Reparto de bienes indivisibles

Los elementos básicos del modelo

N Conjunto finito $\{1, 2, \dots, n\}$ de $n \geq 1$ individuos
X Conjunto finito de $n \geq 1$ objetos
L Conjunto de todas las preferencias (ordenaciones lineales) que se pueden definir sobre A
L^n Conjunto de perfiles de preferencias (atribución de una preferencia a cada una individuo)
P_i Designa la preferencia del individuo i en el perfil de preferencias $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$.

Asignación

Una asignación (de los objetos a los individuos) es una biyección $\alpha : N \to X$. La interpretación es que α: (i) asigna a cada individuo i un único objetivo $\alpha(i) \in X$; y (ii) no asigna el mismo objeto a dos individuos diferentes, de modo que, para individuos i y $j \neq i$, se tiene que $\alpha(i) \neq \alpha(j)$.

A Conjunto de todas las asignaciones

Regla de asignación

Una regla de asignación es una función $f : L^n \to A$ que asocia una asignación con cada perfil de preferencias de los individuos.

$f_i(P)$ Designa el objeto asignado al individuo i por la regla f cuando el perfil de preferencias es P

Una regla de asignación formaliza una forma de repartir los objetos entre los individuos que depende exclusivamente de las preferencias de los individuos sobre los objetos. La regla de asignación puede interpretarse como una función de elección social y como un mecanismo.

Ejemplo

Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y $X = \{a, b, c, d\}$. Consideremos el siguiente perfil de preferencias (elemento del conjunto L)

P_1	P_2	P_3	P_4
a	a	b	b
b	d	c	a
c	b	d	c
d	c	a	d

Fig. 1

en donde la columna P_i representa la preferencia del individuo $i \in N$. Una regla de asignación toma cada uno de los perfiles de preferencias posibles y establece cómo repartir los objetos de X entre los individuos. Por ejemplo, con $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ una regla de asignación f podría ser tal $f_1(P) = b$, $f_2(P) = d$, $f_3(P) = c$ y $f_4(P) = a$. Por tanto, $f(P) = (b, d, c, a)$, en donde (b, d, c, a) representa la asignación en la que 1 recibe b, 2 recibe d, 3 recibe c y 4 recibe a.

Q1. Expresa la asignación (b, d, c, a) mediante una bijección α entre el conjunt N y el X.

Q2. Si X tiene 4 elementos, ¿cuántas preferencias puede definirse sobre X? Y si, además, hay 4 individuos, ¿cuántos perfiles de preferencias hay?

¿Es razonable la asignación (b, d, c, a) dadas las preferencias (P_1, P_2, P_3, P_4) de la Fig. 1? Más bien no, porque la asignación es susceptible de ser mejorada. De hecho, si 1 y 4 intercambiaran los objetos que les han sido asignados, se llegaría a la asignación (a, d, c, b). En el paso de la primera a esta segunda asignación, 1 y 4 mejoran (porque obtienen un objeto más preferido que el que tenían) y nadie empeora (porque los otros dos individuos, 2 y 3, mantienen sus objetos).

Para objetos a y b, y preferencia p, $a\ p\ b$ significa que, en la preferencia p, el objeto a es preferido al objeto b. Por ejemplo, en la preferencia P_2 de la Fig. 1, el hecho de que d se prefiera a b se expresaría como $d\ P_2\ b$.

Asignación Paretoeficiente
Una asignación α es Paretoeficiente, dado un perfil de preferencias P, si no hay otra asignación β tal que: (i) para algun individuo i, $\beta(i)\ P_i\ \alpha(i)$; y (ii) para ningún individuo i, $\alpha(i)\ P_i\ \beta(i)$.

Para el perfil P de la Fig. 1, la asignación α = (b, d, c, a) no es Paretoeficiente, puesto que existe la asignación β = (a, d, c, b) que satisface (i) y (ii) de la definición de Paretoeficiencia: algún individuo mejora en el paso de α a β (los individuos 1 y 4) y ninguna empeora (1 y 4 mejoran; 2 y 3 se mantienen igual).

Q3. Para el perfil de preferencias de la Fig. 1, indica todas las asignaciones Paretoeficientes. Identifica 3 asignaciones, diferentes de (b, d, c, a), que no sean Paretoeficientes.

Q4. Recordando que siempre se asumirá que las preferencias son ordenaciones lineales (no hay indiferencia entre objetos), especifica un perfil de preferencias, con N = {1, 2, 3, 4} y X = {a, b, c, d}, para el que haya una única asignación Paretoeficiente. ¿Hay algún perfil de preferencias para el que no exista alguna asignación Paretoeficiente? ¿Hay algún perfil de preferencias para el que todas las asignaciones sean Paretoeficientes?

Regla de asignación Paretoeficiente
Una regla de asignación f es Paretoeficiente si, para todo perfil de preferencias P, $f(P)$ es una asignación Paretoeficiente.

Q5. Con N = {1, 2} y X = {a, b}, especifica todas las reglas de asignación posibles (¿cuántas son?) y, a continuación, identifica las cuatro reglas de asignación Paretoeficientes.

Supongamos que, para el perfil P de la Fig. 1, $f(P)$ = (a, d, c, b) y que $f(P_1, Q_2, P_3, P_4)$ = (b, a, c, d), en donde Q_2 es la preferencia *bacd* (b la opción más preferida, a la segunda más preferida…). Si éste fuera el caso y las preferencias se obtuvieran a partir de declaraciones que hacen los individuos, f sería una regla manipulable cuando P_2 es la preferencia auténtica de 2. La razón es que 2, declarando Q_2 en lugar de P_2, obtiene el objeto $f_2(P_1, Q_2, P_3, P_4) = a$, que 2 considera más preferido (de acuerdo con la preferencia P_2) que el objeto $f_2(P_1, P_2, P_3, P_4) = d$ que 2 consigue declarando la preferencia auténtica P_2. Esto hace que, cuando las preferencias de los otros individuos son P_1, P_3 y P_4, 2 tenga un incentivo a declarar Q_2 en lugar de P_2 en el caso en que P_2 es su preferencia auténtica. Una propiedad aparentemente deseable de una regla de asignación es que no dé incentivos a los individuos a revelar preferencias falsas.

Regla de asignación no manipulable
Una regla de asignación f es no manipulable (*strategy-proof*, a prueba de comportamientos estratégicos) si, para todo perfil de preferencias P, todo individuo $i \in N$ y toda preferencia $Q_i \in L$ de i, no se dé el caso que $f_i(Q_i, P_{-i})\ P_i\ f_i(P_i, P_{-i})$, en donde P_{-i} representa las preferencias de los individuos diferentes de i. Así, f es manipulable si hay P, i y Q_i tales que $f_i(Q_i, P_{-i})\ P_i\ f_i\ (P_i, P_{-i})$.

