + T_1/3p_y$. Atès que volem que $y_1 = ½$, cal que $T_1 = p_y/2$. Aquest resultat no pot ser concretat més, perquè no hi ha un únic sistema de preus d'equilibri que fa que α sigui una assignació d'equilibri.

Les funcions de demanda de les dues mercaderies del consumidor 2 s'obtindrien a partir de les dues condicions

$$\frac{UMg_{2x}}{UMg_{2y}} = \frac{p_x}{p_y} \quad \text{i} \quad p_x x_2 + p_y y_2 = 2p_x + T_2.$$

Per tant, $y_2^2 / 2x_2y_2 = p_x / p_y$, d'on resulta $2p_x x_2 = p_y y_2$. Substituint a la restricció pressupostària modificada, $3p_x x_2 = 2p_x + T_2$. Aïllant x_2, s'arriba a la funció de demanda de la mercaderia x del consumidor 2: $x_2 = ⅔ + T_2/3p_x$. Atès que volem que $x_2 = ⅖$, cal que $T_2 = –4p_x/5$.

Caldria finalment expressar T_1 i T_2 en termes de la mateixa variable. Això s'aconsegueix fent servir la condició sobre les utilitats marginals. Per exemple, per al consumidor 1

$$\frac{UMg_{1x}}{UMg_{1y}} = \frac{p_x}{p_y}$$

s'ha de complir per a $\alpha_1 = (⅘, ½)$. Ja s'ha comprovat prèviament que la condició anterior equival a $p_x x_1 = 2p_y y_1$. Amb $x_1 = ⅘$ i $y_1 = ½$, $p_x / p_y = 2y_1 / x_1 = 1 / ⅘ = ⅝$. En conseqüència, $p_x = ⅝p_y$. Així, $T_2 = –4p_x/5$ implica $T_2 = –p_y/2$.

Ens podríem haver estalviat tot l'esforç des que es va descobrir que $T_1 = p_y/2$, perquè $T_1 + T_2$ ha de ser zero. D'aquesta manera, $T_1 = p_y/2$ implica $T_2 = –p_y/2$: el consumidor 2 paga $p_y/2$ al consumidor 1, on p_y és un valor arbitrari. Si es fa aquest pagament, aleshores l'assignació triada α és una assignació d'equilibri per a tot sistema de preus d'equilibri tal que $p_x / p_y = ⅝$.

Sobre l'invers del Primer Teorema de l'Economia del Benestar (versió 2)

El 1r TF (versió 2) diu que, només que les funcions d'utilitat satisfacin MON, tota assignació d'equilibri pertany al cor. Què hi ha de l'afirmació inversa? El concepte d'equilibri és fruit de l'enfocament no cooperatiu de Walras. El concepte de cor és fruit de l'enfocament cooperatiu, que es remunta a Edgeworth[7]. En general, el concepte d'equilibri és més restrictiu que el de

[7] A http://socserv.mcmaster.ca/econ/ugcm/3ll3/edgeworth/mathpsychics.pdf es pot desacarregar el llibre *Mathematical Psychics*, que és on Edgeworth presenta la seva teoria de l'intercanvi.

cor: hi ha moltes assignacions del cor que no són assignacions d'equilibri. Això podria suggerir que l'enfocament no cooperatiu és més útil perquè restringeix més el conjunt de possibles resultats de l'intercanvi. Però Edgeworth mateix va suggerir que, quan l'economia és "gran" (que és precisament quan la hipòtesi de mercats competitius pot estar més justificada), la diferència entre equilibri i cor s'esvaeix.

Una manera en què va concretar el concepte d'economia "gran" és mitjançant la rèplica dels consumidors existents (pp. 42–45 de *Mathematical Psychics*). Com més gran sigui el cor, més indeterminat queda el resultat de l'intercanvi, perquè més intercanvis seran admissibles. La intuïció d'Edgeworth és que amb més consumidors menys indeterminat queda l'intercanvi, perquè hi ha assignacions que abans eren estables i que deixen de ser-ho amb més consumidors.

