Jocs seqüencials

Una de carraques
El propietari d'un cotxe (jugador 1) decideix vendre'l a un possible comprador (el jugador 2). Hi ha un jugador 0, representant la naturalesa: el conjunt d'esdeveniments que succeeixen fora del control dels jugadors. La naturalesa tria inicialment la qualitat del cotxe: amb probabilitat p_a, el cotxe és d'alta qualitat (es troba en perfectes condicions); amb probabilitat $1 - p_a$, el cotxe és de baixa qualitat (una carraca). Quan la naturalesa determina la qualitat del cotxe, el jugador 1 reconeix aquesta qualitat: el venedor sap si el cotxe és d'alta o baixa qualitat. Un cop sabuda la qualitat del cotxe, el jugador 1 tria un preu alt o un preu baix: p_{aa} és el preu alt quan la qualitat és alta; p_{ba} és el preu baix quan la qualitat és alta; p_{ab} és el preu alt quan la qualitat és baixa; i p_{bb} és el preu baix quan la qualitat és baixa. Per a simplificar, $p_{aa} = p_{ab}$ i $p_{bb} = p_{ba}$: el preu alt no depèn de la qualitat i el preu baix tampoc. El jugador 2 ignora la qualitat del cotxe però sap si el preu triat pel jugador és alt o baix. Sabent això, el jugador 2 decideix si compra o no compra el cotxe.

Sigui v_{ij} el valor monetari per al jugador i del cotxe amb qualitat j. Per a fer la situació interessant, per a $j \in \{a, b\}$, $v_{1j} < p_{1j} < v_{2j}$. Si el cotxe no es ven i és de qualitat $j \in \{a, b\}$, el pagament per al jugador 1 és v_{1j} en tant que el pagament per al jugador 2 és 0. Si el cotxe es ven i és de qualitat $j \in \{a, b\}$ aleshores el pagament per al jugador 1 és el preu menys v_{1j} i el pagament per al jugador 2 és v_{2j} menys el preu. En particular, suposem que $v_{1a} = 5$, $p_{aa} = p_{ab} = 8$, $v_{2a} = 10$, $v_{1b} = 0$, $p_{bb} = p_{ba} = 2$ i $v_{2b} = 3$. La Fig. 1 representa aquesta situació com a joc seqüencial.

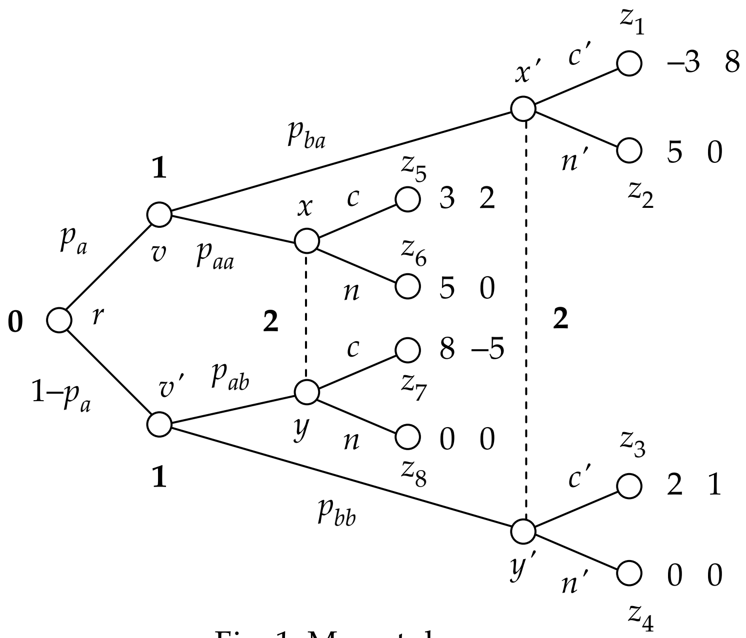

Fig. 1. Mercat de carraques

Descripció d'un joc seqüencial
Un joc seqüencial està format pels següents elements.

• Un conjunt finit i no buit de <u>nodes</u> i un conjunt de <u>branques</u> que connecten directament parells de nodes, de forma que les branques formen un <u>arbre amb una única arrel</u>.

