Exemple del càlcul d'equilibris de Nash amb 3 jugadors

Sigui el següent joc simultani. En aquest joc hi ha <u>quatre possibles tipus d'equilibris de Nash</u>.

		2				
		c	*d*		*c*	*d*
1	*a*	0 0 0	2 0 1	*a*	2 1 0	1 2 2
	b	0 1 2	1 2 1	*b*	1 2 1	2 1 1
		e		**3**	*f*	

• <u>Tipus 1: equilibris on ningú no randomitza</u>. Això significa que tots els jugadors trien estratègies pures. Prenguem el jugador 1 i descartem jugades on 1 no fa una millor resposta. Els rivals d'1 poden jugar (triant estratègies pures) de només 4 maneres: triant $[c, e]$, $[d, e]$, $[c, f]$ o $[d, f]$. Quan trien $[c, e]$, no podem descartar ni $[a, c, e]$ ni $[b, c, e]$ perquè $0 = u_1(a, c, e) = u_1(b, c, e) = 0$. En canvi, quan trien $[d, e]$, podem descartar com a equilibri de Nash $[b, d, e]$, ja que $2 = u_1(a, d, e) > u_1(b, d, e) = 1$. De manera similar, quan trien $[c, f]$, podem descartar $[b, c, f]$, perquè $2 = u_1(a, c, f) > u_1(b, c, f) = 1$. I quan trien $[d, f]$, podem descartar $[a, d, f]$, atès que $2 = u_1(b, d, f) > u_1(a, d, f) = 1$.

Passem ara al jugador 2. Els rivals de 2 poden jugar de 4 maneres: $[a, e]$, $[b, e]$, $[a, f]$ i $[b, f]$. Quan trien $[a, e]$, $0 = u_2(a, c, e) = u_2(a, d, e) = 0$. Per tant, no es pot descartar ni $[a, c, e]$ ni $[a, d, e]$. Quan trien $[b, e]$, resulta que $2 = u_2(b, d, e) > u_2(b, c, e) = 1$ i, per tant, $[b, c, e]$ no pot ser equilibri de Nash. Quan trien $[a, f]$, podem descartar $[a, c, f]$, ja que $2 = u_2(a, d, f) > u_2(a, c, f) = 1$. Per últim, quan 1 i 3 trien $[b, f]$, $2 = u_2(b, c, f) > u_2(b, d, f) = 1$, motiu pel qual $[b, d, f]$ no és un equilibri de Nash.

L'eliminació de candidats a equilibri de Nash amb estratègies pures només ha deixat dues jugades: $[a, c, e]$ i $[a, d, e]$. Ja hem comprovat que 1 i 2 fan una millor resposta a cada cas. En relació amb el jugador 3, e no és una millor resposta a $[a, d]$, perquè $2 = u_3(a, d, f) > u_3(a, d, e) = 1$. Per tant, $[a, d, e]$ no és equilibri de Nash. Però $[a, c, e]$ sí que l'és, atès que $0 = u_3(a, c, e) = u_3(a, c, f) = 0$. En resum, <u>$[a, c, e]$ és l'únic equilibri de Nash amb estratègies pures</u>.

• <u>Tipus 2: equilibris on només un jugador randomitza</u>. Establim primer les condicions necessàries de randomització per a cada jugador.

<u>Jugador 1</u>: per a què el jugador 1 estigui disposat a randomitzar, el seu pagament esperat de triar a ha de ser igual al seu pagament esperat de triar b. El pagament esperat de triar a és

$$0ec + 2e(1-c) + 2c(1-e) + 1(1-c)(1-e),$$

on c és la probabilitat que 2 triï l'estratègia c, $(1-c)$ és la probabilitat que 2 triï l'estratègia d, e és la probabilitat que 3 triï l'estratègia e i $(1-e)$ és la probabilitat que 3 triï l'estratègia f. El pagament esperat de triar b és

$$0ec + 1e(1-c) + 1c(1-e) + 2(1-c)(1-e).$$

Igualant els dos pagaments s'obté (1), que és la condició necessària de randomització del jugador 1.

$$1 + 3ec = 2c + 2e \tag{1}$$

Jugador 2: per a què el jugador 2 estigui disposat a randomitzar, el seu pagament esperat de triar c ha de ser igual al seu pagament esperat de triar d. El pagament esperat de triar c és

$$0ae + 1(1-a)e + 1a(1-e) + 2(1-a)(1-e),$$

on a és la probabilitat que 1 triï l'estratègia a i $(1-a)$ és la probabilitat que 1 triï l'estratègia b. El pagament esperat de triar d és

$$0ae + 2(1-a)e + 2a(1-e) + 1(1-a)(1-e).$$

Igualant els dos pagaments s'obté (2), que és la condició necessària de randomització del jugador 2.