Economies rèplica

Sigui E una economia de bescanvi $n \times m$. L'economia rèplica E^r d'E r cops és l'economia $n{\cdot}r \times m$ tal que, per a cada consumidor i de l'economia E, hi ha r còpies idèntiques d'i a E^r. Per tant, l'economia rèplica E^r d'E és aquella on hi ha r tipus d'idèntics de cada consumidor i d'E, tots amb la mateixa funció d'utilitat i la mateixa dotació que i.

Propietat de tractament igualitari al cor

Si α és una assignació que pertany al cor de l'economia rèplica E^r d'una economia E on les funcions d'utilitat satisfan CON, MON i QUA, aleshores, per a tot consumidor i, tots els tipus del consumidor i reben a α el mateix lot.

Cor d'una economia i d'una economia rèplica

De la propietat anterior es dedueix que <u>les assignacions que pertanyen al cor de l'economia rèplica E^r no són més que r cops una còpia d'alguna assignació del cor de l'economia base E</u>.

Si α és una assignació d' E^r, definim α^r com l'assignació de l'economia rèplica E^r que assigna el lot α_i a cada tipus del consumidor i. El conjunt C^r és el conjunt de totes les assignacions α del cor l'economia E tals que α^r pertany al cor d'E^r.

Encongiment del cor

Per a economies on les funcions d'utilitat satisfan CON, MON i QUA, $C^1 \supset C^2 \supset \ldots C^r \supset \ldots$

<u>A mesura que es replica una economia, la replicació de cada cop menys assignacions del cor de l'economia original pertany al cor de les economies rèplica</u>.

Exemple de l'encongiment del cor en economies rèplica

Suposem que E és l'economia 2×2 tal que $u_1(x, y) = u_2(x, y) = xy$, $w_1 = (4, 0)$ i $w_2 = (0, 4)$. Les funcions de demanda del consumidor 1 són $x_1 = 2$ i $y_1 = 2p_x / p_y$. Les funcions de demanda del consumidor 2 són $x_2 = 2p_y / p_x$ i $y_2 = 2$. Tot sistema de preus d'equilibri satisfà $p_x = p_y$. Per tant, tota assignació e d'equilibri satisfà $e_{1x} = e_{1y} = e_{2x} = e_{2y} = 2$. L'assignació α tal que $\alpha_1 = (1, 1)$ i $\alpha_2 = (3, 3)$ pertany al cor d'E.

Considerem ara l'economia rèplica E^2. Aquesta economia està formada per quatre consumidors: dos d'ells (anomenats 1.1 i 1.2) són clons del consumidor 1, i els altres dos (2.1 i 2.2) són clons del consumidor 2. Però la duplicació α^2 de l'assignació α no pertany al cor de la nova economia, de manera que $\alpha \notin C^2$. Per a demostrar-ho, comprovem que la coalició {1.1, 1.2, 2.1} pot repartir-se la suma de les dotacions dels seus membres i obtenir tots una utilitat superior a la què obtenen a α. Amb l'assignació α^2, els consumidors 1.1 i 1.2 reben el lot (1, 1) i, per tant, obtenen la utilitat $u_1(1, 1) = 1$. A la mateixa assignació, els consumidors 2.1 i 2.2 reben el lot (3, 3) i, per consegüent, obtenen la utilitat $u_2(3, 3) = 9$.

Suposem ara que 1.1 i 1.2 s'adrecen a 2.1 i li proposen el següent repartiment: 2.1 s'emporta el lot (5, 2) i tant 1.1 com 1.2 s'emporten el lot (1'5, 1). Aquest repartiment és factible per als membres de la coalició resultant {1.1, 1.2, 2.1}, perquè la dotació total seria la suma del que aporta 1.1 (el lot (4, 0)), del que aporta 1.2 (el lot (4, 0)) i del que aporta 2.1 (el lot (0, 4)). El lot total és (8, 4). El repartiment anterior requereix (5, 2) + (1'5, 1) + (1'5, 1) = (8, 4). Així que la proposta de repartiment justament consisteix en una assignació del que tenen tots plegats. Verifiquem que tothom augmenta la seva utilitat en comparació amb la utilitat associada amb α^2. Per a 1.1 i 1.2, la utilitat és $u_1(1'5, 1) = 1'5 > 1$ i, per a 2, és $u_2(5, 2) = 10 > 9$. Conclusió: la coalició {1.1, 1.2, 2.1} pot vetar l'assignació α^2, que és la duplicació d'α. Per això, $\alpha \notin C^2$: l'assignació α deixa de pertànyer al cor quan dupliquem l'economia.

