Jocs amb informació incompleta

Una de professors guillats

Hi ha un professor (jugador 1) i els estudiants (jugador 2). El professor decideix si avaluar mitjançant un examen difícil (estratègia *d*) o fàcil (estratègia *f*). Els estudiants decideixen, ignorant el tipus d'examen, si estudiar (estratègia *e*) o no estudiar (estratègia *n*). A més, els estudiants ignoren si el professor que tenen és el típic professor o està guillat. En aquest segon cas, al professor tant li és tot i actua de forma que s'inverteixen les preferències dels estudiants sobre els resultats del joc. Per exemple, el resultat més preferit per als estudiants és que l'examen sigui fàcil i ells no hagin d'estudiar. Quan el professor està pertorbat, posa un examen fàcil i els estudiants no estudien, però després suspèn a tothom amb un zero amb independència del que hagin respost, fent que aquest sigui el pitjor resultat per als estudiants.

		2	
		e	*n*
1	*d*	3 1	1 0
	f	2 2	0 3

professor "normal"

		2	
		e	*n*
1	*d*	0 2	0 3
	f	0 1	0 0

professor "trastornat"

Fig. 1

La diferència entre aquest tipus de joc i els considerats fins ara és que la informació d'algun dels jugadors és incompleta, això és, algun jugador ignora algun dels elements que descriuen el joc[1]. En general, aquest ignorància pot expressar-se en termes d'ignorància sobre els pagaments d'algun dels altres jugadors. Això fa que es pugui entendre un joc d'informació incompleta com un on algun jugador té incertesa sobre els pagaments d'algun altre jugador.

Al joc anterior, els estudiants no saben si estan jugant el joc de l'esquerra de la Fig. 1 o el joc de la dreta. John C. Harsanyi (1967–68), premi Nobel d'Economia el 1994[2], va proposar una manera de transformar un joc d'informació incompleta en un d'informació imperfecta. La idea és que un jugador *i* que ignora els pagaments d'un altre jugador *j* pot ser tractar com un jugador que té incertesa sobre el tipus de jugador *j* al qual s'enfronta. Aleshores n'hi ha prou amb considerar que la naturalesa tria, d'acord amb una certa distribució de probabilitat, el tipus de jugador *j* amb el qual *i* juga. Atès que *i* ignora la decisió de la naturalesa, el joc queda transformat en un d'informació imperfecta. Per exemple, al cas de la Fig. 1, els estudiants poden assumir que la naturalesa tria al professor "normal" amb probabilitat p i tria al professor "trastornat" amb probabilitat $1 - p$. El joc resultant (un joc amb una distribució de probabilitat sobre els tipus que pot assumir algun jugador) s'anomena joc baiesià.

---

[1] No s'ha de confondre "informació imperfecta" amb "informació incompleta". La informació imperfecta es refereix a la ignorància d'algun jugador sobre les decisions d'altres jugadors. La informació incompleta es refereix a la ignorància d'algun jugador sobre les característiques d'algun altre jugador (per exemple, els seus pagaments).

[2] http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1994/harsanyi-autobio.html.

Definició de joc baiesià

Un joc (simultani) baiesià està format pels següents elements.

- Un conjunt finit i no buit N d'n jugadors.
- Per a cada jugador $i \in N$, un conjunt finit i no buit S_i d'accions del jugador i.
- Per a cada jugador $i \in N$, un conjunt finit i no buit T_i de tipus del jugador i (i sap el seu tipus).
- Una distribució de probabilitat $\mu \in \Delta(T)$ sobre el conjunt $T = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n = \prod_{i \in N} T_i$ de totes les combinacions de tipus dels n jugadors, consistent amb el fet que cada i sap el seu tipus.
- Per a cada jugador $i \in N$, una funció de pagaments $u_i(s, t)$ que especifica el pagament del jugador i quan es juga la jugada $s \in \prod_{i \in N} S_i$ i cada jugador j és del tipus t_j que estableix $t \in T$.

La novetat que aporta un joc baiesià és fet dependre els pagaments d'un jugador, no només de les decisions dels jugadors, sinó dels tipus dels jugadors. Per exemple, a la Fig. 1, el professor pot ser de dos tipus, t_{11} = normal i t_{12} = trastornat; en canvi, els estudiants són només d'un tipus, t_2. Per tant, el conjunt de combinacions de tipus és $T = \{(t_{11}, t_2), (t_{12}, t_2)\}$. La descripció ha de donar la distribució de probabilitat μ, que s'assumeix coneguda per tots els jugadors. En aquest cas, la probabilitat és indeterminada: $\mu(t_{11}, t_2) = p$ i, per tant, $\mu(t_{12}, t_2) = 1 - p$.

La distribució marginal de probabilitat d'un tipus és la suma de les probabilitats de tots els t que contenen aquell tipus. Per exemple, la probabilitat del tipus t_{11} és $\mu(t_{11}, t_2) = p$. En canvi, la probabilitat del tipus t_2 és $\mu(t_{11}, t_2) + \mu(t_{12}, t_2) = 1$.

Q1. Sigui un joc baiesià amb dos jugadors tal que $T_1 = \{1, 2, 3\}$ i $T_2 = \{4, 5\}$. Sigui $\mu \in \Delta(T)$ tal que: $\mu(1, 4) = 1/10$, $\mu(1, 5) = 4/10$, $\mu(2, 4) = \mu(3, 5) = 0$, $\mu(2, 5) = 2/10$ i $\mu(3, 4) = 3/10$. Calcula la distribució marginal de probabilitat de cada tipus. Modifica μ per a què el tipus 3 tingui probabilitat zero.

La distribució de probabilitat $\mu(t_{-i}|t_i)$ de la combinació tipus t_{-i} condicionada pel tipus t_i (o, simplement, la probabilitat de t_{-i} donat t_i) és la probabilitat obtinguda aplicant la fórmula de Bayes: $\mu(t_{-i}|t_i)$ és la probabilitat $\mu(t_i, t_{-i})$ dividida per la suma, per a tot t_{-i}', de les probabilitats $\mu(t_i, t_{-i}')$. A la distribució de Q1, $\mu(4|1) = \mu(1, 4) / (\mu(1, 4) + \mu(1, 5)) = 1/10 / (1/10 + 4/10) = 1/5$. La idea és que la probabilitat condicionada de t_{-i} donat t_i captura la informació que rep el jugador i sobre els tipus dels altres jugadors quan sap que el seu propi tipus és t_i. Al cas anterior, si el jugador 1 sap que el seu tipus és 1, la probabilitat total de les combinacions de tipus que contenen el tipus 1 és $1/10$ [la probabilitat que la combinació sigui (1, 4)] més $4/10$ [la probabilitat que la combinació sigui (1, 5)]. La proporció que (1, 4) representa d'aquesta probabilitat total $5/10$ és $1/10 / 5/10 = 1/5$, ja que (quan el tipus 1 succeeix) la probabilitat de ser del tipus 4 és quatre vegades inferior a la probabilitat de ser del tipus 5 ($1/10$ contra $4/10$). Això fa que la probabilitat condicionada $\mu(4|1)$, del 20%, sigui quatre vegades inferior a la probabilitat condicionada $\mu(5|1)$, que és del 80%.

Q2. Amb les dades de Q1, calcula $\mu(5|2)$ i $\mu(2|5)$. Modifica μ per a què $\mu(5|2) = \mu(2|5)$.

Estratègies a un joc baiesià

Una estratègia d'un jugador i a un joc baiesià consisteix en assignar una distribució de probabilitat sobre S_i a cada tipus del jugador i. Per tant, una estratègia del jugador i és una funció $\sigma_i : T_i \to \Delta(S_i)$. Una jugada a un joc baiesià consisteix en especificar una estratègia per a cada jugador. L'extensió de la funció de pagaments de cada jugador al cas on les estratègies són mixtes es fa de la manera habitual: sumant pagaments ponderats per les probabilitats.

Una estratègia d'un jugador a un joc baiesià és una funció que assigna una estratègia (possiblement mixta) a cada tipus del jugador. Al joc de la Fig. 1, una estratègia del jugador 1 especificaria què fa el professor si és del tipus normal i què fa si és del tipus pertorbat. Per exemple, l'estratègia σ_1 tal que $\sigma_1(t_{11}) = d$ i tal que $\sigma_1(t_{12})$ assigna probabilitat ½ a d és l'estratègia on el professor normal proposa un examen difícil als estudiants i on el professor pertorbat proposa un examen difícil amb probabilitat ½.

Quins serien els pagaments de la jugada (σ_1, σ_2) on σ_1 és l'estratègia definida anteriorment i σ_2 és l'estratègia on e es juga amb probabilitat ⅓? Al cas del jugador 2, els seus pagaments serien la suma del pagament esperat quan el professor és del tipus normal, $p\cdot[⅓\cdot 1 + ⅔\cdot 0]$, i del pagament esperat quan el professor és del tipus trastornat, $(1 - p)\cdot[⅓\cdot(½\cdot 2 + ½\cdot 1) + ⅔\cdot(½\cdot 3 + ½\cdot 0)]$.