Una branca que connecta directament el node x amb el node y es pot identificar amb el conjunt $\{x, y\}$. Dos nodes es diuen <u>connectats</u> si hi ha una seqüència de nodes $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ tal que: (i) x

= v_1; (ii) $y = v_k$; i (iii) per a tot $n \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\{v_k, v_{k+1}\}$ és una branca. Un <u>arbre</u> és un conjunt de nodes i branques tals que cada dos nodes estan connectats mitjançant una única seqüència (només hi ha una manera de passar d'un node a un altre seguint les branques). Un arbre té una única arrel si hi ha un únic node que està connectat amb tots els altres. Aquest node connectat amb tots els altres nodes s'anomena <u>arrel</u>. La Fig. 2 mostra els conjunts de nodes i branques del joc de la Fig. 1, on r és l'arrel.

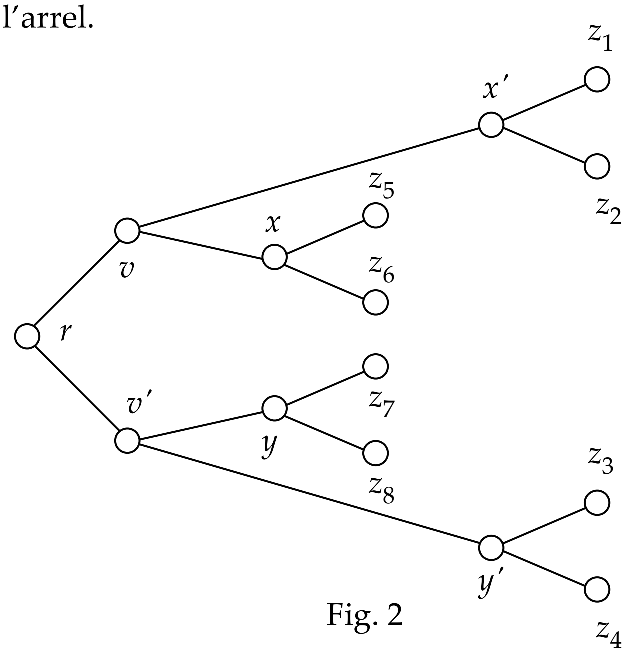

Fig. 2

Q1. Quants nodes i quantes branques hi ha a la Fig. 2? Assenyala dos nodes que no estiguin connectats. Estan connectats els nodes r i y? Modifica la Fig. 2 per a què els nodes x i y estiguin connectats i el resultat continuï essent un arbre amb una única arrel.

Q2. Si x a la Fig. 2 fos l'arrel, es tindria encara un arbre amb una única arrel? I si fos z_4?

Una branca <u>precedeix</u> un node (diferent de l'arrel) si és una de les branques que connecten el node amb l'arrel. Per exemple, a la Fig. 2, tant la branca $\{r, v'\}$ com la branca $\{v', y'\}$ precedeix el node y'. Una <u>acció</u> a un node és tota branca que connecta directament el node amb un altre node i que no precedeix el node. A la Fig. 2, per exemple, hi ha tres branques que connecten v' amb algun altre node. Però la branca $\{r, v'\}$ connecta directament v' amb r i, per tant, aquesta branca precedeix v', raó per la qual només les altres dues branques (que connecten directament v' amb y i amb y') són accions al node v'. Un <u>node de decisió</u> és un node amb accions. Un <u>node terminal</u> és un node sense accions.

Q3. Quantes accions hi ha al node y de la Fig. 2? I al z_7? I a l'arrel r? Quins són els nodes precedits per més branques? Si v fos l'arrel a la Fig. 2, quantes accions tindria r? I v? Si z_1 fos l'arrel a la Fig. 2, quantes accions tindria r? I z_1?

Q4. A la Fig. 2, identifica tots els nodes de decisió i tots els nodes terminals. Fes el mateix si v fos l'arrel. Fes el mateix si z_1 fos l'arrel.

Q5. Per què si el conjunt de nodes és finit algun node és terminal? És sempre l'arrel un node de decisió? Amb 4 nodes, quants nodes de decisió es poden tenir com a màxim? I com a mínim?

• Un conjunt no buit i finit N de jugadors i un jugador especial anomenat "naturalesa".

Al joc de la Fig. 1, la naturalesa és 0 i els jugadors són 1 i 2.

• Una funció que assigna a cada node de decisió un jugador o la naturalesa.