La condición "$f_i(Q_i, P_{-i})\ P_i\ f_i(P_i, P_{-i})$" dice que el objeto $f_i(Q_i, P_{-i})$ que i recibe declarando la preferencia Q_i (siendo P_{-i} las preferencias de los otros individuos) es preferido por i, según la preferencia P_i (que es la que implícitamente se presume como verdadera), al objeto $f_i(P_i, P_{-i}) = f_i(P)$ que i recibe declarando la preferencia P_i (manteniéndose las preferencias P_{-i} de los demás). Cuando $f_i(Q_i, P_{-i})\ P_i\ f_i(P_i, P_{-i})$ ocurre, i tiene incentivo a revelar que su preferencia es Q_i cuando realmente es P_i. La no manipulabilidad establece que esto no puede ocurrir: i no debe obtener un objeto más preferido, según la preferencia que tenga P_i, diciendo que su preferencia es una Q_i distinta de P_i.

La no manipulabilidad es una propiedad cuyo cumplimiento es más difícil que verificar que el cumplimiento de la Paretoeficiencia. Para cada perfil, habría que comparar, para cada jugador, el resultado de revelar la preferencia de ese perfil con el resultado de revelar cualquier otra preferencia.

Por ejemplo, para el perfil de la Fig. 1, habría que comprobar que no existe Q_1 tal que 1 prefiere $f_1(Q_1, P_2, P_3, P_4)$ a $f_1(P)$ cuando la preferencia de 1 es P_1; que no existe Q_2 tal que 2 prefiere $f_2(P_1, Q_2, P_3, P_4)$ a $f_2(P)$ cuando la preferencia de 2 es P_2; que no existe Q_3 tal que 3 prefiere $f_3(P_1, P_2, Q_3, P_4)$ a $f_3(P)$ cuando la preferencia de 3 es P_3; y que no existe Q_4 tal que 4 prefiere $f_4(P_1, P_2, P_3, Q_4)$ a $f_4(P)$ cuando la preferencia de 4 es P_4. Y esto sólo para el perfil P. Luego habría que hacer lo mismo para el resto de posibles perfiles…

Regla de asignación sin mandones
Una regla de asignación f no tiene mandones (es *nonbossy*) si, para todo perfil de preferencias P, todo individuo $i \in N$ y toda preferencia $Q_i \in L$ de i, $f(Q_i, P_{-i}) \neq f(P)$ implica $f_i(Q_i, P_{-i}) \neq f_i(P)$.

Un mandón es alguien que puede modificar lo que reciben los demás sin que él se vea afectado. La manera que, en este modelo, alguien puede modificar lo que reciben los demás es cambiando su preferencia. Por tanto, partiendo de $f(P)$, $f(Q_i, P_{-i})$ es la nueva asignación que produce la regla cuando i cambia su preferencia de P_i a Q_i. Supongamos que $f(Q_i, P_{-i}) = f(P)$: el cambio de preferencia de i produce un cambio en la asignación de objetos. Si, en este caso, $f_i(Q_i, P_{-i}) = f_i(P)$ entonces i sería un mandón, porque manifestando que su preferencia es Q_i en lugar de P_i, i modificaría lo que algún otro individuo recibe sin que i mismo se vea afectado. Por tanto, un capricho de i podría alterar injustificadamente lo que reciben los demás.

La propiedad de ausencia de mandones requiere que lo anterior no sea posible: si un cambio en la preferencia de i modifica la asignación, entonces él también se verá afectado recibiendo un objeto diferente. La ausencia de mandones significa que si i es el único responsable de que se modifique lo que los demás reciben, entonces, como consecuencia, i también verá modificado lo que recibe: cambiar lo que reciben los demás tiene el coste de cambiar lo que uno recibe.

Permutaciones

Sea $\pi : X \to X$ una permutación (biyección) de los objetos. Intepretando X como los nombres de los objetos, el objeto con nombre x pasa, tras la permutación, a llamarse $\pi(x)$. Dada una asignación α, sea α^π la asignación obtenida a partir de α reemplazando, para todo objeto $x \in X$, x por $\pi(x)$. Dado un perfil de preferencias P, sea P^π el perfil de preferencias obtenido de P reemplazando, para todo objeto $x \in X$, x por $\pi(x)$.

Por ejemplo, sea π la permutación de $X = \{a, b, c, d\}$ tal que $\pi(a) = c$, $\pi(b) = a$, $\pi(c) = b$ y $\pi(d) = d$. Si α es la asignación (a, d, c, b) entonces $\alpha^\pi = (c, d, b, a)$. Y si P es el perfil de preferencias de la Fig. 1, entonces P^π es el perfil mostrado en la Fig. 2.

P_1^π	P_2^π	P_3^π	P_4^π
c	c	a	a
a	d	b	c
b	a	d	b
d	b	c	d

Fig. 2

Regla de asignación neutral

Una regla de asignación f es <u>neutral</u> (es *nonbossy*) si, para toda permutación $\pi : X \to X$ y perfil de preferencias P, $f(P^\pi) = f(P)^\pi$.

Por ejemplo, sea $f(P) = (c, d, b, a)$, con P siendo el perfil de la Fig. 1. Tomemos la permutación $\pi(a) = c$, $\pi(b) = a$, $\pi(c) = b$ y $\pi(d) = d$, en la que a pasa a ser c, b pasa a ser a, c pasa a ser b y d sigue siendo d. Para que f sea neutral, el único efecto de cambiar el nombre de los objetos en las preferencias (pasar de tener P a tener P^π) es cambiar el nombre de los objetos en la asignación asociada con P (pasar de la asignación $f(P)$ a la asignación $f(P)^\pi$). Por tanto, para que f sea neutral, $f(P^\pi)$ ha de obtenerse permutando (según π) los objetos en $f(P) = (c, d, b, a)$. Así que la neutralidad de f demanda que $f(P^\pi) = (b, d, a, c)$, que es $f(P)^\pi$.

<u>La neutralidad significa que si cambiamos el nombre de los objetos en las preferencias entonces basta con cambiar el nombre en la asignación correspondiente a aquellas preferencias para tener la asignación correspondiente con las preferencias permutadas</u>. La neutralidad expresa la idea que el cambio de nombre de los objetos no debe alterar la manera en que los objetos se asignan.

Regla de asignación jerárquica

Una regla de asignación f es <u>jerárquica</u> si existe una ordenación lineal $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ de los individuos tal que, para <u>todo</u> perfil de preferencias P: (i) el objeto x_1 que i_1 recibe en $f(P)$ es su objeto más preferido en X según su preferencia P_{i_1}; (ii) el objeto x_2 que i_2 recibe en $f(P)$ es su objeto más preferido, según su preferencia P_{i_2}, en el conjunto $X \setminus \{x_1\}$ de los objetos que deja libres el individuo i_1; (iii) el objeto que i_3 recibe en $f(P)$ es su objeto más preferido, según su preferencia P_{i_3}, en el conjunto $X \setminus \{x_1, x_2\}$ de los objetos que dejan libres los individuos i_1 i i_2; y así sucesivamente.