$$1 + 3ae = 2a + 2e \tag{2}$$

Jugador 3: per a què el jugador 3 estigui disposat a randomitzar, el seu pagament esperat de triar e ha de ser igual al seu pagament esperat de triar f. El pagament esperat de triar e és

$$0ac + 2(1-a)c + 1a(1-c) + 1(1-a)(1-c).$$

El pagament esperat de triar f és

$$0ac + 1(1-a)c + 2a(1-c) + 1(1-a)(1-c).$$

Igualant els dos pagaments s'obté (3), que és la condició necessària de randomització del jugador 3.

$$a = c \tag{3}$$

La condició (3) és fàcil d'interpretar: per a què 3 triï tant e com f amb probabilitat positiva cal que 1 i 2 juguin les estratègies a i c amb la mateixa probabilitat.

Ja tenim les equacions per a identificar els equilibris de Nash on només un jugador randomitza. Hi ha tres casos.

Cas 1: només el jugador 1 randomitza. En aquest cas, $c \in \{0, 1\}$ i $e \in \{0, 1\}$, perquè ni 2 ni 3 randomitzen. Cas 1a: $c = 0$. Aleshores, (1) es transforma en $1 = 2e$. D'aquí, $e = ½$, que contradiu la hipòtesi inicial segons la qual 3 no randomitza. La conclusió és que no hi ha cap equilibri de Nash on només 1 randomitza i $c = 0$. Cas 1b: $c = 1$. Ara (1) es transforma en $1 + 3e = 2 + 2e$, d'on resulta $e = 1$. El candidat a equilibri de Nash pren la forma $[a, c, e] = [a, 1, 1]$, on $0 < a < 1$ és un valor que cal determinar. Com es determina? Cal buscar valors a^* d'a de forma que c sigui una millor resposta a $[a, e] = [a^*, 1]$ i que e sigui una millor resposta a $[a, c] = [a^*, 1]$ (perquè, per construcció, ja sabem que qualssevol d'aquests valors d'a és una millor resposta a $[c, e] = (1, 1)$). Però si $e = 1$ i 1 randomitza, el pagament esperat de 2 triant c és $(1–a)$ en tant que el seu pagament esperat triant d és $2(1–a)$. En tal cas, d és la millor resposta i no pas c. En resum, no hi ha cap equilibri de Nash on només el jugador 1 randomitza i $c = 1$. Pels casos 1a i 1b, no hi ha cap equilibri de Nash on només el jugador 1 randomitza.

Q1. El cas 2 s'ha analitzat considerant les dues úniques opcions $c = 0$ i $c = 1$ del jugador 2. Però també s'hauria pogut analitzar considerant les dues úniques opcions $e = 0$ i $e = 1$ del jugador 3. Fes-ho. [El mateix val per als casos 2 i 3 a continuació]

Cas 2: només el jugador 2 randomitza. Ara tenim que $a \in \{0, 1\}$ i $e \in \{0, 1\}$. Cas 2a: $e = 0$. Aleshores, (2) es transforma en $1 = 2a$. D'aquí, $a = ½$, que contradiu la hipòtesi inicial segons la qual 1 no randomitza. Per tant, no hi ha cap equilibri de Nash on només 2 randomitza i $e = 0$. Cas 2b: $e = 1$. Ara (2) es transforma en $1 + 3a = 2 + 2a$, d'on resulta $a = 1$. El candidat a equilibri de Nash pren la forma $[a, c, e] = [1, c, 1]$, on $0 < c < 1$. Però si $a = 1$ i 2 randomitza, el pagament esperat de 3 triant e és $(1–c)$ en tant que el seu pagament esperat triant f és $2(1–c)$. En tal cas, f és la millor resposta i no pas e. Per tant, no hi ha cap equilibri de Nash on només 2 randomitza i $e = 1$. Pels casos 2a i 2b, la conclusió final és que no hi ha cap equilibri de Nash on només el jugador 2 randomitza.

Cas 3: només el jugador 3 randomitza. Com a conseqüència, $a \in \{0, 1\}$ i $c \in \{0, 1\}$. Cas 3a: $a = 0$. Per la condició (3) de randomització del jugador 3, $c = 0$. Així que, donat $a = c = 0$, 3 fa una millor resposta triant qualsevol estratègia mixta, això és, qualsevol valor d'e. Ara cal determinar quins valors d'e fan que $a = 0$ sigui una millor resposta (assumint $c = 0$) i, a la vegada, fan que $c = 0$ sigui una millor resposta (assumint $a = 0$).