Q3. Calcula el pagament esperat del jugador 1 a la jugada (σ_1, σ_2) anteriorment definida. Troba una jugada on tots dos jugadors obtinguin el mateix pagament esperat. Troba una jugada on el pagament esperat del jugador 1 sigui 1.

Definició d'equilibri baiesià

Un equilibri baiesià (també anomenat equilibri de Nash-Bayes) d'un joc baiesià és una jugada $\sigma = (\sigma_i)_{i\in N} \in \prod_{i\in N} \Delta(S_i)$ formada per estratègies mixtes tal que, per a tot jugador $i \in N$, tot tipus $t_i \in T_i$ del jugador i i tota estratègia pura $s_i \in S_i$ del jugador i,

$$\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \mu(t_{-i}|t_i)\cdot u_i((\sigma_i(t_i), \sigma_{-i}(t_{-i})), (t_i, t_{-i})) \geq \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \mu(t_{-i}|t_i)\cdot u_i((s_i, \sigma_{-i}(t_{-i})), (t_i, t_{-i})) \qquad (1)$$

on $\sigma_{-i}(t_{-i})$ són les estratègies assignades a cada tipus dels jugadors diferent de l'i.

La definició anterior no diu més que un equilibri baiesià és un equilibri de Nash del joc baiesià. Que la jugada σ sigui un equilibri baiesià vol dir que cap tipus de cap jugador no té una estratègia (pura) que li dóna més pagament esperat que el pagament que obté a la jugada σ.

Exemple de càlcul d'equilibris baiesians

Calculem els equilibris baiesians del joc de la Fig. 1. Cal procedir jugador a jugador, i tipus a tipus de cada jugador. Comencem pel jugador 1 i el seu primer tipus: t_{11} = "normal". Atès que els jugadors sempre saben quin és el seu propi tipus, quan 1 és de tipus t_{11} sap que està jugant el joc del costat esquerre a la Fig. 1. En aquest joc, d és fortament dominant, de forma que, a tot equilibri baiesià σ, $\sigma_1(t_{11}) = d$: el tipus t_{11} del jugador 1 sempre tria d amb probabilitat 1.

Considerem ara el tipus t_{12} (= trastornat) del jugador 1. En aquest cas, quan 1 és del tipus t_{12}, 1 sap que juga el joc del costat dret a la Fig. 1, on tota estratègia li maximitza el pagament. Això no vol dir que tota estratègia que jugui el tipus t_{12} sigui un equilibri baiesià, perquè cal tenir en compte les restriccions que imposa el jugador 2.

El jugador 2 només té un tipus, de manera que no pot distingir a quina de les dues matrius de la Fig. 1 està jugant. Aquí és on es pot il·lustrar més clarament (1). El problema del jugador 2 és que la mateixa estratègia s'aplica tant al tipus t_{11} com al tipus t_{12} del jugador 1, atès que 2 no pot saber contra quin tipus està jugant. Per tant, per a què l'estratègia triada sigui part d'un equilibri baiesià cal que sigui "suficientment bona" quan s'enfronta al que fan els dos tipus. La condició (1) expressa aquesta idea considerant la suma de pagaments: la suma dels pagaments (ponderats per la probabilitat de cada tipus del jugador 1) que 2 espera obtenir contra cada tipus del jugador 1 ha de ser la màxima possible.

Determinem el pagament esperat de 2 si 2 tria e. Quan e es juga contra el tipus t_{11} (ens trobem a la matriu esquerra de la Fig. 1), el pagament esperat és 1, perquè ja s'ha determinat que el tipus t_{11} del jugador 1 tria d a tot equilibri baiesià. Quan e es juga contra el tipus t_{12} (ens trobem a la matriu dreta de la Fig. 1), el pagament esperat és $2d + 1\cdot(1 - d)$, on d és la probabilitat amb què el tipus t_{12} tria d. Atès que la probabilitat d'enfrontar-se amb el tipus t_{11} és p i la probabilitat d'enfrontar-se al tipus t_{12} és $1 - p$ el pagament esperat de 2 quan tria e és

$$p\cdot 1 + (1 - p)\cdot(2d + 1\cdot(1 - d)),$$

això és,

$$p + (1 - p)\cdot(1 + d). \tag{2}$$

Determinem el pagament esperat de 2 si 2 tria n. Quan n es juga contra el tipus t_{11}, el pagament esperat de 2 és 0, ja que el tipus t_{11} del jugador 1 tria d a tot equilibri baiesià. Quan n es juga contra el tipus t_{12}, el pagament esperat de 2 és $3d + 0\cdot(1 - d) = 3d$. Com abans, ponderant cada pagament per la probabilitat del tipus corresponent i sumant, resulta que el pagament esperat de 2 quan tria n és

$$p\cdot 0 + (1 - p)\cdot 3d =$$

això és,

$$(1 - p)\cdot 3d. \tag{3}$$

Ara cal considerar les tres possibilitats: que jugar e sigui part d'un equilibri baiesià; que ho sigui jugar n; o que ho sigui una mixta entre e i n.

• <u>Cas 1: equilibris baiesians on 2 tria e</u> (per tant, on es tria n amb probabilitat zero). Per a què triar e sigui millor que triar n cal que (2) sigui més gran que (3). Així, per a què $p + (1 - p)\cdot(1 + d) \geq (1 - p)\cdot 3d$ cal que $d \leq \frac{1}{2(1-p)}\cdot$ Per conseqüent, tota jugada σ tal que $\sigma_1(t_{11}) = d$, $\sigma_1(t_{12})$ assigna probabilitat a d no superior a $\frac{1}{2(1-p)}$ i $\sigma_2 = e$ és un equilibri baiesià.

• <u>Cas 2: equilibris baiesians on 2 tria n</u>. Ara cal que $d \geq \frac{1}{2(1-p)}$ i tota jugada τ tal que $\tau_1(t_{11}) = d$, $\tau_1(t_{12})$ assigna probabilitat a d no inferior a $\frac{1}{2(1-p)}$ i $\tau_2 = n$ és un equilibri baiesià.

• <u>Cas 3: equilibris baiesians on 2 tria e i n amb probabilitat positiva</u>. En aquest cas, és necessari que (2) sigui igual a (3), de forma que $d = \frac{1}{2(1-p)}$. D'aquí que tota jugada ω tal que $\omega_1(t_{11}) = d$, $\omega_1(t_{12})$ assigna probabilitat $\frac{1}{2(1-p)}$ a d i ω_2 assigna qualsevol probabilitat (entre 0 i 1) a e és un equilibri baiesià.

Q4. Calcula els pagaments esperats de cada jugador del joc de la Fig. 1 a cadascun dels equilibris baiesians calculats. Al cas 1, comprova que 2 no obté un pagament superior triant n.

Q5. Calcula els equilibris baiesians del joc de la Fig. 2, on el jugador 2 només té un tipus i el jugador 1 pot ser de dos tipus, el primer dels quals té probabilitat $p \in (0, 1)$. Aquest joc representa dues empreses. L'empresa 1 decideix si fer una inversió per a modernitzar la planta productiva (acció a) o no fer-la. L'empresa 2 decideix si entrar al mercat de l'empresa 1 (acció c) o no. El cost de la inversió pot ser alt (amb probabilitat p) o baix. L'empresa 2 ignora el cost de la inversió, que defineix el tipus d'empresa 1.

1 \ 2	c	d
a	0, –2	4, 0
b	4, 2	6, 0

p

1 \ 2	c	d
a	3, –2	7, 0
b	4, 2	6, 0

$1 - p$

Fig. 2. Un joc de Ratliff (1997)

Q6. Calcula els equilibris baiesians del joc de la Fig. 3, on el jugador 2 només té un tipus i el jugador 1 pot ser de dos tipus, cadascun amb probabilitat $p = ½$. El joc representa un joc del tipus "batalla dels sexes" on el jugador 1 no està segur si el jugador 2 vol trobar-se amb el jugador 1 (matriu esquerra) o no vol (matriu dreta). Calcula'ls si és 2 el que té dos tipus i 1 un.

1 \ 2	c	d
a	2, 1	0, 0
b	0, 0	1, 2

$p = ½$

1 \ 2	c	d
a	2, 0	0, 2
b	0, 1	1, 0

$1 - p = ½$

Fig. 3. Un joc d'Osborne (2004, p. 274)

Q7. Calcula els equilibris baiesians del joc de la Fig. 4, on el jugador 2 només té un tipus i el jugador 1 pot ser de dos tipus, el primer dels quals té probabilitat $p \in (0, 1)$.

