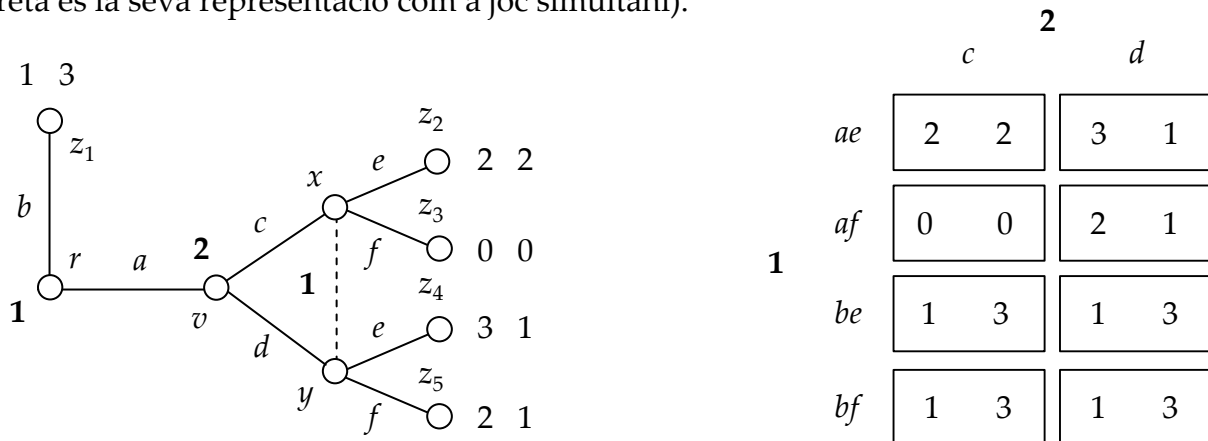


Exemple sobre el teorema de Kuhn

Sigui el joc seqüencial G amb memòria perfecta (i informació imperfecta) de l'esquerra (el joc de la dreta és la seva representació com a joc simultani).



Q1. Troba un joc seqüencial amb memòria perfecta que sigui diferent de G i que tingui la mateixa representació com a joc simultani que G .

El teorema de Kuhn estableix que, a tot joc amb memòria perfecta, els pagaments esperats per a tots els jugadors obtinguts amb una jugada σ formada per estratègies mixtes són els mateixos que els obtinguts amb la jugada β formada per les estratègies de comportament que representen les estratègies mixtes de la jugada σ .

Estratègia mixta \rightarrow Estratègia de comportament

Il·lustrem el teorema amb la jugada amb estratègies mixtes $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ tal que $\sigma_1(ae) = \frac{5}{12}$, $\sigma_1(af) = \frac{4}{12}$, $\sigma_1(be) = \frac{2}{12}$, $\sigma_1(bf) = \frac{1}{12}$ i $\sigma_2(c) = \frac{1}{2}$. Primer, trobem les estratègies de comportament β_1 i β_2 que representen aquestes estratègies mixtes. Per al cas del jugador 2 és fàcil: atès que només té un conjunt d'informació, les estratègies mixtes i les de comportament coincideixen. Per tant, $\beta_2 = \sigma_2$: l'estratègia mixta $\sigma_2(c) = \frac{1}{2}$ ja diu al jugador 2 què ha de fer a cada conjunt d'informació.

En canvi, l'estratègia mixta σ_1 no diu què ha de fer el jugador 1 a cadascun dels seus conjunts d'informació. Considerem primer el conjunt d'informació $\{r\}$. Es tracta de determinar quina és la probabilitat de triar a i de triar b que està embotida en σ_1 .