Una regla jerárquica representa el siguiente mecanismo de asignación. Hay una ordenación jerárquica $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ de los individuos (siempre la misma) que determina $f(P)$ del siguiente modo. Primero, i_1 escoge el objeto que más prefiere. De entre lo que i_1 deja, i_2 escoge lo que más prefiere. De entre lo que i_1 e i_2 dejan, i_3 escoge lo que más prefiere. Y, en general, de entre lo que los individuos que preceden a i_k en la jerarquía han dejado, i_k escoge lo que más prefiere. Y así hasta que i_n se tiene que quedar con lo que los otros $n - 1$ individuos que le preceden en la jerarquía le han dejado.

¿Cómo se determina la jerarquía? No hay nada en la regla que lo diga, por lo que la jerarquía es exógena: dada una jerarquía, construimos la regla jerárquica correspondiente. Por ello, fijados N y X, hay tantas reglas jearárquicas como ordenaciones lineales de los individuos en N.

Q6. Con $N = \{1, 2\}$ y $X = \{a, b\}$, especifica todas las reglas de asignación jerárquicas que hay. Haz lo mismo para el caso $N = \{1, 2, 3\}$ y $X = \{a, b, c\}$.

Q7. Utiliza el resultado del ejercicio anterior con $N = \{1, 2, 3\}$ y $X = \{a, b, c\}$ para demostrar que una regla de asignación jerárquica es Paretoeficiente, no manipulable, sin mandones y neutral.

Un teorema de Svensson (1999)
Una regla de asignación que sea a la vez no manipulable, sin mandones y neutral es jerárquica.

Otro modelo de asignación de objetos
Hasta ahora, siempre se reparten los objetos del conjunto X. Se presenta ahora un modelo que trata el problema de <u>repartir objetos cuando el conjunto de objetos a asignar es variable</u>.

X^* Conjunto de todos los subconjuntos no vacíos del conjunto total X de objetos
0 Representa el objeto vacío (no recibir ningún objeto) y todo prefieren algún objeto al vacío

Asignación
Sea $Y \in X^*$ un subconjunto de objetos. Si Y tiene al menos tantos elementos como N, entonces una <u>asignación sobre Y</u> $\in X^*$ es una función inyectiva $\alpha : N \to Y$. En cambio, si Y menos elementos que N, entonces una <u>asignación</u> sobre $Y \in X^*$ es una función sobreyectiva $\alpha : N \to Y \cup \{0\}$ tal que, si $i \neq j$ y $\alpha(i) \neq 0 \neq \alpha(j)$ entonces $\alpha(i) \neq \alpha(j)$.

Una asignación sobre Y sigue siendo, en esencia, una forma de distribuir los objetos en Y entre los individuos. Cuando Y tiene al menos tantos elementos como N, todos los individuos reciben algún objeto, ningún objeto se asigna a la vez a dos individuos distintos y, además, pueden quedar objetos sin asignarse a nadie (puesto que cada individuo recibe exactamente un objeto). Cuando Y tiene menos objetos que N, sigue siendo cierto que ningún objeto se asigna a la vez a dos individuso distintos, pero ahora habrán individuos que no reciban ningún objeto.

A^* Conjunto $\{\alpha$: existe $Y \in X^*$ tal que α es una asignación sobre $Y\}$ de todas las asignaciones

Regla de asignación con conjunto variable de objetos
Una <u>regla de asignación con conjunto variable de objetos</u> es una función $F : L^n \times X^* \to A^*$ que asocia una asignación $F(P, Y)$ sobre Y con cada par (P, Y) consistente en un perfil P de preferencias de los individuos sobre X y un subconjunto Y del conjunto de objetos X.

Las reglas del tipo F solucionan más problemas de reparto que las reglas del tipo f. Las reglas del tipo F toman un subconjunto cualquiera Y del conjunto total X de objetos y toman las preferencias de los individuos sobre el conjunto X de todos los objetos y determina cómo se reparten los objetos del conjunto Y. En la asignación $F(P, Y)$, sea $F_i(P, Y)$ lo que recibe el individuo i. Consideremos las siguientes propiedades de F.

Independencia de objetos irrelevantes

La regla $F : L^n \times X^* \to A^*$ es independiente de objetos irrelevantes cuando, para todo $P \in L^n$, todo $Q \in L^n$ y todo $Y \in X^*$, si cada individuo ordena el conjunto Y de la misma manera en P y en Q, entoces $F(P, Y) = F(Q, Y)$.

La propiedad anterior establece que, cuando se reparten los objetos del conjunto Y, sólo la preferencia sobre los objetos en Y es relevante para determinar cómo se reparten los objetos de Y. Por ejemplo, sea $N = \{1, 2\}$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$ y P y Q los siguientes perfiles.

P_1	P_2		Q_1	Q_2	
c	a		b	a	
b	c		a	a	
a	b		c	b	Fig. 3

La propiedad de independencia de objetos irrelevantes implica que $F(P, \{a, b\}) = F(Q, \{a, b\})$, puesto que el individuo 1 tiene la misma preferencia sobre $\{a, b\}$ en P_1 y en Q_1 y, además, el individuo 2 tiene la misma preferencia sobre $\{a, b\}$ en P_2 y en Q_2. De hecho, si se elimina el objeto irrelevante c (irrelevante porque no se reparte), entonces los dos perfiles de preferencias son iguales. Por tanto, mismas preferencias sobre los objetos repartidos deben conducir al mismo reparto de objetos.

Paretoeficiencia

Para todo $P \in L^n$ y todo $Y \in X^*$, $F(P, Y)$ es una asignación sobre Y <u>Paretoeficiente</u>, esto es, no existe ninguna otra asignación α sobre Y tal que: (i) algún individuo i prefiere, según la preferencia P_i, el objeto $\alpha(i)$ que le toca en α al objeto $F_i(P, Y)$ que le asigna la regla de reparto F; y (ii) ningún individuo j prefiere, según la preferencia P_j, el objeto $F_j(P, Y)$ que le asigna la regla de reparto F al objeto $\alpha(j)$ que le toca en α.

La Paretoeficiencia no dice más que la asignación $F(P, Y)$ que genere la regla de reparto no es susceptible de mejorar el bienestar de algún individuo sin empeorar el bienestar de ningún otro individuo.

Monotonía

La regla $F : L^n \times X^* \to A^*$ es monótona cuando, para todo $P \in L^n$, todo $Y \in X^*$, todo $x \in X \setminus Y$ y todo individuo i, no es el caso que i prefiere, según su preferencia P_i, el objeto $F_i(P, Y)$ al objeto $F_i(P, Y \cup \{x\})$.