1 \ 2	c	d
a	3, 2	2, 1
b	0, 0	1, 3

p

1 \ 2	c	d
a	1, 2	0, 1
b	2, 0	3, 3

$1 - p$

Fig. 4. Un joc de Vega-Redondo (2003, p. 189)

Q8. Calcula els equilibris baiesians del joc de la Fig. 5, on el jugador 2 només té un tipus i el jugador 1 pot ser de dos tipus, el primer dels quals té una probabilitat del 60%.

1	*c*	*d*
a	1 2	0 1
b	0 4	1 3

$p = 3/5$

1	*c*	*d*
a	1 3	0 4
b	0 1	1 2

$1 - p = 2/5$

Fig. 5. Un joc de Myerson (1991, p. 128)

Q9. Calcula els equilibris baiesians del joc de la Fig. 6, on el jugador 2 només té un tipus i el jugador 1 pot ser de dos tipus, el primer dels quals té probabilitat $p \in (0, 1)$.

1 \ 2	*c*	*d*
a	3 1	1 0
b	2 2	0 3

p

1 \ 2	*c*	*d*
a	0 1	2 0
b	1 2	3 3

$1 - p$

Fig. 6

Purificació d'estratègies mixtes a un equilibri de Nash

Un dels inconvenients de ser equilibri de Nash és que, si σ és un equilibri de Nash, aleshores no totes les millors respostes d'un jugador *i* a σ_{-i} són estratègies d'equilibri. Per exemple, el joc de la Fig. 7 només dos equilibris de Nash (fins i tot quan es permeten estratègies mixtes): [*a*, *c*] i [*b*, *d*]. El cas és que el jugador 1 és indiferent entre *a* i *b* quan expecta que 2 triï *c*, però només triar *a* amb probabilitat 1 és part d'un equilibri de Nash.

El problema és una mica més seriós quan les estratègies d'equilibri són mixtes: si un jugador és indiferent entre dues estratègies pures, perquè randomitzar? John C. Harsanyi (1973) demostrà que "gairebé tots" els equilibris de Nash d'un joc simultani poden ser reinterpretats com a equilibris amb estratègies pures quan els pagaments del joc experimenten fluctuacions aletòries.

El joc de la Fig. 8 permet il·lustrar el procés de "purificació" d'estratègies mixtes a un equilibri de Nash. El joc de la Fig. 8 només té un equilibri de Nash: [*a*, *c*] = [⅔, ½]. Ara transformen el joc de la Fig. 8 en un joc amb informació incompleta. La idea és que el jugadors reben informació privada representada pel valor d'una determinada variable aleatòria que incideix sobre els seus pagaments. La Fig. 9 mostra una possible transformació, on $0 < \varepsilon < 1$ i on α i β són variables aleatòries, independents i idènticament distribuïdes, de manera uniforme, sobre l'interval [0, 1]. La variable α representa la informació privada que rep el jugador 1 però que ignora el jugador 2. Per tant, des de la perspectiva del jugador 2, el conjunt de valors que pot prendre α és el conjunt de tipus del jugador 1[3]. De manera similar, la variable α representa la informació privada que rep el jugador 2 però que ignora el jugador 1. Des de la perspectiva d'1, el conjunt de valors que pot prendre β és el conjunt de tipus del jugador 2.

		2	
		c	*d*
1	*a*	2 2	0 2
	b	2 0	1 1

Fig. 7

		2	
		c	*d*
1	*a*	1 1	1 0
	b	2 1	0 3

Fig. 8

		2	
		c	*d*
1	*a*	$1+\varepsilon\alpha$ $1+\varepsilon\beta$	$1+\varepsilon\alpha$ 0
	b	2 $1+\varepsilon\beta$	0 3

Fig. 9

La forma en què els valors d'α i β alteren els pagaments dels jugadors es veu afectada per un paràmetre ε. Quan $\varepsilon = 0$, la informació privada que reben els jugadors no afecta els pagaments i el joc de la Fig. 9 coincideix amb el joc de la Fig. 8. Fixat ε, el joc amb informació incompleta de la Fig. 9 té, "gairebé sempre", un únic equilibri baiesià. En aquest equilibri el jugador 1 tria *a* si $\alpha < \frac{4-\varepsilon}{6+\varepsilon^2}$ i tria *b* si $\alpha > \frac{4-\varepsilon}{6+\varepsilon^2}$; i el jugador 2 tria *c* si $\beta < \frac{3+2\varepsilon}{6+\varepsilon^2}$ i tria *d* si $\beta > \frac{3+2\varepsilon}{6+\varepsilon^2}$.

Els equilibris baiesians del joc de la Fig. 9 s'han calculat de la següent manera. D'entrada, no hi ha equilibris baiesians amb estratègies pures: (i) [*a*, *c*] no és equilibri baiesià perquè *a* no és millor resposta a *c*, atès que, per les hipòtesis sobre ε i α, $1 + \varepsilon\alpha$ és sempre inferior a 2; (ii) [*a*, *d*] no és equilibri baiesià perquè *d* no és millor resposta a *a*, atès que $1 + \varepsilon\beta > 0$; (iii) [*b*, *c*] no és equilibri baiesià perquè *c* no és millor resposta a *b*, atès que, per les hipòtesis sobre ε i β, $1 + \varepsilon\beta < 3$; i (iv) [*b*, *d*] no és equilibri baiesià perquè *b* no és millor resposta a *d*, atès que $1 + \varepsilon\alpha > 0$. En segon lloc, no hi ha cap equilibri baiesià on només un jugador randomitza. Per exemple, en relació amb el jugador 1, si 2 tria *c*, el millor per a 1 és *b*; i si 2 tria *d*, el millor per a 1 és *a*.

Finalment, passem a calcular els equilibris baiesians amb estratègies mixtes. Primer, donada la probabilitat *c* del jugador 2 de triar *c*, hi ha un valor *p* d'α tal que: (i) per a tot $\alpha > p$, *a* és millor per al jugador 1 que *b*; i (ii) per a tot $\alpha < p$, *b* és millor per al jugador 1 que *a*. De manera anàloga, donada la probabilitat *a* del jugador 1 de triar *a*, hi ha un valor *q* de β tal que: (i) per a tot $\beta > q$, *c* és millor per al jugador 2 que *d*; i (ii) per a tot $\beta < q$, *d* és millor per al jugador 2 que *c*. Prenguem la perspectiva del jugador 1 i busquem el tal valor *p*. El punt clau és observar que, des de la perspectiva del jugador 1, *q* representa la probabilitat que 2 triï *c*, ja que: (i) β es distribueix uniformement sobre l'interval [0, 1]; (ii) els valors de β que fan que 2 triï *c* són aquells tals que $\beta < q$; i (iii) la probabilitat que el valor de β caigui a l'interval [0, *q*) és la distància entre 0 i *q* dividida per la distància de l'interval [0, 1]. En vista d'això, la probabilitat que el jugador 2 sigui del tipus que tria *c* és *q*. En conseqüència, per a què el jugador 1 sigui indiferent entre *a* i *b* quan α pren el valor buscat *p*, cal que el pagament esperat $1 + \varepsilon p$ de triar *a* sigui igual al pagament esperat $2q + 0\cdot(1 - q)$. D'aquí resulta $1 + \varepsilon p = 2q$.

[3] Per exemple, α podria ser una mesura del grau de bon humor del jugador 1: com més bon humor, més bé se sent 1 jugant *a*. El bon humor d'1 afecta els seus pagaments, però no els del jugador 2, que no pot observar quin és el grau de bon humor del jugador 1. És per això que cada nivell de bon humor d'1 defineix un tipus de jugador 1.

Un raonament similar fa que la probabilitat que el jugador 1 sigui del tipus que tria *a* sigui p i, d'aquí, la probabilitat que el jugador 1 sigui del tipus que tria *b* sigui $1 - p$. Per a què el jugador 2 sigui indiferent entre *c* i *d* quan β pren el valor buscat q, cal que el pagament esperat $1 + \varepsilon q$ de triar *c* sigui igual al pagament esperat $0 \cdot p + 3 \cdot (1 - p)$. D'aquí resulta $1 + \varepsilon q = 3(1 - p)$. La solució del sistema d'equacions $1 + \varepsilon p = 2q$ i $1 + \varepsilon q = 3(1 - p)$ és $p = \dfrac{4 - \varepsilon}{6 + \varepsilon^2}$ i $q = \dfrac{3 + 2\varepsilon}{6 + \varepsilon^2}$.

Q10. Comprova que, quan $p = \dfrac{4 - \varepsilon}{6 + \varepsilon^2}$ i $q = \dfrac{3 + 2\varepsilon}{6 + \varepsilon^2}$, el jugador 1 és indiferent entre *a* i *b*, i el jugador 2 és indiferent entre *c* i *d*.