Comencem per l'acció a . El primer pas consisteix en determinar quines estratègies pures del jugador 1 són compatibles amb el conjunt d'informació $\{r\}$. Una estratègia pura d'1 és compatible amb $\{r\}$ si existeix alguna estratègia pura del jugador 2 que fa que la probabilitat d'arribar al conjunt d'informació $\{r\}$ sigui positiva. Però atès que r és l'arrel, la probabilitat d'arribar a r és 1: el joc comença allà. Com a conseqüència, totes les estratègies del jugador 1 són compatibles amb $\{r\}$. El primer pas culmina sumant les probabilitats que σ_1 assigna a totes les estratègies pures d'1 compatibles amb $\{r\}$. Atès que totes són compatibles i atès que σ_1 és una distribució de probabilitat sobre el total d'estratègies pures d'1, la suma de les probabilitats de les estratègies pures d'1 que són compatibles amb $\{r\}$ és 1.

El segon pas consisteix en identificar, entre les estratègies pures d'1 compatibles amb $\{r\}$, aquelles on es juga a i suma les probabilitats d'aquestes estratègies a σ_1 . Les estratègies compatibles on es juga a són ae i af . La suma de les probabilitats és $\sigma_1(ae) + \sigma_1(af) = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3}{4}$. La probabilitat $\beta_1(a)$ que l'estratègia de comportament que representa β_1 atribueix a l'acció a és el quocient entre el segon valor trobat, $\frac{3}{4}$, i el primer, 1. Així, $\beta_1(a) = \frac{3}{4}$. Per definició, una estratègia de comportament especifica una distribució de probabilitat sobre les accions del conjunt d'informació $\{r\}$. Donat que $\beta_1(a) = \frac{3}{4}$, resulta que $\beta_1(b) = \frac{1}{4}$. Ja tenim la distribució de probabilitat que l'estratègia de comportament β_1 que representa l'estratègia mixta σ_1 assigna al conjunt d'informació $\{r\}$ (per a més claredat, es podria haver escrit $\beta_{1r}(a) = \frac{3}{4}$ i $\beta_{1r}(b) = \frac{1}{4}$, per a emfasitzar que estem indicant la randomització al conjunt d'informació $\{r\}$).

Ara cal fer el mateix al segon conjunt d'informació $h = \{x, y\}$ del jugador 1. Prenguem l'acció e . Les estratègies pures d'1 compatibles amb h són només dos: ae i af (perquè si es tria b a l'arrel, no hi ha manera d'assolir el conjunt d'informació h). La suma de les probabilitats d'aquestes estratègies, segons σ_1 , és $\sigma_1(ae) + \sigma_1(af) = \frac{5}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3}{4}$. Com estem considerant l'acció e , cal seleccionar (entre les estratègies pures compatibles amb h) aquelles on es tria e . Només hi ha una: ae . La seva probabilitat, segons σ_1 , és $\sigma_1(ae) = \frac{5}{12}$. D'aquí, $\beta_1(e) = \frac{5}{12} / \frac{3}{4}$: quina és la proporció de probabilitat dels casos on es juga e respecte del total de casos compatibles amb h . En suma, $\beta_1(e) = \frac{5}{12} / \frac{3}{4} = \frac{5}{9}$ i $\beta_1(f) = 1 - \beta_1(e) = \frac{4}{9}$. Recapitulant: l'estratègia de comportament $\beta_1 = (\beta_{1r}, \beta_{1h})$, on h és el segon conjunt d'informació del jugador 1, que representa l'estratègia mixta σ_1 satisfà $\beta_{1r}(a) = \frac{3}{4}$, $\beta_{1r}(b) = \frac{1}{4}$, $\beta_{1h}(e) = \frac{5}{9}$ i $\beta_{1h}(f) = \frac{4}{9}$.

Q3. Als càlculs anteriors, no ha jugat cap paper la manera en què es distribueix la probabilitat restant $1 - [\sigma_1(ae) + \sigma_1(af)]$ entre be i bf . Comprova que σ_1 té la mateixa representació com a estratègia de comportament que l'estratègia mixta τ_1 tal que $\tau_1(ae) = \sigma_1(ae)$, $\tau_1(af) = \sigma_1(af)$, $\tau_1(be) = \frac{1}{12}$ i $\tau_1(bf) = \frac{2}{12}$.