La monotonía expresa la siguiente idea: <u>si augmenta el conjunto de objetos a repartir, nadie puede empeorar</u>. Por ejemplo, con perfil de preferencias P, supongamos que el problema consiste en repartir los objetos del conjunto Y. Sea $F_i(P, Y)$ lo que recibe i (que puede ser un objeto o el objeto vacío). Añadamos otro objeto al reparto, manteniendo las preferencias. La regla entonces genera la asignación $F(P, Y \cup \{x\})$ sobre $Y \cup \{x\}$ e i recibe $F_i(P, Y \cup \{x\})$. Monotonía dice que $F_i(P, Y \cup \{x\})$ no puede ser menos preferido que $F_i(P, Y)$. En particular, por ejemplo, si $F_i(P, Y) \neq 0$ entonces $F_i(P, Y \cup \{x\}) \neq 0$ puesto que se ha asumido que todos los individuos prefieren recibir algún objeto a no recibir ninguno.

Regla de asignación diárquicamente jerárquica

Una regla de asignación F es diárquicamente jerárquica si existe una secuencia $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ de subconjuntos del conjunto de individuos tal que: (i) cada conjunto I_k tiene uno o dos elementos; (ii) $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ es una partición[1] del conjunto de individuos N; y (iii) para cada conjunto I_k con dos elementos, hay un subconjunto de objetos $X_k \neq X$ no vacío de X tal que, para todo perfil de preferencias P y todo subconjunto $Y^* \in X$ de objetos:

(a) si I_1 tiene un único miembro i, entonces i recibe en $F(P, Y)$ su objeto más preferido en Y según su preferencia P_i;
(b) si I_1 tiene dos miembros, i i j, entonces ambos reciben en $F(P, Y)$ sus objeto más preferidos en Y excepto si ambos prefieren el mismo objeto, en cuyo caso: (1) si ese objeto pertenece a X_1 se lo lleva i i j recibe su segundo objeto más preferido; y (2) si ese objeto no pertenece a X_1 se lo lleva j e i recibe su segundo objeto más preferido;
(c) si I_2 tiene un único miembro i, entonces i recibe en $F(P, Y)$ su objeto más preferido en lo que queda de Y una vez eliminado lo que se llevan los individuos en I_1;
(d) si I_2 tiene dos miembros, i i j, entonces ambos reciben en $F(P, Y)$ sus objeto más preferidos en lo que queda de Y una vez eliminado lo que se llevan los individuos en I_1, excepto si ambos prefieren el mismo objeto, en cuyo caso: (1) si ese objeto pertenece a X_2 se lo lleva i i j recibe su segundo objeto más preferido entre los objetos restantes; y (2) si ese objeto no pertenece a X_2 se lo lleva j e i recibe su segundo objeto más entre los objetos restantes;
(e) y así sucesivamente con I_3, I_4, etc.

Las reglas jerárquicas son el caso particular de las reglas diárquicamente jerárquicas en el que todos los conjuntos de la partición $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ tienen un único miembro. Las reglas diárquicamente jerárquicas son aquéllas que operan de la siguiente forma. Hay primeramente una jerarquía $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ tal que, en cada nivel de la jerarquía, hay uno o dos individuos. Como en las reglas jerárquicas, se puede interpretar que los individuos en niveles superiores de la jerarquía escogen antes que los que están en niveles inferiores. Cuando se llega al nivel k, si el conjunto I_k tiene un solo miembro, entonces ese miembro recibe lo que más prefiere entre lo que no han tomado los miembros de los niveles anteriores. Pero si I_k tiene dos miembros (hay una diarchía), existe la posibilidad de conflicto: que lo que ambos prefieran más entre lo que se encuentra disponible sea lo mismo. Entonces interviene el subconjunto de objetos X_k que se ha asignado a ese nivel. La idea es que X_k lista los objetos sobre los cuáles uno de los dos miembros tiene prioridad sobre el otro miembros del mismo nivel I_k de la jerarquía en caso de conflicto, de forma que el otro miembro tendrá prioridad para el resto de objetos $X \backslash X_k$. Así, en caso de

[1] El conjunto $\{S_1, \dots, S_r\}$ es una partición del conjunto S si: (i) $S_1 \cup \dots \cup S_r = S$; (ii) para todo $t \in \{1, \dots, r\}$, $S_t \neq \varnothing$; y (iii) para todo $t \in \{1, \dots, r\}$ y todo $t' \in \{1, \dots, r\} \backslash \{t\}$, $S_t \cap S_{t'} = \varnothing$.

conflicto, la lista X_k determina quién tiene prioridad, de forma que el otro individuo recibe lo que más prefiere entre lo que resta. En caso de que no haya conflicto, los dos miembros de I_k reciben sus objetos más preferidos entre los disponibles.

Un teorema de Ehlers y Klaus (2003)
Una regla de asignación con conjunto variables de objetos que sea a la vez independiente de objetos irrelevantes, Paretoeficiente y monótona es diárquicamente jerárquica.

Un tercer modelo de asignación de objetos
El modelo 2 amplía el modelo 1 permitiendo que varíe el conjunto de objetos a repartir. El modelo 3 que se presenta a continuación amplía el modelo 2 permitiendo que varíe el conjunto de individuos que participa en el problema de reparto. Por tanto, se trata de asignar objetos con conjuntos variables de objetos y de individuos.

Elementos del modelo
Seguimos teniendo un conjunto N de individuos y un conjunto X de objetos indivisibles, ambos conjuntos con el mismo número n de elementos. Para un subconjunto no vacío Y de X, L_Y designa el conjunto de preferencias (estrictas, esto es, sin indiferencia) que pueden definirse sobre el subconjunto Y de objetos. Una sociedad es un subconjunto no vacío de N. Un perfil de preferencias P_{IY} para una sociedad I sobre un subconjunto Y de objetos es una función $P_{IY} : I \to L_Y$ que asigna una preferencia $P_{IY}(i)$ sobre Y a cada miembro i de la sociedad I. Sea D el conjunto de todos los perfiles de preferencias.

Sea I una sociedad e Y un subconjunto de objetos. Si Y tiene al menos tantos elementos como I, una asignación de los objetos de Y entre los individuos de I es una función injectiva $\alpha_{IY} : I \to Y$ que asigna a cada miembro i de la sociedad I el objeto $\alpha_{IY}(i)$ del conjunto Y. Si Y tiene menos elementos que I entonces una asignación de los objetos de Y entre los individuos de I es una función inyectiva $\alpha_{IY} : J \to Y$ definida sobre algún subconjunto J de I que tiene el mismo número de elementos que I. La interpretación en este último caso es que los miembros de la sociedad J reciben cada uno un objeto, en tanto que los miembros de $I \backslash J$ no reciben ninguno (puesto que hay menos objetos a repartir que individuos que reciban). Sea A el conjunto de todas asignaciones.

Regla de asignación
Una regla de asignación es una función $F : D \to A$ que, para cada sociedad I y cada subconjunto Y de objetos, asocia una asignación $F(P_{IY})$ de los objetos de Y entre los miembros de I con cada perfil de preferencias P_{IY} de I sobre Y. Una regla de asignación así definida resuelve todos los problemas de asignación que involucren a cualesquiera sociedad y subconjunto de objetos.