Per al jugador 1, el pagament esperat de triar a quan $c = 0$ i $0 < e < 1$ és $2e + 1(1–e) = 1 + e$; i el pagament esperat de triar b quan $c = 0$ i $0 < e < 1$ és $1e + 2(1–e) = 2 – e$. L'objectiu és establir per a quins valors d'e triar b (l'estratègia $a = 0$) és millor que triar a. Per a què b sigui millor que a s'ha de tenir que $2 – e \geq 1 + e$, d'on resulta $e \leq ½$.

Per al jugador 2, el pagament esperat de triar c quan $a = 0$ i $0 < e < 1$ és $e + 2(1–e) = 2 – e$; i el pagament esperat de triar d quan $a = 0$ i $0 < e < 1$ és $2e + 1(1–e) = 1 + e$. Com abans, l'objectiu és establir per a quins valors d'e triar d (l'estratègia $c = 0$) és millor que triar c. Per a què d sigui millor que c s'ha de tenir que $1 + e \geq 2 – e$, d'on resulta $e \geq ½$.

En resum, per a acceptar jugar $a = 0$ quan $c = 0$ el jugador 1 requereix que $e \leq ½$. I per a acceptar jugar $c = 0$ quan $a = 0$ el jugador 2 requereix $e \geq ½$. L'únic valor d'e que satisfà els dos requeriments és $e = ½$. I ja el tenim: $[a, c, e] = [0, 0, ½]$ és un equilibri de Nash on només el jugador 3 randomitza.

Q2. Comprova que $[a, c, e] = [0, 0, ½]$ és un equilibri de Nash.

Cas 3b: $a = 1$. Per la condició (3), $c = 1$. Per al jugador 2, el pagament esperat de triar c quan $a = 1$ i $0 < e < 1$ és $0e + 1(1-e) = 1 - e$; i el pagament esperat de triar d quan $a = 1$ i $0 < e < 1$ és $0e + 2(1-e) = 2(1 - e)$. Així que la millor resposta és d, de forma que cap jugada on $a = c = 1$ i 3 randomitza no pot ser equilibri de Nash. En conseqüència, l'únic equilibri de Nash on només 3 randomitza és el trobat al cas 3a.

• Tipus 3: equilibris on només dos jugadors randomitzen. Hi ha tres casos.

Cas 1: només els jugadors 1 i 2 randomitzen. Com a conseqüència, $e \in \{0, 1\}$ i s'han de satisfer (1) i (2). Cas 1a: $e = 0$. Llavors (2) esdevé $1 = 2e$. Per tant, $e = ½$, la qual cosa contradiu la hipòtesi que només 1 i 2 randomitzen. Case 1b: $e = 1$. Substituint aquest valor a (1), $1 + 3c = 2 + 2c$, d'on resulta $c = 1$. Això contradiu la hipòtesi que 2 randomitza. Així que, pels casos 1a i 1b, no existeix cap equilibri de Nash on només 1 i 2 randomitzen.

Cas 2: només els jugadors 1 i 3 randomitzen. Ara $c \in \{0, 1\}$ i s'han de satisfer (1) i (3). Cas 2a: $c = 0$. Per (3), $a = 0$, contradient-se la hipòtesi que 1 randomitza. Case 2b: $c = 1$. Substituint aquest valor a (1), $1 + 3e = 2 + 2e$, d'on resulta $e = 1$. Això contradiu la hipòtesi que 3 randomitza. Pels casos 2a i 2b, no existeix cap equilibri de Nash on només 1 i 3 randomitzen.

Cas 3: només els jugadors 2 i 3 randomitzen. Ara $a \in \{0, 1\}$ i s'han de satisfer (2) i (3). Cas 3a: $a = 0$. Per (3), $c = 0$, contradient-se la hipòtesi que 2 randomitza. Case 3b: $a = 1$. Per (3), $c = 1$, contradient-se la hipòtesi que 2 randomitza. Conclusió : no existeix cap equilibri de Nash on només 2 i 3 randomitzen.

• Tipus 4: equilibris on tots tres jugadors randomitzen. Això implica que les equacions (1), (2) i (3) s'han de satisfer. D'aquí que tot es redueixi a comprovar si hi ha valors d'a, c i e que solucionen el sistema d'equacions format per (1), (2) i (3). La complicació de l'exemple és que substituint (3) a (1) resulta (2). Això vol dir que una de les 3 equacions és redundant. De fet, aillant e a (1) s'obté $e = \frac{1-2a}{2-3a}$ i aillant e a (2) s'obté $e = \frac{1-2c}{2-3c}$, que són la mateixa condició per (3). Per tant, les jugades del tipus $[a, c, e] = [a, a, \frac{1-2a}{2-3a}]$ són candidats a equilibri de Nash. Per a rematar la feina, cal determinar quins valors d'a fan que el valor $e = \frac{1-2a}{2-3a}$ estigui entre 0 i 1: els valors d'a que satisfacin aquest requeriment faran que $[a, c, e] = [a, a, \frac{1-2a}{2-3a}]$ sigui equilibri.