La interpretació és la següent. Del conjunt infinit de valors que pot prendre la variable aleatòria α, només quan $\alpha = p$ el jugador 1 és indiferent entre *a* i *b*. Per a qualsevol altre valor, o tria *a* o tria *b*. Això significa que "gairebé sempre" el jugador 1 tria una estratègia pura (*a* o *b*). El mateix val per al jugador 2: només un dels infinits tipus del jugador 2 (el tipus $\beta = q$) randomitza, en tant que els altres tipus trien una estratègia pura. Com al cas del jugador 1, el fet que el jugador 2 no randomitza té probabilitat 0 d'ocórrer.

Tot plegat fa que <u>la informació privada que rep cada jugador (a través d'α o β) l'impulsi a triar una estratègia pura o l'altra</u>. L'altre jugador ignora la informació privada que rep el rival i per això forma una conjectura sobre quant probable és trobar-se amb un tipus que tria una estratègia i quant probable es trobar-se amb un tipus que tria l'altra estratègia. Aquestes conjectures (creences) són determinades pels valors p i q. Quan el paràmetre ε tendeix cap a zero (de forma que la informació privada de cada jugador té un efecte nul sobre els seus pagaments), p tendeix a ⅔ io q tendeix a ½, que són les probabilitats amb què es juguen *a* i *c*, respectivament, a l'equilibri de Nash de la Fig. 8.

Des d'una altra perspectiva, <u>p representa la proporció de tipus del jugador 1 que trien *a* i q la proporció de tipus del jugador 2 que trien *c*</u>. En prendre el límit quan $\varepsilon \to 0$, p tendeix a ⅔ (la probabilitat de triar *a* a l'equilibri de Nash del joc de la Fig. 8) i q tendeix a ½ (la probabilitat de triar *c* a l'equilibri de Nash del joc de la Fig. 8). Això avalaria la següent interpretació: una estratègia mixta d'equilibri no seria tant el resultat d'aplicar un instrument de randomització com de triar una estratègia pura o una altra en funció de factors (o petits detalls) que el joc no especifica. La randomització no la faria el propi jugador sinó que seria l'explicació que adopten els altres jugadors quan ignoren aquells petits detalls i aleshores consideren aleatori l'efecte d'aquests detalls sobre les decisions dels jugadors. En resum, <u>els equilibris de Nash amb estratègies mixtes poden ser considerats, en general, com a límits d'equilibris baiesians amb estratègies pures</u>.

Els possibles inconvenients de tenir més informació

A jocs amb un únic jugador, el jugador no pot estar pitjor si disposa de més informació: com a últim recurs, el jugador pot decidir ignorar la informació addicional. A jocs amb més d'un jugador la cosa és diferent: tenir més informació pot ser perjudicial, ja que és possible que <u>si un jugador rep nova informació i la resta de jugadors ho saben aleshores el pagament del jugador que es torna més informat pot reduir-se</u>. El joc de la Fig. 10 permet il·lustrar aquest fet.

1 \ **2**	*c*	*d*	*e*
a	2, 2	1, 0	1, 3
b	4, 4	0, 0	0, 6

$p = ½$

1 \ **2**	*c*	*d*	*e*
a	2, 2	1, 3	1, 0
b	4, 4	0, 6	0, 0

$1 - p = ½$

Fig. 10

El joc de la Fig. 10 representa el joc baiesià on tots dos jugadors ignoren si estan jugant a la matriu de l'esquerra o a la matriu de la dreta. Tots dos atribueixen la mateixa probabilitat d'½ d'estar jugant a una de les matrius. Comprovem d'entrada que a tot equilibri baiesià el jugador 2 tria *c*. Si 1 tria *a*, aleshores el pagament esperat per a 2 quan tria *c* és 2, en tant que *d* i *e* proporcionen un pagament d'1'5 (= 0·½ + 3·½). Si 1 tria *b*, el pagament esperat per a 2 quan tria *c* és 4, en tant que *d* i *e* proporcionen un pagament de 3 (= 0·½ + 6·½). Donat *c*, la millor resposta d'1 és *b*. Conclusió: [*b*, *c*] és l'únic equilibri baiesià del joc de la Fig. 10. Els dos vectors de pagaments (4, 4) d'aquest equilibri s'indiquen mitjançant un rectangle a la Fig. 10.

Ara suposem que només el jugador 2 és informat de la matriu on s'està jugant. A la matriu esquerra, *e* és una estratègia fortament dominant; a la matriu dreta, *d* és una estratègia fortament dominant. Donat que 2 només tria *e* o *d*, la millor resposta d'1 (tot i ignorar en quina matriu es troba) és sempre *a*. Conclusió: [*a*, (*e*, *d*)] és l'únic equilibri baiesià del joc de la Fig. 10 quan el jugador 2 és informat de la matriu en què juga. Els dos vectors de pagaments (1, 3) d'aquest equilibri s'indiquen mitjançant un cercle a la Fig. 10. Clarament, el jugador 2 es troba pitjor en aquest cas que quan no estava informat.

Q11. Considera el joc baiesià de la Fig. 11, on les probabilitats p_i associades amb cada matriu representen la probabilitat que el jugador 1 assigna al fet que es troba jugant a aquella matriu. Suposem que cada jugador *i* pot ser de 2 tipus, t_i i t_i'. Suposem també que a la primera matriu juguen els tipus (t_1, t_2), que a la segona juguen (t_1', t_2) i que a la tercera juguen (t_1', t_2'). (i) Troba la distribució de probabilitat μ sobre el conjunt de combinacions de tipus que fa que cada probabilitat p_i de cada matriu sigui la probabilitat condicionada donat el tipus del jugador *i* a la matriu (per exemple, el valor $p_2 = ¼$ a la segona matriu seria $\mu(t_1'|t_2)$). [Resultat: $\mu(t_1, t_2) = 9/13$, $\mu(t_1', t_2) = 3/13$, $\mu(t_1, t_2') = 0$] (ii) Demostra que l'únic equilibri baiesià fa que sempre es jugui [*b*, *d*].

1 \ **2**	*c*	*d*
a	2, 2	0, 0
b	3, 0	1, 1

$p_1 = 1$
$p_2 = ¾$

1 \ **2**	*c*	*d*
a	2, 2	0, 0
b	0, 0	1, 1

$p_1 = ¾$
$p_2 = ¼$

1 \ **2**	*c*	*d*
a	2, 2	0, 0
b	0, 0	1, 1

$p_1 = ¼$
$p_2 = 1$

Fig. 11. Un joc d'Osborne (2004, p. 284)

Els possibles inconvenients de perdre una mínima informació

La Fig. 12 permet il·lustrar el fet que una petita variació en la informació dels jugadors pot alterar substancialment el conjunt d'equilibris baiesians. El joc de la part esquerra de la Fig. 12 té dos tipus d'equilibris: l'equilibri [*b*, *d*] i el conjunt d'equilibris [*a*, *c*] tal que $a \geq ½$ i $c = 1$. El segon equilibri dóna pagaments més grans que el primer a tots dos jugadors, malgrat que *a* és una estratègia feblement dominada.

		2	
		c	*d*
1	*a*	3 3	0 2
	b	3 0	1 1

		2	
		c	*d*
1	*a*	1 1	0 2
	b	2 0	3 3

Fig. 12

Modifiquem el joc inicial de la forma següent: per a $\varepsilon > 0$ tan petit com es vulgui, es juga la matriu esquerra a la Fig. 12 amb probabilitat $1 - \varepsilon$ i es juga la matriu dreta amb probabilitat ε. El jugador 2 sap a quina matriu s'està jugant (observa l'elecció de la naturalesa entre una matriu o l'altra) però el jugador 1 no, i atribueix la probabilitat $1 - \varepsilon$ al fet de jugar la matriu esquerra. Al nou joc, quan es juga la matriu dreta, *d* és una estratègia fortament dominant per al jugador 2. En vista d'això, el pagament esperat del jugador 1 quan tria *a* és

$$(1 - \varepsilon)[3c + 0\cdot(1 - c)] + \varepsilon\cdot 0$$

que equival a

$$3(1 - \varepsilon)c,$$

on *c* és la probabilitat amb què el jugador 2 tria *c* a la matriu esquerra (ja s'ha indicat que 2 tria *d* a la matriu dreta). De manera anàloga, el pagament esperat del jugador 1 quan tria *b* és

$$(1 - \varepsilon)[3c + 1\cdot(1 - c)] + \varepsilon\cdot 3$$

que equival a

$$3(1 - \varepsilon)c + (1 - \varepsilon)(1 - c) + 3\varepsilon.$$

Atès que $0 < \varepsilon < 1$ i $0 < c < 1$, és evident que el pagament de *b* és superior al d'*a*. Així doncs, a tot equilibri baiesià del nou joc, el jugador 1 tria *b*. Donat *b*, el millor per al jugador 1 a la matriu esquerra és *d*. El vector de pagaments assolit és $(1 - \varepsilon)(1, 1) + \varepsilon(3, 3) = (1 + 2\varepsilon, 1 + 2\varepsilon)$.