La interpretació és que el jugador assignat al node de decisió x (si no és la naturalesa) ha de prendre una de les accions assignades a x. Al joc de la Fig. 1, la naturalesa és assignada a l'arrel r. El jugador 1 és assignat als nodes v i v'. El jugador 2 és assignat a la resta de nodes de decisió. Ningú no és assignat als vuit nodes $z_1, z_2, \ldots, z_8$ perquè aquests són els nodes terminals.

• Una funció que associa amb cada node de decisió assignat a la naturalesa una distribució de probabilitat sobre les accions al node de decisió.

La interpretació és que la distribució de probabilitat estableix com "juga" la naturalesa: amb quina probabilitat resulta cadascuna de les possibilitats representades per les accions disponibles al node en qüestió. Per exemple, al joc de la Fig. 1, l'arrel r s'ha assignat a la naturalesa i l'acció representada per la branca que connecta directament r amb v té assignada la probabilitat p_a, en tant que l'acció associada amb la branca que connecta directament r amb v' té assignada la probabilitat $1 - p_a$.

• Per a cada jugador del joc (no incloent-hi la naturalesa), una partició del conjunt de nodes assignats al jugador.

Els elements d'aquesta partició s'anomenen conjunts d'informació. La interpretació és que tots els nodes d'un jugador que estan en el mateix conjunt d'informació són nodes indistingibles per al jugador, això és, el jugador té la mateixa informació a cadascun d'aquests nodes. Els nodes que formen part d'un mateix conjunt d'informació s'uneixen amb línies discontínues.

Al joc de la Fig. 1, el conjunt de nodes assignats al jugador 1 és $\{v, v'\}$ i la partició és $\{\{v\}, \{v'\}\}$, perquè els dos nodes no estan units per línies discontínues. Això significa que quan s'arriba al node v, el jugador 1 sap que es troba al node v i, de manera anàloga, quan s'arriba al node v', el jugador 1 sap que es troba al node v'. El conjunt de nodes assignats al jugador 1 és $\{x, x', y, y'\}$ i la partició és $\{\{x, y\}, \{x', y'\}\}$, atès que els nodes x i y estan units, i els nodes x' i y' també estan units. Per tant, $\{x, y\}$ constitueix un conjunt d'informació del jugador 2 i el $\{x', y'\}$ constitueix un altre conjunt d'informació del jugador 2. La interpretació és que, si la jugada que juguen els jugador porta al node x (o al node y) aleshores 2 no pot saber si realment es troba a x o a y: l'estructura del joc no li permet a 2 determinar si es troba a x o a y. De manera similar, que $\{x', y'\}$ sigui un conjunt d'informació del jugador 2 suposa que 2 no pugui saber si es troba a x' o a y' quan jugar el joc porta a algun d'aquests dos nodes: el jugador 2 té, en principi, la mateixa informació a x' que a y'.

• Una funció que associa amb cada acció de cada node decisió un nom, de forma que, per a cada dos nodes x i y del mateix conjunt d'informació, si x té una branca amb un determinat nom aleshores y també ha de tenir una branca amb el mateix nom.

El requisit de coincidència de noms per a accions de nodes d'un mateix conjunt d'informació és necessari per a què els nodes continuïn sent indistingibles. En particular, això requereix que tots els nodes d'un mateix conjunt d'informació han de tenir el mateix nombre d'accions: si aquest no fos el cas, el jugador podria saber si es troba en un node o en un altre en funció del nombre d'accions. Per exemple, atès que $\{x, y\}$ és, al joc de la Fig. 1, un conjunt d'informació, tant x com y han de tenir el mateix nombre d'accions (dues) i totes amb els mateixos noms (c i n).