Teorema límit del cor (Edgeworth-Debreu-Scarf)
Sigui E una economia de bescanvi $n \times m$ tal que les funcions d'utilitat dels consumidors satisfan CON, MON i QUA. Si α és una dotació tal que, per a tot $r \geq 1$, $\alpha \in C^r$, llavors α és una assignació d'equilibri de l'economia E.

Segons el resultat anterior, amb cada replicació de l'economia E desapareix algun element del cor d'E i, en el límit, només resta l'assignació d'equilibri d'E. Així que, per a economies prou grans, l'enfocament no cooperatiu de Walras i l'enfocament cooperatiu d'Edgeworth arriben al mateix resultat.

Manipulabilitat de l'equilibri
Anomemen correspondència walrasiana la correspondència que assigna a cada economia $n \times m$ el seu conjunt d'assignacions d'equilibri (si les funcions d'utilitat satisfan CON, MON i QUA, la correspondència és una funció). Aquesta correspondència es pot interpretar com una regla d'elecció social on els consumidors revelen les seves preferències (en forma de funcions d'utilitat) sobre els lots de mercaderies i, donades les dotacions de cada consumidor, la regla computa les assignacions d'equilibri. Una propietat inconvenient de la correspondència walrasiana és que es manipulable: els consumidors poden obtenir un lot més preferit mentint sobre les seves preferències que manifestant les seves preferències reals.

Exemple de manipulabilitat de la correspondència walrasiana
Sigui l'economia 2×2 tal que $u_1(x, y) = u_2(x, y) = xy$, $w_1 = (4, 0)$ i $w_2 = (0, 4)$. Les funcions de demanda del consumidor 1 són $x_1 = 2$ i $y_1 = 2p_x / p_y$. Les del consumidor 2 són $x_2 = 2p_y / p_x$ i $y_2 = 2$. En tot equilibri general, $p_x / p_y = 1$. Així que l'única assignació e d'equilibri és $e_{1x} = e_{1y} = e_{2x} = e_{2y} = 2$. La utilitat de cada consumidor i a l'assignació d'equilibri és $u_i(2, 2) = 4$.

Suposem que el consumidor 1 es planteja revelar una funció d'utilitat falsa que faci que, en la nova assignació d'equilibri, la seva utilitat sigui superior a $u_1(2, 2) = 4$. La seva autèntica funció d'utilitat estableix que $x_1 = 2$. Per això, a 1 només li convé augmentar el que li pertoca d'y en un equilibri. Imaginem que 1 només es planteja declarar funcions d'utilitat que facin que la funció de demanda d'y depengui negativament del preu d'y (perquè podria resultar sospitós declarar tenir funcions d'utilitat que comportin funcions de demanda d'una mercaderia que siguin creixents amb el preu de la pròpia mercaderia). Per a fer que s'incrementi la quantitat demandada d'y, caldrà una reducció del preu d'y en comparació amb el preu d'x (això és, caldrà que p_x / p_y augmenti). Per tant, sembla que 1 hauria de triar una funció d'utilitat que, en relació amb la seva autèntica funció d'utilitat, valori més x: més demanda d'x tendirà a fer apujar-ne el preu i, en termes relatius, tendirà a baixar el preu d'y.

Provem, per exemple, amb $\hat{u}_1(x, y) = x^2y$. Aquesta funció fa que una unitat d'x tingui més impacte sobre la utilitat que no pas la funció autèntica $u_1(x, y) = xy$. Les funcions de demanda d'1 amb $\hat{u}_1(x, y) = x^2y$ són $x_1 = 8/3$ i $y_1 = 4p_x / 3p_y$. Si 2 revela la seva autèntica funció d'utilitat, $y_2 = 2$. En equilibri, $y_1 + y_2 = w_{1y} + w_{2y} = 0 + 4 = 4$. Així, $4p_x / 3p_y + 2 = 4$, d'on s'obté $p_x / p_y = 3/2$. En la nova assignació d'equilibri, $x_1 = 8/3$ i $y_1 = 2$. Com a resultat d'això, $u_1(8/3, 2) = 16/3 > 4$. Conclusió: el consumidor 1 no té incentiu a revelar la seva autèntica preferència.