Recapitulem. Al joc inicial, el vector de pagaments (3, 3) s'assolia a un equilibri. <u>Després d'una petita pertorbació del joc inicial que introdueix una mínima incertesa en el jugador 1, l'únic vector de pagaments d'un equilibri dóna menys a tots els jugadors</u>.

Q12. Calcula els equilibris baiesians del joc de la Fig. 12 quan tots dos jugadors saben a quina matriu estan jugant i saben que la probabilitat de la matriu dreta és ε.

Sobre la incapacitat de treure profit de l'obtenció d'informació

L'intercanvi d'informació no presencial està sotmès a la possibilitat que l'intercanvi sigui estèril. El problema de l'atac coordinat il·lustra aquesta possibilitat[4]. Parlar per telèfon també ens exposa a aquesta possibilita[5]. El joc del correu electrònic (*electronic mail game*) d'Ariel Rubinstein (1989, http://arielrubinstein.tau.ac.il/) també permet analitzar l'esterilitat de l'intercanvi d'informació. Aquest joc es representa a la Fig. 13. Els jugadors no saben a quina matriu juguen, però saben que la probabilitat d'estar jugant a la matriu dreta és ⅔.

		2	
		c	*d*
1	*a*	3 3	0 2
	b	3 0	1 1

$1 - p = ⅓$

		2	
		c	*d*
1	*a*	1 1	0 2
	b	2 0	3 3

$p = ⅔$

Fig. 13

Q13. Calcula els equilibris baiesians del joc de la Fig. 13 si tots dos jugadors ignoren a quina matriu juguen i assignen la probabilitat ⅔ a estar jugant a la matriu dreta.

Ara suposem que el jugador 1 sempre sap quina matriu es juga i que, quan es juga la matriu de l'esquerra, es posa en marxa automàticament, per a una certa probabilitat $\varepsilon > 0$, el següent mecanisme: l'ordinador d'1 envia un missatge a l'ordinador de 2 dient que estan jugant a la matriu del costat esquerre; si l'ordinador de 2 rep el missatge (fet que passa amb probabilitat $1 - \varepsilon$) envia un altre missatge a l'ordinador d'1 confirmant la recepció del missatge; si l'ordinador d'1 rep el missatge (fet que passa amb probabilitat $1 - \varepsilon$) envia un altre missatge a l'ordinador d'2 confirmant-ne la recepció; i així successivament fins que algun missatge no arriba al destinatari. En aquest moment, cada jugador ha de triar la seva estratègia en funció del nombre n de missatges que l'ordinador d'1 ha enviat.

La Fig. 14 presenta un model que descriu la situació, on els parells xy representen l'estat on l'ordinador d'1 envia x missatges i l'ordinador de 2 rep y missatges (amb $y = x$ o $y = x - 1$). Els estats dins un mateix conjunt representen estats que són indistingibles per al jugador. Per exemple, a l'estat 00, el jugador 1 sap que es troba en aquell estat: sap que no ha enviat cap missatge. Però el jugador 2 no pot distingir l'estat 00 de l'estat 10, perquè a tots dos rep la mateixa informació: cap missatge rebut. El que diferencia els dos estats és que al 00 el jugador 1 no envia cap missatge però a l'10 l'envia i es perd (perquè 2 no rep cap missatge). De manera similar, 1 no pot distingir entre 10 i 11: a tots dos casos, 1 envia només un missatge, però a l'10 el missatge no és rebut per 2 i a l'11 sí.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Coordinated_Attack_Problem

[5] Per exemple, suposem que *i* i *j* parlen per telèfon, que *i* proposa a *j* trobar-se en 30 minuts en un determinat lloc i que demana confirmació a *j*. Aleshores *j* confirma que accepta la proposta i demana a *i* que confirmi que *i* ha rebut la confirmació de *j*. Llavors *i* confirma que ha rebut la confirmació i demana a *j* que confirmi que ha rebut la confirmació de la seva confirmació… i així successivament. Imaginem que, en algun punt del creuament de confirmacions, la línia es talla. Assisteix *i* a la cita? Assisteix *j*?

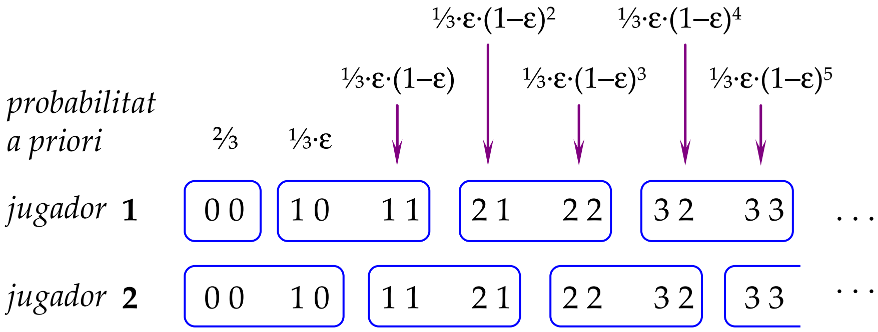

Fig. 14

La fila superior de la Fig. 14 mostra la probabilitat a priori que els jugadors hagin de prendre la decisió a cada estat indicat. Quan el procés d'enviament de missatges es posa en marxa (això succeeix a tots els estats tret del 00), aquesta probabilitat és la probabilitat que el procés s'aturi a l'estat corresponent. Al cas 00, el jugador 1 no envia cap missatge, la qual cosa té lloc només si la naturalesa escull la matriu dreta. Tal matriu és escollida amb probabilitat ⅔. Per tant, la probabilitat a priori de l'estat 00 és ⅔. Amb probabilitat ⅓, es juga la matriu esquerra i s'engega el procés d'enviament de missatges. L'estat 10 representa la situació on el procés s'atura quan 1 envia el primer missatge i 2 no el rep. La probabilitat a priori d'aquesta situació és la probabilitat que 1 enviï el primer missatge (la probabilitat ⅓ que es jugui a la matriu esquerra i, d'aquesta manera, que 1 sàpiga que s'està jugant aquella matriu) multiplicada per la probabilitat ε que el missatge no arribi al jugador 2. L'estat 11 representa la situació on el procés s'atura quan 1 envia el primer missatge i 1 el rep. Ara el procés d'atura perquè la resposta de 2 no arriba a 1. Per consegüent, la probabilitat a priori d'11 és ⅓ (la probabilitat que 1 enviï el primer missatge) per 1 – ε (la probabilitat que 2 el rebi) per ε (la probabilitat que 1 no rebi la confirmació de 2 de la recepció del primer missatge d'1).

Q14. Explica el significat de la probabilitat $⅓·ε·(1 – ε)^2$ atribuïda a l'estat 21 i la probabilitat $⅓·ε·(1 – ε)^3$ atribuïda al 22. Mostra que la probabilitat a priori de l'estat n+1 n —la probabilitat que l'intercanvi de missatges s'aturi quan 1 ha enviat n + 1 missatges i 2 els ha rebut tots tret de l'últim— és $⅓·ε·(1 – ε)^{2n}$. Mostra que la probabilitat a priori de l'estat n+1 n+1 —la probabilitat que l'intercanvi de missatges s'aturi quan 1 ha enviat n + 1 missatges i 2 els ha rebut tots— és $⅓·ε·(1 – ε)^{2n+1}$.

La importància de la Fig. 14 rau en el fet que identifica els conjunts d'informació dels jugadors. Això implica que, per a tot $n \geq 1$, 1 ha de triar la mateixa estratègia a l'estat n n–1 que a l'estat nn: 1 no pot distingir aquests dos estats perquè no sap si 2 ha rebut el missatge n (estat nn) o no l'ha rebut (estat n n–1). De manera anàloga, per a tot $n \geq 0$, 2 ha de triar la mateixa estratègia a l'estat nn que a l'estat n+1 n.

Passem ara a determinar quins són els els equilibris baiesians del joc de la Fig. 13 quan l'intercanvi de missatges o no comença (estat 00) o s'atura (resta d'estats). A l'estat 00, la naturalesa selecciona la matriu de la dreta i 1 ho sap. En canvi, 2 no sap si es troba a l'estat 00 o al 10, ja que 2 té dues explicacions al fet de no rebre cap missatge d'1: que 1 no l'ha enviat (perquè la naturalesa ha triat la matriu de la dreta) o que l'ha enviat i no ha arribat. La primera possibilitat té probabilitat ⅔; la segona, probabilitat $\varepsilon \cdot ⅓$. Al primer cas, el jugador 1 sap que es troba a la matriu de la dreta, on *b* domina fortament a *a*. Així, 1 tria *b* a l'estat 00 (i, pel fet que 1 no pot distingir 00 d'10, també tria *b* a l'estat 10) i 2 sap que 1 tria *b* a l'estat 00.