Regla de poder
Una regla de poder es una función numérica que atribuye, a cada sociedad $I \subseteq N$, un índice numérico $w(I) > 0$ que mide el poder de la sociedad I.

Estructura de coaliciones
Una estructura de coaliciones sobre la sociedad I es una partición del conjunto I.

Estabilidad de una asignación

Una asignación α_{IY} es estable con respecto a la regla de poder w, el perfil de preferencias P_{IY} y la estructura de coaliciones C_I sobre I si no existe coalición K en C_I, grupo de individuos G en K, grupo de individuos J en $I\backslash K$ ni asignación β_{IY} tal que:

(i) el poder $w(G \cup J)$ de la coalición $G \cup J$ es mayor que el poder $w(K\backslash G)$ de la coalición residual $K\backslash G$;

(ii) para todo miembro i de la coalición $G \cup J$, i prefiere el objeto $\beta_{IY}(i)$ al objeto $\alpha_{IY}(i)$ según su preferencia $P_{IY}(i)$;

(iii) para todo miembro i de $I\backslash(K \cup G)$, $\beta_{IY}(i) = \alpha_{IY}(i)$.

La interpretación de la definición anterior es la siguiente. Sea K un miembro de la estructura de coaliciones C_I sobre I, donde la estructura de coaliciones C_I sobre I representa una organización de la sociedad I en diferentes grupos (clases sociales, territorios… lo que sea). Supongamos que existe un subgrupo G de K que puede unirse con un grupo J de individuos que no están en K (esto es, miembros del conjunto $I\backslash K$) y crear una nueva coalición $G \cup J$ que es más poderosa que lo que queda $K\backslash G$ de la coalición K cuando los miembros de G se van. Por tanto, $w(G \cup J) > w(K\backslash G)$. En tal caso, siendo $G \cup J$ una coalición más poderosa que $K\backslash G$, los miembros de $G \cup J$ podrían saquear la coalición $K\backslash G$. El saqueo estaría representado por otra asignación β_{IY}, en la que los individuos del grupo residual $I\backslash(K \cup G)$ no involucrados en este reparto forzoso se quedarían con lo que ya tienen y en la que los miembros de la coalición asaltante $G \cup J$ se repartirían todo lo que tienen los miembros de $K \cup G$ para su provecho. La estabilidad exige que esto no puede pasar.

Ejemplo de inestabilidad

Por ejemplo, supongamos que $I = \{1, 2, 3, 4\}$ e $Y = \{a, b, c, d\}$. La Fig. 4 muestra el perfil de preferencias P_{IY}. La estructura de coaliciones es $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. La regla de poder es tal que $w(1) = 6$, $w(2) = 5$, $w(3) = 2$, $w(4) = 4$ y el poder del resto de coaliciones es la suma de poder de sus miembros (de modo que, por ejemplo, el poder de la coalición $\{3, 4\}$ sería $w(\{3, 4\}) = w(3) + w(4) = 6$).

	P_1	P_2	P_3	P_4
	a	a	a	b
	d	b	b	c
	b	d	d	a
	c	c	c	d
w	**6**	**5**	**2**	**4**

Fig. 4

Sea α_{IY} la asignación tal que $\alpha_{IY}(1) = a$, $\alpha_{IY}(2) = b$, $\alpha_{IY}(3) = d$ y $\alpha_{IY}(4) = c$. Esta asignación se indica en la Fig. 4 mediante círculos. Para determinar si la asignación es estable con respecto a w, C_I y P_{IY} hay que determinar las posibilidades de saqueo, dadas las coaliciones $\{1, 2\}$ y $\{3, 4\}$. Por ejemplo, la coalición $\{1, 2\}$ es más poderosa que la coalición $\{3, 4\}$, ya que $w(\{1, 2\}) = 11$ y $w(\{3, 4\}) = 6$. Por tanto, la coalición $\{1, 2\}$ tiene la capacidad de tomar los objetos c y d asignados a la coalición $\{3, 4\}$ y repartírselos a conveniencia. Sin embargo, 1 ya obtiene su objeto más preferido, por lo que no le interesa disponer de c o d. Y, por otro lado, ni c ni d no son mejores para 2 que lo que ya tiene (b), de modo que ni 1 ni 2 están interesados en saquear la coalición $\{3, 4\}$.

Por el contrario, la coalición {3, 4} sí se beneficiaría del saqueo de la coalición {1, 2}, porque 3 podría quedarse con a, 4 con b y ambos mejorarían con respecto a la asignación α_{IY}. El problema para la coalición {3, 4} es que no tienen suficiente poder para saquear a la coalición {1, 2}.

Otra opción para los miembros de {3, 4} es juntarse con algún grupo de la coalición {1, 2} para saquear la coalición residual. Por ejemplo, si 3 y 4 se unen con 2, el individuo 1 queda solo y con menos poder que la nueva coalición {2, 3, 4}. En ese caso, la coalición {2, 3, 4} podría repartirse el conjunto de todos los objetos a su antojo. Para demostrar que la asignación α_{IY} es inestable habría que encontrar otra asignación que mejorara a todos los miembros de {2, 3, 4}. Para que 2 obtenga un objeto más preferido que en la asignación α_{IY}, 2 debe recibir a. Para mejorar a 3, hay que darle a o b, pero como a debe asignarse a 2, la única manera de mejorar la situación de 3 es dándole b. Pero esto hace que no sea posible mejorar a 4, que sólo considera b mejor a lo que ya tiene en la asignación α_{IY}. Conclusión: la coalición {2, 3, 4} no es viable para saquear la coalición {1} (se cumple la condición (i) de la definición de estabilidad pero no la (ii)).

Consideremos la posibilidad de que se unan 2 y 3. En este caso, se tendría K = {1, 2}, G = {2} y J = {3}: el propósito es saquear la coalición K mediante la unión de uno de sus miembros (2) con otro miembro (3) no perteneciente a la coalición. El conjunto de individuos $I\backslash(K \cup G)$ no involucrados en el asunto sería {4}. Comprobemos que se puede encontrar una asignación β_{IY} que satisface (i), (ii) y (iii), lo que demostraría la inestabilidad de la asignación α_{IY}.

Una tal asignación sería β_{IY} que satisfaga $\beta_{IY}(1) = d$, $\beta_{IY}(2) = a$, $\beta_{IY}(3) = b$ y $\beta_{IY}(4) = c$. La condición (i) exige que la coalición agresora $G \cup J$ = {2, 3} sea más poderosa que la coalición atacada $K\backslash G$ = {1}. Esta condición se cumple, dado que $w(\{2, 3\}) = w(2) + w(3) = 7 > w(1) = 6$. Así pues, la coalición {2, 3} tiene el poder de saquear la coalición {1}, y repartirse lo que tiene el conjunto {1, 2, 3} a antojo de 2 y 3 (lo que tiene este conjunto es $\{a, b, d\}$).