El problema es resol fàcilment representant gràficament la funció $e = \frac{1-2a}{2-3a}$ quan $0 < a < 1$. A la Fig. 1 hi ha una representació de la funció quan $0 \le a \le ½$ (a es mesura a l'eix horitzontal). La informació de la gràfica implica que e està entre 0 i 1 quan a està entre 0 i ½. Això fa que totes les jugades del tipus $[a, c, e] = [a, a, \frac{1-2a}{2-3a}]$, amb $0 < a < ½$, siguin equilibris de Nash. Per exemple, $[a, c, e] = [⅓, ⅓, ⅓]$ i $[a, c, e] = [⅖, ⅖, ¼]$ són equilibris de Nash on tots els jugadors randomitzen.

Q3. Comprova que $[a, c, e] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ i $[a, c, e] = [\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}]$ són equilibris de Nash.

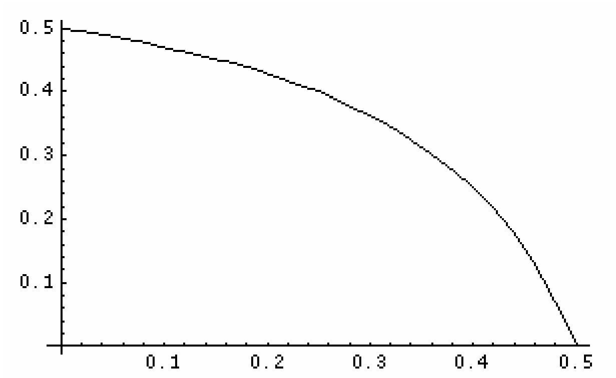

Fig. 1. Gràfica d'$e = \dfrac{1-2a}{2-3a}$ quan $0 \le a \le \frac{1}{2}$ (a és a abscisses)
http://cose.math.bas.bg/webMathematica/MSP/Sci_Visualization/FunctionPlot.msp

Què passa per a valors d'$a \ge \frac{1}{2}$? <u>Cas 1: $a = \frac{1}{2}$</u>. La fórmula $e = \dfrac{1-2a}{2-3a}$ fa que $e = 1$, fet que contradiu la hipòtesi que 3 randomitza. <u>Cas 2: $\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$</u>. Ara $e = \dfrac{1-2a}{2-3a} < 0$, la qual cosa contradiu la hipòtesi que e és una probabilitat. <u>Cas 3: $a = \frac{2}{3}$</u>. En aquest cas, la fórmula $e = \dfrac{1-2a}{2-3a}$ no és aplicable i cal recomençar amb les condicions (1), (2) i (3). Si $a = \frac{2}{3}$, per (3), $c = \frac{2}{3}$. Per (1), $1 + 3 \cdot e \cdot \frac{2}{3}$ ha de ser igual a $2e + 2 \cdot \frac{2}{3}$; això és, $1 + 2e$ ha de ser igual a $2e + \frac{4}{3}$, fet que no passa mai. Conclusió: no hi ha cap equilibri de Nash on tothom randomitza i $a = \frac{2}{3}$. <u>Cas 4: $a > \frac{2}{3}$</u>. Quan $a > \frac{2}{3}$, s'obté $2 - 3a < 0$ i $1 - 2a < 0$. Per tant, $e = \dfrac{1-2a}{2-3a}$ és el quocient de dos valors negatius. En tal cas, el resultat es preserva canviant el signe de numerador i denominador, de forma que $e = \dfrac{2a-1}{3a-2}$, on ara numerador i denominador són positius. Atès que $a > \frac{2}{3}$, el quocient $\dfrac{2a-1}{3a-2}$ és més gran que 1, fet que contradiu la hipòtesi que e és una probabilitat. Recapitulant, <u>no hi ha cap equilibri on tothom randomitza i $a \ge \frac{1}{2}$</u>. Això clou el càlcul dels equilibris de Nash.

Q4. Verifica que $\dfrac{1-2a}{2-3a} < 0$ si $\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$.

Q5. Comprova que $a > \frac{2}{3}$ implica $\dfrac{2a-1}{3a-2} > 1$.

<u>Equilibris de Nash del joc</u>		
	$[a, c, e] = [1, 1, 1]$	(un equilibri)
	$[a, c, e] = [0, 0, \frac{1}{2}]$	(un equilibri)
	$[a, c, e] = [a, a, \dfrac{1-2a}{2-3a}]$ amb $0 < a < \frac{1}{2}$	(nombre infinit d'equilibris)

Q6. Determina els pagaments dels jugadors a cada equilibri de Nash.