Amb relació a la decisió del jugador 2, la probabilitat condicionada (creença) de ser a l'estat 00 (donat que sap que no ha rebut cap missatge) és (aplicant la fórmula de Bayes) $p_{00} = ⅔ / (⅔ + \varepsilon \cdot ⅓) = 2/(2 + \varepsilon)$. Per tant, la creença de 2 de ser a l'estat 10 és $1 - p_{00}$. Triant *c*, el pagament esperat de 2 és el que espera obtenir triant *c* quan l'estat és 00 més el que espera obtenir triant *c* quan l'estat és 10. Això és, el pagament esperat de triar *c* és $p_{00} \cdot 0$ (perquè 2 sap que 1 tria *b* a la matriu dreta a l'estat 00) més $(1 - p_{00})3a$, on *a* és la probabilitat amb què 1 tria *a* (a la matriu esquerra) a l'estat 10. D'aquí resulta un pagament esperat de triar *c* de $3a\varepsilon/(2 + \varepsilon)$.

De manera similar, el pagament esperat de 2 quan tria *d* és $p_{00} \cdot 3 + (1 - p_{00})[2a + 1 \cdot (1 - a)]$ on *a* és la probabilitat amb què 1 tria *a* a l'estat 10. El pagament esperat de triar *d* és $(6 + \varepsilon + \varepsilon a)/(2 + \varepsilon)$. Així doncs, *d* és millor que *c* si, i només si, $6 + \varepsilon + \varepsilon a > 3a\varepsilon$, que és el cas per a qualsevol valor d'*a* i d'ε. En resum, als estats 00 i 10 el jugador 2 tria *d*. Com a recapitulació, a l'estat 00, 1 tria *b* i 2 tria *d*: quan 1 no envia cap missatge, 1 tria *b* i 2 tria *d*.

La conclusió anterior serveix com a base d'un raonament inductiu: triem un nombre $n \geq 0$ de missatges enviats per 1, i suposem que 1 tria *b* i 2 tria *d* quan s'han enviat *n* missatges. Es tracta de demostrar que 1 continuarà triant *b* i 2 continuarà triant *d* quan el missatge $n + 1$ s'ha enviat. Per inducció, la conclusió serà que, amb independència del nombre de missatges que 1 envïi, els jugadors prendran la mateixa decisió que prendrien si cap missatge no s'enviés. El resultat paradoxal serà que el sistema d'enviament de missatges és inútil: a tot estat *nm* on $n > 0$ i $m > 0$, els dos jugadors saben que estan realment jugant a la matriu de l'esquerra, però tot i el mínim soroll ε que afecta al sistema de comunicació que permet confirmar el que cadascú sap, els jugadors aparentment ignoren la informació que juguen a la matriu de l'esquerra (ja que trien el mateix amb i sense la informació).

Passem a demostrar que 1 tria *b* i 2 tria *d* quan 1 ha enviat $n + 1$ missatges. Quan aquest és el cas, 1 no pot distingir entre l'estat n+1 n i l'estat n+1 n+1. Però pot determinar la probabilitat condicionada de ser a un o a l'altre. Per la fórmula de Bayes i **Q14**, quan 1 ha enviat $n + 1$ missatges, la probabilitat condicionada de ser a l'estat n+1 n és

$$q = \frac{\frac{1}{3}\varepsilon(1-\varepsilon)^{2n}}{\frac{1}{3}\varepsilon(1-\varepsilon)^{2n} + \frac{1}{3}\varepsilon(1-\varepsilon)^{2n+1}} = \frac{1}{1+(1-\varepsilon)} = \frac{1}{2-\varepsilon} > ½.$$

Aquest resultat és la clau de la demostració, perquè diu que, quan el jugador 1 envia el missatge $n + 1$, creu que el més probable és que no arribi: atès que la probabilitat condicionada de l'estat n+1 n és superior a ½, la probabilitat corresponent de l'estat n+1 n+1 (el missatge $n + 1$ arriba al 2) és inferior a ½ i, així, inferior a la probabilitat que el missatge $n + 1$ no arribi al 2. Per la hipòtesi inductiva, el jugador 2 tria *d* quan 1 envia *n* missatges i el 2 el rep. Això és, 1 tria *b* a l'estat *nn*. Donat que 2 no distingeix entre *nn* i n+1 n, 2 ha de triar el mateix a tots dos estats: *d*.

Atès que el jugador 2 ha rebut almenys un missatge informant sobre el fet que es troben jugant la matriu esquerra, tothom sap que la matriu rellevant per a calcular els pagaments esperats és la de l'esquerra. El pagament esperat d'1 triant a és el pagament que espera obtenir triant a quan l'estat és n+1 n més el pagament que espera obtenir triant a quan l'estat és n+1 n+1. A l'estat n+1 n, 1 sap que 2 tria d. Així, el pagament que espera obtenir triant a quan l'estat és n+1 n serà $q \cdot 0$. El pagament esperat de triar a quan l'estat és n+1 n+1 és $(1 - q)[3c + 0 \cdot (1 - c)]$, on c és la probabilitat que 2 jugui c a l'estat n+1 n+1. En total, el pagament esperat de triar a és $(1 - q)3c$.

De forma anàloga es calcula el pagament esperat de triar b: $q \cdot 1 + (1 - q)[2c + 1 \cdot (1 - c)] = 1 + c - cq$. El fet que $c \leq 1$ i $q > ½$, garanteix que $1 + c - cq > (1 - q)3c$. Conclusió: b és millor que a quan 1 ha enviat $n + 1$ missatges.

Q15. Comprova que $c \leq 1$ i $q > ½$ impliquen $1 + c - cq > (1 - q)3c$.

Q16. Finalitza la demostració anterior verificant que d és millor que c quan 1 ha enviat $n + 1$ missatges.

De tot plegat es conclou que, per molt missatges que 1 enviï (i 2 rebi), tots dos continuarien triant b i d, que és l'elecció que farien sense enviar-se missatges. El vector de pagaments obtingut quan es tria b i d a la matriu esquerra de la Fig. 13 (que és la matriu que tots dos saben que estan jugant quan 2 ha rebut al menys un missatge) és (1, 1), que és superat pel vector (3, 3). Què succeeiria, en el límit, si tots els missatges sempre arribessin? Que 1 i 2 sabrien, i sabrien que sabrien, i sabrien que sabrien que sabrien, i sabrien que sabrien que sabrien que sabrien… que estan jugant el joc de l'esquerra a la Fig. 13. En tal cas, [a, c] seria un equilibri i els jugadors obtindrien el vector de pagaments (3, 3).

Q17. A l'estat 11, el jugador 1 sap que està jugant a la matriu esquerra de la Fig. 13, el 2 també ho sap però l'1 no sap que el ho sap. Per què? Què saben els jugador a l'estat 21 que no saben a l'11? I al 22 en relació amb el 21?

Sobre la capacitat de treure profit de saber el que saben els demés

El següent problema permet il·lustrar la importància de la <u>iteració del coneixement</u>: saber que tots sabem que tots sabem que tots sabem… La iteració de coneixement és important perquè a tota l'anàlisi feta en aquest i els temes anteriors s'ha pressuposat que els jugadors no només sabien la descripció del joc que jugaven sinó que sabien que tothom ho sabia, sabien que tothom sabia que tothom ho sabia, sabien que tothom sabia que tothom sabia que tothom ho sabia… Per a exemplificar el fet que no n'hi ha prou que els jugadors sàpiguen la descripció del joc sinó que cal, com amínim que sàpiguen que ho saben, considerem el joc de la Fig. 15. Atès que d és fortament dominada per c, 2 triarà c. Donat c, el millor per a 1 és a. Conclusió: la solució del joc és la jugada [a, c].

		2: c	2: d
1	a	1 1	0 0
1	b	0 1	1 0

Fig. 15

Però aquest raonament ha fet servir implícitament el fet que 1 sap que 2 sap que el seu conjunt d'estratègies és $\{c, d\}$. Si 1 no sabés que 2 sap que 2 pot triar entre c i d, podria pensar que 2 creu que només té una estratègia, com per exemple d. Si 1 pensés que 2 creu que només té l'estratègia d, aleshores 1 conclouria que 2 juga d, cas en què b és millor per a 1. Per tant, per a dur a terme l'anàlisi feta fins ara, no n'hi ha prou amb suposar que cada jugador sap quin és el joc que juga: com a mínim, també cal que tothom sàpiga que tothom ho sap.

Una de suspesos i aprovats

Un cop corregit l'examen final, un professor de Microeconomia Superior reuneix en el seu despatx a tres estudiants (1, 2 i 3) que han fet l'examen. A continuació, el professor diu, davant tothom, que lliurarà a cada estudiant un full on es diu si els altres dos estudiants han aprovat o suspès. Dit això, lliura a cadascú d'ells un full que diu "Els altres dos estudiants que t'acompanyen han suspès". Els estudiants no poden llegir els fulls lliurats als altres i el professor no permet que es comuniquin entre sí. Un cop cada estudiant ha llegit el seu full, el professor pregunta davant tothom si, sobre la base de la informació que han rebut des del moment d'entrar al despatx, algun dels presents pot determinar amb certesa absoluta si ha aprovat o suspès. Ningú no respon, indicant que ningú no té la completa certesa de si ha aprovat o suspès.