La condición (ii) requiere precisamente que haya una manera de contentar a todos los atacantes, esto es, de que exista el incentivo para que se unan y saqueen juntos. La asignación β_{IY} da estos incentivos, puesto que tanto 2 como 3 reciben un objeto que prefierenn al que reciben en α_{IY}. Por ello, ambos tienen el incentivo para unirse y saquear a 1. La cuestión no es que ambos reciban su objeto más preferido sino simplemente que reciban algo más preferido con lo que cuentan en la asignación α_{IY}. Y esto se cumple: 2 recibiría a (que es mejor que lo que recibía antes, b) y 3 recibiría b (que es mejor que lo que recibía antes, d).

Por último, la condición (iii) también se cumple, puesto que tanto en α_{IY} como en β_{IY} todos los miembros de $I\backslash(K \cup G)$ = {4} reciben lo mismo. Conclusión: la asignación α_{IY} no es estable con respecto a w, C_I y P_{IY}.

Q8. Determina si la asignación β_{IY} definida anteriormente es estable con respecto a w, P_{IY} y la estructura de coaliciones {{1}, {2, 3}, {4}}.

Q9. Encuentra una asignación γ_{IY} y una estructura de coaliciones C'_I tal que γ_{IY} sea estable con respecto a w, P_{IY} y C'_I. ¿Hay alguna asignación que sea estable con respecto a w, P_{IY} y la estructura de coaliciones formada por una sola coalición?

Robustez de una asignación

Una asignación α_{IY} es robusta con respecto a la regla de poder w y el perfil de preferencias P_{IY} si existen al menos dos estructuras de coaliciones C_I y C'_I sobre I tal que: (i) tanto C_I como C'_I no están formadas por una sola coalición; y (ii) α_{IY} es estable con respecto a w, P_{IY} y C_I y también con respecto a w, P_{IY} y C'_I.

Una asignación es robusta si es estable con respecto a dos estructuras de coaliciones que no sean "degeneradas", esto es, que no consistan en la gran coalición.

Existencia de dictatores

Con $m = n \geq 3$, sea F una regla de asignación Paretoeficiente que genera asignaciones robustas. Entonces existe una ordenación lineal (i_1, i_2, … , i_n) de los n individuos tal que, para toda sociedad I, el primer miembro de I que aparece en la ordenación es un dictator para todos los perfiles de preferencias para I.

El resultado anterior indica que el precio de la robustez es la dictadura: para toda sociedad, algún individuo siempre recibe lo que más prefiere.

Asignación de objetos con derechos de propiedad

Retomemos con el modelo inicial con dos diferencias. Primero, se permite que los individuos estén indiferentes entre dos o más objetos. Y segundo, cada uno de los n objetos se encuentra previamente asignado a alguno de los n individuos en forma de dotación. Por tanto, cada individuo i es propietario de alguno de los objetos w_i y de lo que se trata es de establecer (como en el modelo de equilibrio general con bienes divisibles) qué asignaciones podrían obtenerse mediante el intercambio. Este modelo de una economía se debe a Shapley y Scarf (1974).

Asignaciones vetables fuertemente

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, se dice que la coalición $C \subseteq N$ puede vetar fuertemente la asignación α si existe otra asignación β tal que:

(i) el conjunto $\{x \in X$: para algún $i \in C$, $\beta(i) = x\}$ de los objetos que reciben los miembros de la coalición C en β coincide con el conjunto $\{x \in X$: para algún $i \in C$, $w_i = x\}$ de los objetos que tienen los miembros de C;

(ii) (ii) para todo $i \in C$, i prefiere $\beta(i)$ a $\alpha(i)$ según la preferencia P_i.

Conjunto $C(w)$ de asignaciones del núcleo

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, el conjunto $C(w)$ de asignaciones del núcleo está formada por aquellas asignaciones que ninguna coalición puede vetar fuertemente.

Asignaciones vetables débilmente

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, se dice que la coalición $C \subseteq N$ puede vetar débilmente la asignación α si existe otra asignación β tal que:

(i) el conjunto $\{x \in X$: para algún $i \in C$, $\beta(i) = x\}$ de los objetos que reciben los miembros de la coalición C en β coincide con el conjunto $\{x \in X$: para algún $i \in C$, $w_i = x\}$ de los objetos que tienen los miembros de C;

(ii) para algún $i \in C$, i prefiere $\beta(i)$ a $\alpha(i)$ según la preferencia P_i; y

(iii) para todo $i \in C$, i prefiere $\beta(i)$ a $\alpha(i)$, o i es indiferente entre $\beta(i)$ a $\alpha(i)$, según P_i.

Conjunto $C_e(w)$ de asignaciones del núcleo estricto

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, el conjunto $C_e(w)$ de asignaciones del núcleo estricto está formado por aquellas asignaciones que ninguna coalición puede vetar débilmente.

Conjunto $P(w)$ de asignaciones Paretoeficientes

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, el conjunto P (w) de asignaciones Paretoeficientes está formado por aquellas asignaciones que la coalición N formada por todos los individuos no puede vetar débilmente.

Asignaciones de equilibrio $E(w)$

Dado un perfil de preferencias P y un asignación inicial w, la asignación α es una asignación de equilibrio si existe un vector n-dimensional $(p_1, p_2, \dots , p_n)$, en donde p_k representa el precio del objeto w_k que posee el individuo k, tal que, para todo individuo $i \in N$:

(i) si i prefiere el objeto w_j que inicialmente posee el individuo j al objeto $\alpha(i)$ que i recibe en α, entonces $p_j > p_i$ (el precio del objeto w_j ha de ser superior al precio del objeto w_i que inicialmente tiene i);

(ii) si $\alpha(i)$ es el objeto w_j que inicialmente posee el individuo j entonces $p_i \geq p_j$.

El conjunto $E(w)$ designa el conjunto de asignaciones de equilibrio, dado un perfil P.

Cada individuo i posee inicialmente un objeto w_i. Para definir un equilibrio, es preciso determinar el valor de ese objeto. Para ello se construye un vector de precios $(p_1, p_2, \dots , p_n)$, de forma que p_k es el precio del objeto w_k (el objeto poseído por el individuo k). La asignación α será un equilibrio con el vector de precios $(p_1, p_2, \dots , p_n)$ si, dado el valor de los objetos, todo individuo recibe en α alguno de los objetos más preferidos que es factible conseguir, donde el objeto w_j es factible para i si el precio de w_j no es superior al precio p_i del objeto w_i que posee i.