Altres formes de manipular la correspondència walrasiana

No cal mentir per a obtenir profit del mecanisme de assignació de mercaderies del model d'equilibri general. De fet, imaginem que la correspondència walrasiana estableix el resultat del funcionament de mercats competitius. Cada consumidor indica quant vol comprar i quant vol vendre a uns preus determinats. Si els plans de compra i venda per a totes les mercaderies són compatibles, l'intercanvi té lloc a aquells preus. Si no, els preus es modifiquen: s'apugen els preus de les mercaderies amb excés de demanda i s'abaixen els de les que tinguin excés d'oferta. Modificats els preus, els consumidors tornen a anunciar quant volen comprar i vendre de cada mercaderia. I així successivament. Una assignació d'equilibri representa un possible estat final d'aquest procés.

El punt rellevant és que el càlcul dels excessos d'oferta i demanda depenen de les quantitats de cada mercaderia que els consumidors porten al mercat. El model de l'equilibri general presuposa que tots els consumidors porten la seva dotació de cada mercaderia al mercat. De fet, el sistema de preus d'equilibri es calcula assumint que tot l'estoc existent d'una mercaderia és oferta d'aquesta mercaderia. Però què passaria si algun consumidor es reservés una part de la seva dotació? El següent exemple mostra que als consumidors els podria interessar exercir aquesta possibilitat: amagar dotacions[8].

Manipulant la correspondència walrasiana amagant mercaderia

Sigui l'economia 2×2 tal que $u_1(x, y) = u_2(x, y) = xy$, $w_1 = (4, 0)$ i $w_2 = (0, 4)$. Ja s'ha calculat que, a l'assignació de l'equilibri, 1 rep el lot (2, 2). La utilitat corresponent és $u_1(2, 2) = 4$. Suposem

[8] Es podria objectar que el fet d'amagar mercaderies és reversible: els consumidors podrien vigilar-se entre ells per a què tot l'estoc de cada mercaderia es portés al mercat. Hi ha exemples que mostren que pot sortir a compte a un consumidor destruir part de la seva dotació, la qual cosa constitueix una decisió amb conseqüències irreversibles.

que 1 amaga una unitat d'x, i declara que la seva dotació és $\hat{w}_1$ = (3, 0). Això significa que 1 declara ser més pobre del que realment és. Si aquest és l'únic canvi amb relació a l'economia original, la nova assignació d'equilibri és tal que 1 rep el lot ($\frac{3}{2}$, 2). Comptant la unitat d'x amagada, 1 gaudeix del lot ($\frac{5}{2}$, 2). La utilitat corresponent és u_1($\frac{5}{2}$, 2) = 5. Fent-se passar per més pobre, el mercat fa més ric el consumidor 1.

Però el consumidor 2 llegeix aquests apunts i decideix amagar també una unitat de la mercaderia de què disposa: la mercaderia y. L'economia resultant és aquella on $u_1(x, y) = u_2(x, y) = xy$, w_1 = (3, 0), w_2 = (0, 3) i on cada consumidor té una unitat amagada de la mercaderia que vol vendre. A l'única assignació d'equilibri d'aquesta economia tothom rep el lot ($\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$). Quan el consumidor 1 passa comptes d'utilitat, resulta que ara la seva utilitat és u_1($\frac{3}{2}$ + 1, $\frac{3}{2}$) = $\frac{15}{4}$. El consumidor 2 descobreix que la seva utilitat és u_2($\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ + 1) = $\frac{15}{4}$. La conclusió és que tots dos estan pitjor que si haguessin portat tota la seva mercaderia al mercat. En aquell cas, el lot que obtenia cadascun era (2, 2), i la utilitat era 4 > $\frac{15}{4}$. La història acaba amb tots dos consumidors remugant perquè van decidir llegir-se els apunts de Microeconomia Superior…