Arribats a aquest punt, el professor diu davant tothom: "Almenys un de vosaltres ha suspès. Us donaré tres oportunitats. A cada oportunitat, aprovaré a qui digui que té la certesa absoluta que estava suspès". El professor dóna la primera oportunitat i ningú no diu res. Dóna la segona, i ningú no diu res. Dóna la tercera i aprova a tothom (perquè tothom diu que pot demostrar que estava suspès). Com és possible això si, des del primer cop que el professor va preguntar si algú sabia la seva nota, merament s'ha anunciat un fet que cada estudiant ja sabia (que algú estava suspès)?

Per a explicar el raonament que van seguir els estudiants, considerem el següent model. Hi ha 8 estats del món, representats a continuació (on S = suspès i A = aprovat).

Estat del món	Qualificació de l'estudiant 1	de l'estudiant 2	de l'estudiant 3
1	A	A	A
2	A	A	S
3	A	S	A
4	A	S	S
5	S	A	A
6	S	A	S
7	S	S	A
8	S	S	S

Cada estat del món es correspon amb la qualificació (aprovat o suspès) de cada estudiant. Per exemple, l'estat del món 6 és aquell on suspenen els estudiants 1 i 3 i on aprova l'estudiant 2. Com al cas dels jocs seqüencials (i al joc del correu electrònic), podem representar la informació d'un agent mitjançant una partició dels possibles estats on es pot trobar l'agent. Als jocs seqüencials, els possibles estats d'un jugador s'associaven amb els seus nodes de decisió i la partició del seu conjunt de nodes donava lloc als conjunts d'informació. La interpretació era que tot el que quedava dins un element de la partició (tots els nodes que pertanyen a un conjunt d'informació) era indistingible per al jugador. Al cas present, tota partició del conjunt d'estats del món representa la informació de què disposa (és a dir, el que sap) l'agent amb qui s'associa la partició.

Abans d'entrar al despatx del professor, és raonable suposar que la partició que té cada estudiant és la partició trivial {{1, 2, … , 8}} on tot els estats es troben dins el mateix element. Això s'interpreta en el sentit que cap estudiant no sap ni la seva qualificació ni la de ningú altre: no té cap informació. A l'altre extrem, la partició {{1}, {2}, {3}, … , {7}, {8}} és la partició que expressa màxima informació: a cada estat se sap que s'està en aquell estat.

La recepció d'informació permet refinar les particions. Per exemple, quan el professor diu que lliurarà a cada estudiant un full on es diu si els altres dos estudiants han aprovat o suspès, la partició d'1 queda refinada tal i com s'indica a la Fig. 16, perquè ara 1 sap si 2 i 3 aproven o suspenen. Els estats 1 i 5 representen l'esdeveniment on els estudiants 2 i 3 aproven. Per això, si el full diu que 2 i 3 aproven, 1 sabrà que l'estat del món és l'1 (on ell aprova) o el 5 (on suspèn). De manera similar, 2 i 6 representen l'esdeveniment on l'estudiant 2 aprova i el 3 suspèn. Quan aquest és el cas, el full del professor donaria aquesta informació, permetent a 1 distingir el conjunt {2, 6} de la resta de subconjunts.

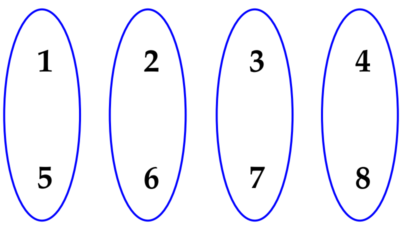

Fig. 16

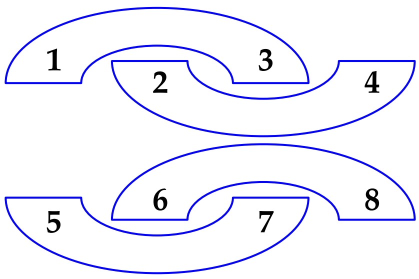

Fig. 17

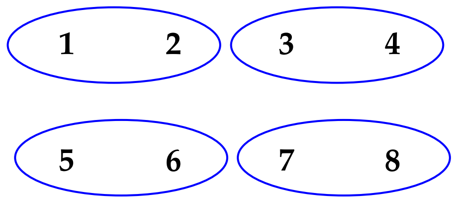

Fig. 18

La Fig. 17 mostra com es refina la partició de l'estudiant 2 quan el professor fa l'anunci del que contenen els fulls que lliurarà. En aquest cas, 2 pot distingir el conjunt {1, 3} de la resta, perquè {1, 3} representa l'esdeveniment que 1 i 3 aproven, però no pot distingir l'estat 1 del 3, atès que 2 no sap si ha aprovat o suspès. La Fig. 18 mostra la partició de l'estudiant 3. Ell, per exemple, no pot distingir l'estat 1 del 2, perquè aquests són els estats on 1 i 2 aproven; ni el 3 del 4, perquè són els estats on 1 aprova i 2 suspèn; ni el 5 del 6, perquè són els estats on 1 suspèn i 2 aprova; ni el 7 del 8, perquè són els estats on 1 i 2 suspenen.

Quan el professor anuncia que algun dels estudiants està suspès, diu una cosa que tothom sabia però que no tothom sabia que tothom ho sabia. Dir que algú està suspès implica que l'estat del món no és l'1, que és l'únic estat on ningú no està suspès. Això ja ho sabia cada estudiant (que l'estat del món no és l'1) quan va llegir el seu full: 1 va descobrir que l'estat del món era 4 o 8; 2, que era 6 o 8; i 3, que era 7 o 8. Però el que ningú no sabia era que tothom sabia que l'estat del món no és l'1, perquè ningú no sabia les notes escrites als fulls dels altres. Així que l'anunci del professor transmet informació als estudiants sobre el que els estudiants saben: ara tothom sap que l'estat del món és diferent d'1 (perquè l'anunci del professor és públic davant dels tres estudiants), tothom sap que tothom ho sap, tothom sap que tothom sap que tothom ho sap[6]…

Ara és el torn de les tres oportunitats. El professor canta "Primera oportunitat" i ningú no diu res, perquè cap estudiant no sap si està suspès o no. L'estudiant 1 sap que l'estat del món és 4 o 8, però no sap quin (si és 4, està aprovat; si és 8, suspès). El 2 sap que és 6 o 8, però no quin. I el 3 sap que és 7 o 8, però no quin.

Paradoxalment, aquest silenci dels estudiants durant la primera oportunitat és informatiu. En primer lloc, l'anunci inicial del professor dient el tipus d'informació (no la informació concreta) que contenen els fulls fa que cada estudiant no només estigui al corrent de quina és la seva partició, sinó quina és la partició dels demés. Així, per exemple, l'1 sabrà que el 2 sap la nota de l'1 i del 3 i, en conseqüència, 1 sap que la partició del 2 és la de la Fig. 17.

Quan 1 calla durant la primera oportunitat, està revelant a 2 i 3 que l'estat del món en què es troben no pot ser el 5. Perquè si l'estat fos el 5, 1 sabria que 2 i 3 estan aprovats (és el que hi hauria escrit al full que li ha passat el professor) i com 1 sabria que almenys hi ha un estudiant suspès (perquè el professor ho ha anunciat), podria concloure que l'estudiant suspès és ell. Això li permetria demostrar que estava suspès i ho hauria dit. Atès que no ha dit res, l'estat del món no és el 5. Aquesta conclusió la saben tots els estudiants (i saben que la saben, i saben que saben que la saben, i saben que…).

Però hi ha més. Quan 2 calla durant la primera oportunitat, està revelant a 1 i 3 que l'estat del món en què es troben no pot ser el 3. Com abans, si l'estat fos el 3, 2 sabria que 1 i 3 estan aprovats i com 1 sabria que almenys hi ha un estudiant suspès, arribaria a la conclusió que està suspès. Així que tothom sap que l'estat del món no és el 3 (i tothom sap que tothom ho sap i tothom sap que tothom sap que tothom ho sap…).

I encara hi ha més. Quan 3 calla durant la primera oportunitat, està revelant a 1 i 2 que l'estat del món en què es troben no pot ser el 2. Si tal fos el cas, 3 sabria que 1 i 2 estan aprovats. I sabent que algú ha suspès, sabria que el suspès és ell. Per tant, tothom sap (…) que l'estat del món no és el 2.