Secuencias de ciclos de comercio de los objetos más preferidos

Estas secuencias se basan en un algoritmo, atribuido a David Gale en Shapley y Shubik (1974), que permite determinar las asignaciones de equilibrio. La idea del algoritmo es que cada individuo i apunte a un individuo que posea alguno de los objetos más preferidos por i (cuando la preferencia de i es estricta, i apunta sólamente a un único individuo, que puede ser él mismo). De este modo se genera una secuencia en la que i_1 apunta a i_2, i_2 apunta a i_3, i_3 apunta a i_4, etc. Dado que el conjunto de individuos es finito, llegaré un momento en que alguno de los individuos apunte a otro que ya aparece en la secuencia. Con ello se genera un ciclo $j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow j_3 \rightarrow \dots \rightarrow j_r$. Este ciclo define una secuencia $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_r)$, que a su vez permite definir una asignación en la que todos los miembros del ciclo obtienen su objeto más preferido. La idea es que los miembros del conjunto $\{j_1, j_2, j_3, \dots, j_r\}$ ponen los objetos que poseen en común y cada uno escoge el objeto más preferido pensando en el cual habían apuntado a alguien. Por construcción de la secuencia, cada individuo escogerá un único objeto y cada uno de ellos, escogerá uno distinto. Eliminados los individuos del ciclo de comercio y los objetos que toman, se considera el problema de asignación de los objetos restantes entre los individuos no eliminados y se vuelven a buscar ciclos de comercio. El conjunto de asignaciones obtenidas de esta manera se designan por $CC(w)$.

Ejemplo de obtención de ciclos de comercio

Sea el problema de asignación de la parte izquierda de la Fig. 5, en donde los círculos indican el objeto que posee cada individuo.

P_1	P_2	P_3	P_4
a	a	a	b
d	b	b	c
b	d	d	a
c	c	c	d

P_1	P_2
d	d
c	c

Fig. 5

Escogamos a un individuo cualquiera, por ejemplo 1. El objeto más preferido de 1 lo tiene 4. Así que 1 apunta a 4: $1 \to 4$. El objeto más preferido de 4 lo tiene 3. Así que 4 apunta a 3: $4 \to 3$. El objeto más preferido de 3 lo tiene 4. Así que 3 apunta a 4: $3 \to 4$. Y ya hemos identificado un ciclo en la secuencia $1 \to 4 \to 3 \to 4$: el ciclo (4, 3, 4). Por tanto, 3 y 4 intercambian sus objetos: 3 se queda con a y 4 se queda con b. Eliminados 3, 4 y sus objetos, se obtiene el problema representado en la parte derecha de la Fig. 5. Ahora se tendría $1 \to 2 \to 2$. El ciclo resultante está formado exclusivamente por 2, que se apunta a sí mismo. Por ello, 2 se queda con d y, como no queda nadie más dispuesto a intercambiar, 1 se queda con c. La asignación resultante del intercambio mediante los ciclos de comercio es $CC(w) = \{(c, d, a, b)\}$, con $w = (c, d, b, a)$.

Q10. Con las preferencias de la Fig. 5 (parte izquierda), determina $CC(w)$ si $w = (b, c, d, a)$. Vuelve a calcular $CC(w)$ si $w = (b, a, c, d)$.

Resultados cuando se permite la indiferencia

- R1 $C_e(w) \subseteq E(w) \subseteq C(w)$
- R2 $C_e(w)$ puede estar vacío
- R3 $E(w) \neq \varnothing$ y, por R1, $C(w) \neq \varnothing$
- R4 $CC(w) = E(w)$
- R5 $E(w) \cap P(w)$ puede estar vacío (falla el Primer TF)

Resultados para preferencia estricta

- R6 $C_e(w) = E(w)$
- R7 $E(w)$ consiste en un elemento
- R8 Es posible que $E(w) \subset C(w)$

Ejemplo 1: Shapley y Scarf (1974)

Hay 3 individuos y tres objetos. El individuo i posee el objeto w_i. Las preferencias son las siguientes.

1	2	3
w_2	$w_1\ w_3$	w_2
$w_1\ w_3$	w_2	$w_1\ w_3$

Para obtener su objeto w_2 más preferido 1 se dirigiría a 2. Para obtener un objeto más preferido 2 se dirigiría a 1 o a 3. Por último, para obtener su objeto w_2 más preferido 3 se dirigiría a 2. Resultan pues dos secuencias de ciclos de comercio de los objetos más preferidos.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 3 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

La primer secuencia la inicia el ciclo de comercio que forma el conjunto {1, 2}. La distribución resultante (w_2, w_1, w_3) es aquélla obtenida cuando 1 y 2 intercambian sus objetos y 3 se queda con el suyo. La primer secuencia la inicia el ciclo que forma el conjunto {2, 3}. La distribución resultante (w_1, w_3, w_2) es aquélla obtenida cuando 2 y 3 intercambian sus objetos y 1 se queda con el suyo. Por tanto, el conjunto $CC(w)$ de las distribuciones que se obtienen mediante secuencias de ciclos de comercio de los objetos más preferidos tiene dos elementos: (w_2, w_1, w_3) y (w_1, w_3, w_2).

Por R4, (w_2, w_1, w_3) y (w_1, w_3, w_2) son las únicas distribuciones de equilibrio. ¿Cómo se encontrarían los precios de equilibrio? Escogiendo una secuencia de ciclos de comercio, dando a continuación el mismo precio a los objetos de los individuos que forman parte del mismo ciclo de comercio y un precio inferior a los objetos de los ciclos que vienen después en la secuencia de ciclos. Por ejemplo, en la secuencia ({1, 2}, {3}), los objetos de los individuos 1 y 2 tienen el mismo precio, que ha de ser superior al objeto del individuo 3. Por ello, el vector de precios p tal que $p_1 = p_2 > p_3$ es un vector de precios de equilibrio que hace que (w_2, w_1, w_3) sea una distribución de equilibrio.

Q11. Comprueba que el vector de precios p tal que $p_1 = p_2 > p_3$ es un vector de precios de equilibrio que hace que (w_2, w_1, w_3) sea una distribución de equilibrio.

Si la secuencia de ciclos de comercio que determina el reparto de objetos es ({2, 3}, {1}), el vector de precios p tal que $p_2 = p_3 > p_1$ es un vector de precios de equilibrio que hace que (w_1, w_3, w_2) sea una distribución de equilibrio.

Q12. Comprueba que el vector de precios p tal que $p_2 = p_3 > p_1$ es un vector de precios de equilibrio que hace que (w_1, w_3, w_2) sea una distribución de equilibrio.

Q13. ¿Por qué el vector de precios p tal que $p_1 = p_2 = p_3$ no es un vector de precios de equilibrio? ¿De qué objeto (u objetos) habría exceso de demanda?

Para determinar las distribuciones que pertenecen al núcleo $C(w)$, podemos considerar las 6 posibles distribuciones y verificar una por una que ninguna coalición puede vetar la distribución.

• <u>Distribución 1</u>: (w_1, w_2, w_3). Esta distribución no pertenece al núcleo porque los miembros de la coalición {2, 3} pueden repartirse sus dotaciones y obtener ambos un objeto más preferido que el que obtienen en la distribución (w_2, w_1, w_3). De hecho, si 2 y 3 intercambian sus dotaciones, se llega a la distribución (w_1, w_3, w_2), en la que tanto 2 como 3 obtienen un objeto más preferido que en (w_2, w_1, w_3). Por ello, la coalición {2, 3} puede vetar (w_2, w_1, w_3). Como resultado, (w_2, w_1, w_3) $\notin C(w)$.