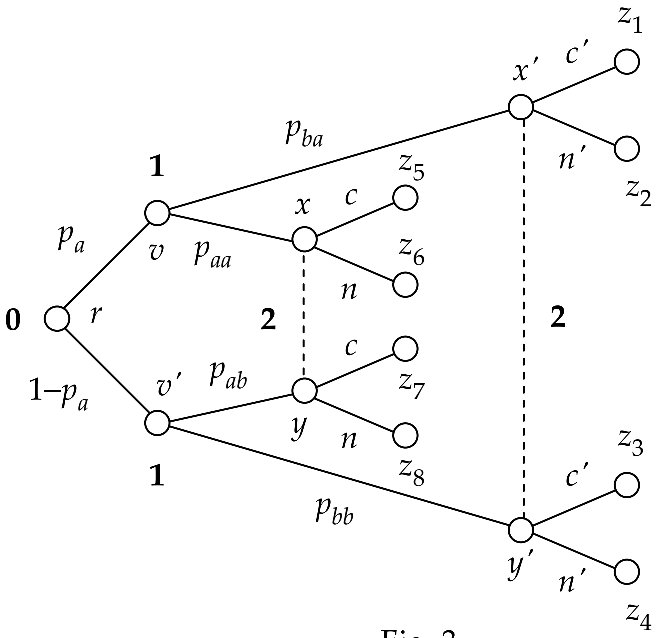

Fig. 3

La Fig. 3 mostra la Fig. 1 amb només el conjunt d'elements descrits fins ara. S'ha assignat al jugador 2 al conjunt d'informació $\{x, y\}$ entenent que això vol dir que 2 és assignat als nodes x i y. La mateixa convenció s'ha seguit en el cas d'$\{x', y'\}$. Els noms c i n aplicats a les accions al conjunt d'informació $\{x, y\}$ podrien també haver-se aplicat al conjunt d'informació $\{x', y'\}$, perquè les accions a tots dos conjunts d'informació són les mateixes: comprar o no comprar. Però s'han fet servir uns altres per a tenir clar en quin conjunt d'informació es pren la decisió. Tota la informació representada a la Fig. 3 defineix el que s'anomena la forma extensiva d'un joc: conté tota la informació del joc tret de les preferències dels jugadors sobre els resultats del joc. Als jocs seqüencials, els resultats del joc s'identifiquen amb els nodes terminals, que representen els punts finals del joc. Quan s'afegeixen les preferències a una forma extensiva s'obté un joc seqüencial.

• Una funció que associa amb cada node terminal un vector de nombres reals amb tants components com jugadors (diferents de la naturalesa) hi hagi.

Al joc de la Fig. 1 hi ha 8 nodes terminals. Per a cada node, la funció anterior especifica els pagaments de tots els jugadors (tret de la naturalesa), hagin jugat al llarg de la seqüència de nodes i branques que porta de l'arrel al node terminal en qüestió o no (si x i y a la Fig. 1 fossin assignats al jugador 1, el node terminal z_5 també hauria d'especificar un número per al jugador 2, encara que el jugador 2 no jugui al llarg del camí d'r fins a z_5). Així, atès que hi ha 2 jugadors al joc de la Fig. 1, cada node terminal portarà associat un vector de 2 números. Cada número expressa el pagament (utilitat) que obté el jugador quan s'arriba a aquell node.

Estratègia d'un jugador a un joc seqüencial
Una estratègia d'un jugador[1] i a un joc seqüencial és una assignació, a cada conjunt d'informació h del jugador i, d'una de les accions disponibles al conjunt d'informació h. Així, una estratègia d'un jugador consistirà en un vector amb tants components (dimensions) com conjunts d'informació tingui assignats el jugador.

Per exemple, al joc de la Fig. 1 el jugador 2 té dos conjunts d'informació i, per tant, una estratègia per al jugador 2 consisteix en especificar una acció a cadascun dels dos conjunts d'informació. Al conjunt d'informació $h = \{x, y\}$ hi ha dues accions possibles: c i n. Al conjunt d'informació $h' = \{x', y'\}$ hi ha dues accions possibles: c' i n'. En conseqüència hi ha 4 maneres de combinar una acció del conjunt h amb una del conjunt h'. Així, les estratègies del jugador 2 serien (c, c'), (c, n'), (n, c') i (n, n').

Q6. Per què, al joc de la Fig. 1, (c, n) no és una estratègia del jugador 2? Al mateix joc, és (p_{aa}, c) una estratègia d'algun jugador? Indica quines són les estratègies del jugador 1 al joc de la Fig. 1.

Estratègia mixta d'un jugador a un joc seqüencial
Una estratègia mixta d'un jugador i d'un joc seqüencial és una distribució de probabilitat sobre el conjunt d'estratègies del jugador i. Una jugada a un joc seqüencial és una assignació d'una estratègia mixta a cada jugador del joc.