---

[6] Es diu que un esdeveniment (o un fet) és coneixement comú entre un grup de persones si tothom al grup sap que l'esdeveniment té lloc, si tothom sap que tothom sap que l'esdeveniment té lloc, si tothom sap que tothom sap que tothom sap que l'esdeveniment té lloc, … *ad infinitum*. Recuperant la conversa telefònica de la nota a peu de pàgina anterior, *i* i *j* no tenen manera d'assolir coneixement comú sobre el fet de trobar-se al lloc i hora proposades perquè cal un nombre infinit de confirmacions. Quan *j* confirma per primera vegada la proposta d'*i*, *j* sap que han quedat però fins que *i* no rebi la confirmació de *j*, *i* no sap que *j* sap que han quedat. Quan *i* rep la confirmació de *j*, ara *i* sap *j* ho sap, però, fins que *j* no rebi la confirmació d'*i* que *i* sap que *j* ho sap, *j* no sabrà que *i* sap que *j* ho sap. Quan *j* sàpiga que *i* sap que *j* ho sap encara haurà d'enviar una confirmació a *i* per a què, quan *i* la rebi, *i* sàpiga que *j* sap que *i* sap que *j* ho sap… En canvi, si *i* i *j* estiguessin l'un davant l'altre i, en aquestes condicions, *i* fes la proposta i *j* l'acceptés, es podria entendre que hi ha coneixement comú, perquè la transmissió de la informació es fa públicament davant de tots dos, de forma que quan *i* fa la proposta *veu* que *j* la rep i *j veu* que *i* ho veu, i *i* veu que *j* veu que *i* ho veu… A l'exemple del professor, quan aquest anuncia públicament que algú ha suspès aleshores esdevé coneixement comú entre els estudiants que l'estat del món no és l'1 (un fet que abans de l'anunci era merament conegut pels estudiants).

Transcorreguda la primera oportunitat en silenci, el professor canta "Segona oportunitat" i ningú no diu res. De fet, per l'anunci del professor que hi havia algú suspès, és coneixement comú entre els estudiants que l'estat no és l'1. Els silencis de la primera oportunitat fan que sigui coneixement comú entre ells que l'estat tampoc no és el 5, el 3 o el 2. A l'estudiant 1 això no li resol el dubte de si es troben a l'estat 4 o al 8; ni a l'estudiant 2 li resol el dubte de si es troben al 6 o al 8; ni al 3 si es troben al 7 o al 8.

Però, com a la primera ronda, els silencis parlen. Quan 1 calla, de fet diu que l'estat no pot ser ni el 6 ni el 7. La raó és que el 6 és l'únic estat dels que es consideren possibles on l'1 seria informat que 2 ha aprovat i 3 ha suspès. Com en l'estat 6 l'estudiant 1 suspèn, sabria que ha suspès. El mateix s'aplica al 7, que és l'únic estat dels que es consideren possibles on l'1 seria informat que 3 ha aprovat i 2 ha suspès. Per aquest motiu, 1 podria distingir l'estat 7 de la resta d'estats considerats com a possibles i, com a resultat, sabria que està suspès.

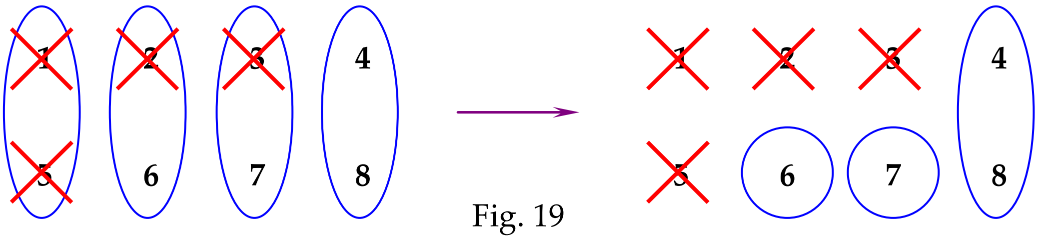

Fig. 19

La Fig. 19 explica aquesta conclusió en termes de model de particions. L'anunci del professor que algú ha suspès elimina l'estat 1 com a possible estat. Els silencis durant la primera ronda han descartat els estats 2, 3 i 5. Per tant, és com si l'estructura informativa de l'estudiant 1 estigués representada per la part dreta de la Fig. 19, on l'estat 6 és inconfusible i on l'estat 7 també l'és. Atès que l'estudiant 1 no ha dit res, l'explicació és que l'estat on els estudiants es troben no és el 6 ni el 7.

El silenci de l'estudiant 2 porta a tothom a la conclusió que l'estat no és el 4, perquè dels estats considerats possibles després de la primera ronda (4, 6, 7 i 8), l'estat 4 és l'únic on l'estudiant 2 seria informat que 1 ha aprovat i 3 ha suspès. Per consegüent, 2 podria distingir l'estat 4 i, si estiguessin a l'estat 4, hauria dit a la segona ronda que està suspès. Com no ho ha dit, tothom arriba a la conclusió que l'estat no és el 4.

Q18. Indica quins estats elimina com a possibles el silenci de l'estudiant 3 a la segona ronda. Representa gràficament (seguint el model de la Fig. 19) com quedarien les particions dels estudiants 2 i 3 un cop finalitzada la primera ronda.

Si suposem que la decisió de callar o parlar dels estudiants és simultània, aleshores quan s'inicia la tercera oportunitat de parlar tots tres saben que l'únic estat possible és el 8 i tothom manifesta simultàniament al professor que pot demostrar que estava suspès.

L'exemple posa de manifest la importància de la iteració del coneixement (coneixement sobre el coneixement dels altres) a l'hora de prendre decisions estratègiques. En aquest cas, l'anunci del professor que hi ha algú que ha suspès implica augmentar el que els estudiants saben sobre el que els propis estudiants saben i aquest nou coneixement és el desencadenant d'un procés que porta a descobrir un fet que, abans de l'anunci, era un fet desconegut: la qualificació pròpia.

Q19. Quina diferència provocaria a l'anàlisi del text que, a cada ronda, l'oportunitat de parlar seguís l'ordre estudiant 1 → estudiant 2 → estudiant 3, de forma que les decisions de parlar o callar fossin seqüencials i no simultànies? Hauria parlat algú a la primera ronda? I a la segona?

Q20. Quin efecte tindria que el professor lliurés a cada estudiant el full sense dir prèviament quin tipus d'informació contenen els fulls?

Q21. Torna a analitzar el problema dels estudiants al text amb els següents canvis: (i) el full que passa el professor a cada estudiant diu que els altres dos han aprovat; i (ii) el professor dóna tres oportunitats per tal que, qui sàpiga amb certesa absoluta la seva nota, reveli quina és.

Q22. Fes el mateix que a la Q21 amb l'única diferència que els fulls diuen el següent: (i) el de l'estudiant 1, que 2 ha aprovat i 3 suspès; (ii) el de l'estudiant 2, que 1 ha aprovat i 3 suspès; i (iii) el de l'estudiant 3, que 1 i 2 han aprovat.

Q23. Torna a analitzar el problema dels estudiants amb els següents canvis: (i) hi ha 4 estudiants; (ii) el full que passa el professor a cada estudiant diu que els altres tres han suspès; i (iii) el professor dóna quatre oportunitats per tal que, qui sàpiga amb certesa absoluta la seva nota, reveli quina és. Hi hauria alguna diferència si el professor només donés 3 oportunitats?

Q24. Considera el model de Cournot amb funció de demanda de mercat $p = 14 - q$. Les dues empreses saben que l'empresa rival té un cost fix zero. L'empresa 1 ignora el cost marginal de l'empresa 2, però sap que és 1 amb probabilitat ½ i és 3 amb probabilitat ½. El cost marginal de l'empresa 2 és 2. L'empresa 2 sap que el cost marginal de l'empresa 1 és 2. Calcula els equilibris baiesians.

Bibliografia

- Eichberger, Jürgen (1993): *Game Theory for Economists*. Academic Press: San Diego, capítol 5.
- Fudenberg, Drew i Tirole, Jean (1991): *Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, pp. 209–216 i 554–562.
- Harsanyi, John C. (1967–68): "Games with incomplete information played by 'Bayesian' players", *Management Science* 14, 159–182, 320–334, 486–502.
- Harsanyi, John C. (1973): "Games with randomly disturbed payoffs: A new rationale for mixed-strategy equilibrium points", *International Journal of Game Theory* 2, 1–23.
- Myerson, Roger B. (1991): *Game Theory. Analysis of Conflict*. Harvard University Press: Cambridge, Massachusetts, pp. 127–131.
- Osborne, Martin J. (2004): *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press: Nova York, capítol 9.
- Ratliff, Jim (1997): Graduate-Level Course in Game Theory, cap. 6, http://www.virtualperfection.com/gametheory/.
- Rubinstein, Ariel (1989): "The electronic mail game: Strategic behavior under 'almost common knowledge'", *American Economic Review* 79, 385–391. http://arielrubinstein.tau.ac.il/papers/32.pdf
- Vega-Redondo, Fernando (2003): *Economics and the Theory of Games*. Cambridge University Press: Cambridge, UK, capítol 6.