• <u>Distribución 2</u>: (w_1, w_3, w_2). Ninguna coalición que contenga a 3 puede vetar esta distribución, puesto que 3 obtiene su objeto más preferido. Ninguna coalición que contenga a 2 puede vetar esta distribución, puesto que 2 obtiene uno de sus objetos más preferidos, de modo que no hay manera de hacerle mejorar. Esto deja a {1} como la única coalición que podría vetar (w_1, w_3, w_2).

Pero como la distribución (w_1, w_3, w_2) asigna a 1 el objeto de que dispone la coalición {1}, {1} no puede vetar (w_1, w_3, w_2). Conclusión: $(w_1, w_3, w_2) \in C(w)$.

El problema de (w_1, w_3, w_2) es que no pertenece al núcleo estricto, ya que la coalición {1, 2} puede vetar débilmente (w_1, w_3, w_2) mediante la distribución (w_2, w_1, w_3). Si 1 y 2 intercambian sus dotaciones, se consigue la distribución (w_2, w_1, w_3). Comparando (w_1, w_3, w_2) y (w_2, w_1, w_3) reultando obvio que 1 mejora y 2 no empeora, lo que hace que $(w_2, w_1, w_3) \notin C_e(w)$.

• <u>Distribución 3</u>: (w_2, w_1, w_3). Ninguna coalición que contenga a 1 puede vetar esta distribución, puesto que 1 obtiene su objeto más preferido. Ninguna coalición que contenga a 2 puede vetar esta distribución, puesto que 2 obtiene uno de sus objetos más preferidos. Esto deja a {3} como la única coalición que podría vetar (w_2, w_1, w_3). Pero {3} no puede hacerlo porque, en (w_2, w_1, w_3), 3 recibe el objeto de que dispone la coalición {3}. Así pues, $(w_2, w_1, w_3) \in C(w)$. Pero, como en el caso de la distribución 2, $(w_2, w_1, w_3) \notin C_e(w)$.

Q14. Demuestra que $(w_2, w_1, w_3) \notin C_e(w)$.

• <u>Distribución 4</u>: (w_2, w_3, w_1). En este caso, $(w_2, w_3, w_1) \in C(w)$ pero $(w_2, w_3, w_1) \notin C_e(w)$.

• <u>Distribución 5</u>: (w_3, w_2, w_1). En este caso, $(w_3, w_2, w_1) \notin C(w)$ y, por tanto, $(w_3, w_2, w_1) \notin C_e(w)$.

• <u>Distribución 6</u>: (w_3, w_1, w_2). En este caso, $(w_3, w_1, w_2) \in C(w)$ pero $(w_3, w_1, w_2) \notin C_e(w)$.

Q15. Demuestra las afirmaciones anteriores sobre las distribuciones 4, 5 y 6.

La conclusión final es que $C(w)$ contiene 4 elementos (las distribuciones 2, 3, 4 y 6), pero que $C_e(w)$ está vacío. Este ejemplo demuestra el resultado R2.

Ejemplo 2: Shapley y Scarf (1974)
Hay 3 individuos y tres objetos. El individuo i posee el objeto w_i. Las preferencias son las siguientes.

1	2	3
w_3	w_1	w_2
w_2	w_2	w_3
w_1	w_3	w_1

En este caso, hay una única secuencia de ciclos de comercio: 1 se dirige a 3, 3 se dirige a 2 y 2 se dirige a 1. Por tanto, la secuencia es ({1, 2, 3}) y la distribución resultante es (w_3, w_1, w_2). Por R4, $E(w) = \{(w_3, w_1, w_2)\}$, de modo que (w_3, w_1, w_2) es la única distribución de equilibrio.

Q16. Verifica que (w_3, w_1, w_2) pertenece tanto a $C(w)$ como a $C_e(w)$. Demuestra que no hay ninguna otra distribución en $C_e(w)$ y que, por tanto, $C_e(w) = E(w)$.

Sin embargo, $C(w) \neq E(w)$, lo que probaría R8. De hecho, $(w_2, w_1, w_3) \in C(w)$.

Q17. Demuestra que $(w_2, w_1, w_3) \in C(w)$.

Ejemplo 3: Wako (1999)

Hay 3 individuos y tres objetos. El individuo i posee el objeto w_i. Las preferencias son las siguientes.

1	2	3
w_2	w_1 w_3	w_2
w_3	w_2	w_1
w_1		w_3

Las secuencias de ciclos de comercio son las mismas que en el Ejemplo 1.

Q18. Verifica que las únicas secuencias de ciclos de comercio son ({1, 2}, {3}) y ({2, 3}, {1}).

La secuencia de ciclos ({1, 2}, {3}) da lugar a la distribución (w_2, w_1, w_3), en tanto que la secuencia ({2, 3}, {1}) da lugar a la distribución (w_1, w_3, w_2). Éstas dos constituyen las únicas distribuciones de equilibrio: $E(w) = \{(w_2, w_1, w_3), (w_1, w_3, w_2)\}$. Pero ninguna de ellas es Paretoeficiente, esto es, $(w_2, w_1, w_3) \notin P(w)$ y $(w_1, w_3, w_2) \notin P(w)$.

El hecho de que $(w_2, w_1, w_3) \notin P(w)$ se debe a que existe la distribución (w_2, w_3, w_1). Comparando ambas distribuciones, se observa que 1 y 2 están indiferentes en ambas, pero que 3 está mejor en la segunda.

Este ejemplo demuestra R5, a saber, que el Primer Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar puede fallar cuando los bienes son indivisibles: una distribución de equilibrio no necesariamente es una distribución Paretoeficiente. Lo grave del ejemplo es que puede ser que ninguna distribución de equilibrio sea Paretoeficiente.

Q19. Demuestra que $(w_1, w_3, w_2) \notin P(w)$. Calcula $C(w)$ y $C_e(w)$.

Bibliografía

- Ehlers, Lars y Klaus, Bettina (2003): "Resource-monotonicity for house allocation problems", *International Journal of Game Theory* 32, 545–560.
- Kamijo, Yoshio y Kawasaki, Ryo (2009): "Dynamics, stability, and foresight in the Shapley-Scarf housing market", Fondazione Eni Enrico Mattei, Working Paper 312.
- Shapley, Lloyd y Scarf, Herbert (1974): "On cores and indivisibility", *Journal of Mathematical Economics* 1, 23–37.
- Svensson, Lars-Gunnar (1999): "Strategy-proof allocation of indivisible goods", *Social Choice and Welfare* 16, 557–567.
- Wako, Jun (1999): "Coalition-proofness of the competitive allocations in an indivisible goods market", en Myrna H. Wooders (ed): *Topics in Mathematical Economics and Game Theory. Essays in Honor of Robert J. Aumann*, American Mathematical Society, pp. 277-83.