Al joc de la Fig. 1, una estratègia mixta del jugador 2 seria una distribució de probabilitat sobre el conjunt $\{(c, c'), (c, n'), (n, c'), (n, n')\}$. Per exemple, la distribució de probabilitat σ_2 tal que $\sigma_2(c, c') = 1/6$, $\sigma_2(c, n') = 2/6$, $\sigma_2(n, c') = 3/6$ i $\sigma_2(n, n') = 0$ seria l'estratègia mixta on 2 tria (c, c') amb probabilitat $1/6$, tria (c, n') amb probabilitat $2/6$, tria (n, c') amb probabilitat $3/6$ i tria (n, n') amb probabilitat 0. Una possible jugada del joc de la Fig. 1 seria el parell (σ_1, σ_2) d'estratègies mixtes tals que $\sigma_1(p_{aa}, p_{bb}) = 1$, $\sigma_2(c, c') = 1/2$ i $\sigma_2(n, n') = 1/2$.

Representació d'un joc seqüencial com a joc simultani
Existeix un procediment que permet associar amb tot joc seqüencial un únic joc simultani (el procediment invers no existeix perquè diferents jocs seqüencials poden tenir associats el mateix joc simultani). Per a explicar el procediment, sigui G un joc seqüencial. El joc simultani G^* que es pot associar amb G es construeix de la següent manera (recordant que, per a definir un joc simultani, calen només tres elements: jugadors, estratègies i pagaments).

- El conjunt de jugadors de G^* és el mateix que el de G (excloent-hi la naturalesa).
- Per a cada jugador i de G^*, el conjunt d'estratègies d'i és el mateix conjunt d'estratègies que i té al joc seqüencial G.
- Per a cada jugada amb estratègies pures s de G^*, els pagaments dels jugadors són els que s'obtenen als nodes terminals de G que s'assoleixen quan la jugada s es juga al joc seqüencial G.

El joc G^* definit segons les tres regles anteriors s'anomena representació com a joc simultani del joc seqüencial G. La Fig. 4 mostra la representació del joc de la Fig. 1 com a simultani si $p_a = 1/2$.

[1] D'ara endavant, per jugador s'entén tot jugador diferent de la naturalesa.

1 \ 2	$c\,c'$	$c\,n'$	$n\,c'$	$n\,n'$
$p_{aa}\,p_{ab}$	5½ –1½	5½ –1½	2½ 0	2½ 0
$p_{aa}\,p_{bb}$	2½ 1½	1½ 1	3½ ½	2½ 0
$p_{ba}\,p_{ab}$	2½ 1½	6½ –2½	–1½ 4	2½ 0
$p_{ba}\,p_{bb}$	–½ 4½	2½ 0	–½ 4½	2½ 0

Fig. 4. Representació com a joc simultani del joc seqüencial de la Fig. 1 quan p_a = ½

Els jugadors del joc J4 de la Fig. 4 són els mateixos que els del joc J1 de la Fig. 1: els jugadors 1 i 2 (la naturalesa no es considera un jugador d'un joc simultani). Les estratègies del jugador 1 són parells perquè el jugador 1 té dos conjunts d'informació a J1. El mateix s'aplica al jugador 2. Tots dos tenen quatre estratègies perquè tots dos tenen dues accions a cada conjunt d'informació. Per a simplificar la notació, l'estratègia (c, c') s'escriu $c\ c'$, l'estratègia (p_{aa}, p_{ab}) s'escriu $p_{aa}\ p_{ab}$, etc.

Q7. Un jugador d'un joc seqüencial té tres conjunts d'informació. Al primer té dues accions; al segon, tres; i al tercer, quatre. Quantes estratègies té el jugador? Indica una.

L'única dificultat en la construcció de J4 rau en la determinació dels pagaments. La tècnica consisteix en anar jugada per jugada, especificar les estratègies de la jugada i observar els nodes terminals que s'assoleixen jugant la jugada al joc seqüencial. Si al joc seqüencial no participa la naturalesa, cada jugada condueix a un únic node terminal i el pagament de la jugada serà el pagament del node terminal corresponent. Si al joc seqüencial apareix la naturalesa (com al joc J1), cada jugada pot conduir a més d'un node terminal.