Comparem els pagaments dels jugador jugant σ amb els pagaments jugant β . Els pagaments de jugar σ es determinen a la representació com a joc simultani. Per exemple, per al jugador 1, si $\sigma_1(ae) = \frac{5}{12}$, $\sigma_1(af) = \frac{4}{12}$, $\sigma_1(be) = \frac{2}{12}$, $\sigma_1(bf) = \frac{1}{12}$ i $\sigma_2(c) = \frac{1}{2}$ aleshores el pagament esperat d'1 és el pagament esperat de triar ae ($2 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2}$) més el pagament esperat de triar af ($0 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{2}$) més el pagament esperat de triar be ($1 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{2}$) més el pagament esperat de triar bf ($1 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2}$). Total: $\frac{39}{24}$.

Els pagaments de jugar β es determinen al propi joc seqüencial. Novament per al jugador 1, si $\beta_{1r}(a) = \frac{3}{4}$, $\beta_{1r}(b) = \frac{1}{4}$, $\beta_{1h}(e) = \frac{5}{9}$, $\beta_{1h}(f) = \frac{4}{9}$ i $\beta_2(c) = \beta_2(d) = \frac{1}{2}$ aleshores el pagament esperat d'1 és el pagament 1 obtingut al node terminal z_1 per la probabilitat d'arribar a z_1 ($1 \cdot \beta_{1r}(b) = 1 \cdot \frac{1}{4}$) més el pagament 2 obtingut al node terminal z_2 per la probabilitat d'arribar a z_2 ($2 \cdot \beta_{1r}(a) \cdot \beta_2(c) \cdot \beta_{1h}(e) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9}$) més el pagament 0 obtingut al node terminal z_3 per la probabilitat d'arribar a z_3 ($0 \cdot \beta_{1r}(a) \cdot \beta_2(c) \cdot \beta_{1h}(f) = 0 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}$) més el pagament 3 obtingut al node terminal z_4 per la probabilitat d'arribar a z_4 ($3 \cdot \beta_{1r}(a) \cdot \beta_2(d) \cdot \beta_{1h}(e) = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9}$) més el pagament 2 obtingut al node terminal z_5 per la probabilitat d'arribar a z_5 ($2 \cdot \beta_{1r}(a) \cdot \beta_2(d) \cdot \beta_{1h}(f) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}$). Total: $\frac{39}{24}$. Això significa que al jugador 1 tant li és jugar σ_1 que jugar β_1 : obté el mateix pagament esperat.

Q3. Comprova que el jugador 1 obté el mateix pagament esperat quan es juga σ_1 que quan es juga β .

Estratègia de comportament \rightarrow Estratègia mixta

El procediment per a passar d'una estratègia de comportament a una mixta és immediat: la probabilitat que la mixta assigna a l'estratègia s d'un jugador és el producte de les probabilitats que la de comportament atribueix a les accions que formen s .

Per exemple, partim de l'estratègia de comportament obtinguda abans per al jugador 1: $\beta_{1r}(a) = \frac{3}{4}$, $\beta_{1r}(b) = \frac{1}{4}$, $\beta_{1h}(e) = \frac{5}{9}$ i $\beta_{1h}(f) = \frac{4}{9}$. Aleshores, l'estratègia mixta τ_1 que representa l'estratègia de comportament β_1 satisfà el següent: $\tau_1(ae) = \beta_{1r}(a) \cdot \beta_{1h}(e) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{36}$; $\tau_1(af) = \beta_{1r}(a) \cdot \beta_{1h}(f) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{36}$; $\tau_1(be) = \beta_{1r}(b) \cdot \beta_{1h}(e) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{36}$; i $\tau_1(bf) = \beta_{1r}(b) \cdot \beta_{1h}(f) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{36}$.

Q4. Comprova que l'estratègia de comportament que representa l'estratègia mixta τ_1 és β_1 .

Per Q4 i pel teorema de Kuhn, jugar (β_1, β_2) proporciona a cada jugador el mateix pagament esperat que jugar $(\tau_1, \sigma_2) = (\tau_1, \beta_2)$.

Q5. Verifica que el pagament esperat del jugador 1 a la jugada (β_1, β_2) és el mateix que el seu pagament esperat a la jugada (τ_1, σ_2) .