Com a il·lustració, considerem al jugada ($p_{ba}\ p_{bb}$, $c\ c'$), que diu: (i) que el jugador 1 tria p_{ba} al seu conjunt d'informació {v} i tria p_{bb} al conjunt d'informació {v'}; i (ii) que el jugador 2 tria c al seu conjunt d'informació {x, y} i tria c' al conjunt d'informació {x', y'}. Aquestes eleccions s'indiquen amb fletxes a la Fig. 5, on les dues fletxes que surten de l'arrel són degudes al fet que la naturalesa tria amb probabilitat positiva les dues accions disponibles a l'arrel. Els pagaments associats amb la jugada ($p_{ba}\ p_{bb}$, $c\ c'$) s'obtenen seguint les fletxes des de l'arrel fins a un node terminal, aplicant després les probabilitats de les eleccions de la naturalesa. En aquest cas, el node terminal z_1 s'assoleix amb probabilitat p_a = ½ en tant que el node terminal z_3 s'assoleix amb probabilitat 1 – p_a = ½. Així que el vector de pagaments (–3, 8) del node terminal z_1 s'obté amb probabilitat ½ i el vector (2, 1) del node terminal z_3 s'obté amb probabilitat ½. Com a resultat, el vector de pagaments de la jugada ($p_{ba}\ p_{bb}$, $c\ c'$) seria ½·(–3, 8) + ½·(2, 1) = (–3⁄2 + 1, 4 + ½) = (–0'5, 4'5), que a la Fig. 4 s'expressa com (–½, 4½).

Q8. Comprova que els pagaments de la Fig. 4 són correctes.

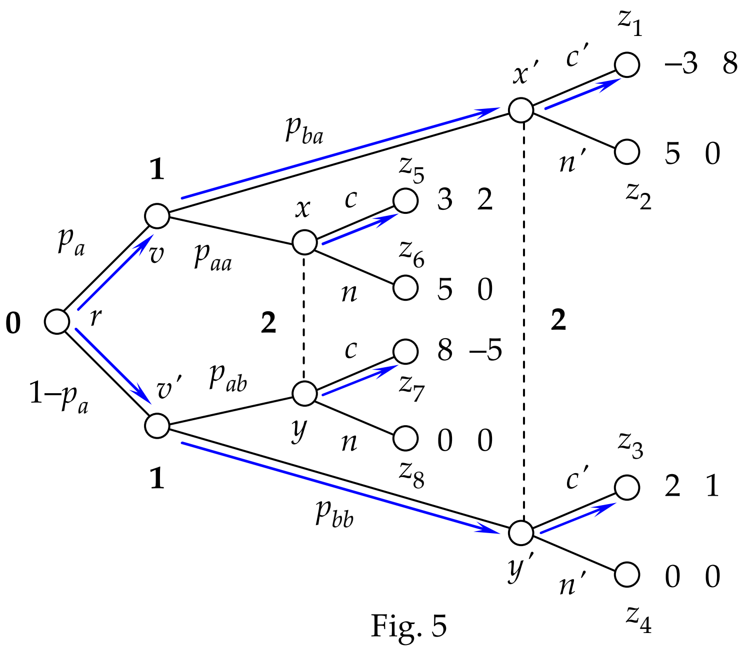

Fig. 5

Q9. Pot un jugador tenir més accions que estratègies pures? I estratègies pures que accions?.

Q10. Troba la representació com a joc simultani del jocs de les Figs. 1 (amb p_a = ⅓), 6, 7 i 8.

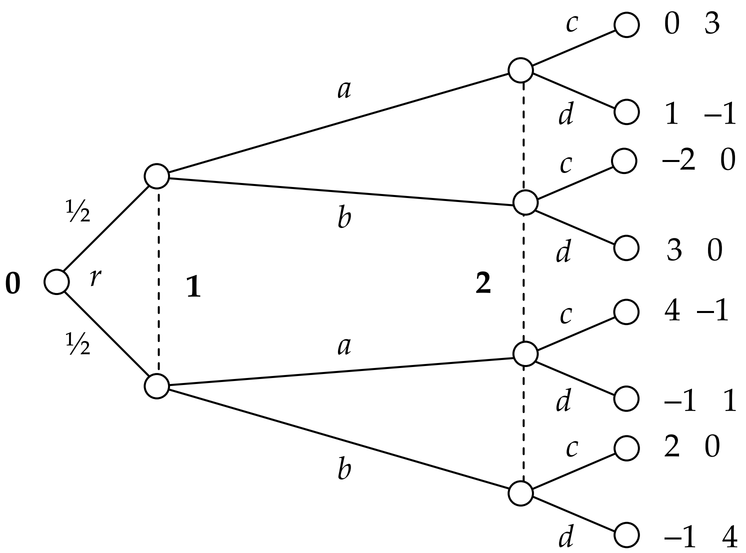

Fig. 6

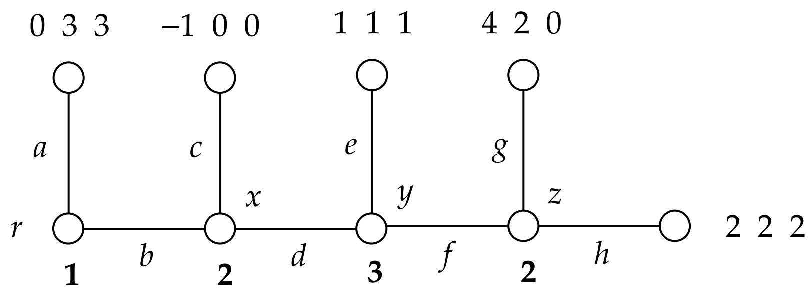

Fig. 7

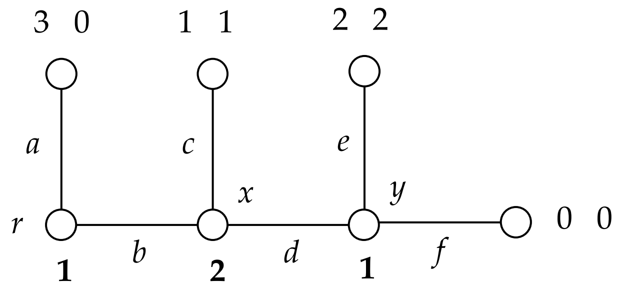

Fig. 8

La representació d'un joc seqüencial com a simultani permet analitzar (solucionar) el joc seqüencial mitjançant l'anàlisi (la solució) del joc simultani. Per exemple, es pot definir un equilibri de Nash d'un joc seqüencial com a un equilibri de Nash de la representació del joc seqüencial com a joc simultani (on és més fàcil identificar els equilibris). En aquest cas, l'únic equilibri de Nash amb estratègies pures del joc J1 (Fig. 4) seria la jugada (p_{aa} p_{ab}, n n').

Q11. Comprova que (p_{aa} p_{ab}, n n') és l'únic equilibri de Nash amb estratègies pures del joc J4. Interpreta què significa la jugada (p_{aa} p_{ab}, n n').

Suposem que el jugador 1 del joc de la Fig. 1 planeja jugar l'estratègia mixta [p_{aa} p_{ab}, p_{aa} p_{bb}, p_{ba} p_{ab}, p_{ba} p_{bb}] = [⅙, 2⁄6, 3⁄6, 0]. La qüestió és: què fa 1 al seu conjunt d'informació {v}? És a dir, amb quina probabilitat tria p_{aa} i amb quina tria p_{ba}? Un podria pensar que n'hi ha prou amb aïllar les probabilitats de p_{aa} i de p_{ba} a l'estratègia mixta anterior. En concret, si la probabilitat de jugar l'estratègia pura (p_{ba}, p_{bb}) és zero, aleshores s'hauria de tenir que $p_{ba} = 0$, $p_{bb} = 0$ o $p_{ba} = p_{bb} = 0$. Però $p_{ba} = 0$ faria que la probabilitat de jugar (p_{ba}, p_{ab}) fos zero, contradient el fet que és 3⁄6. D'altra banda, $p_{bb} = 0$ faria que la probabilitat de jugar (p_{aa}, p_{bb}) fos zero, contradient el fet que és 2⁄6. Com es resol el problema?

Estratègia de comportament d'un jugador a un joc seqüencial

Una estratègia de comportament d'un jugador i a un joc seqüencial consisteix en assignar, a cada conjunt d'informació h del jugador i, una distribució de probabilitat sobre el conjunt de les accions disponibles al conjunt d'informació h.

Per exemple, al joc de la Fig. 1, una estratègia de comportament del jugador 2 especificaria amb quina probabilitat 2 tria c al conjunt d'informació {x, y} i amb quina probabilitat 2 tria c' al conjunt d'informació {x', y'}.

Comparació entre estratègies mixtes i estratègies de comportament

La relació entre les estratègies mixtes i les de comportament d'un jugador és similar a la relació entre estratègies correlacionades i estratègies mixtes a un joc simultani. Per a definir una estratègia mixta, primer es combinen les accions del jugador a cadascun dels seus conjunts d'informació per a crear el conjunt d'estratègies (pures) del jugador i després es fa una distribució de probabilitat sobre aquest conjunt. Per a definir una estratègia de comportament, primer es fa, per a cada conjunt d'informació del jugador, una distribució de probabilitat sobre les accions a cada conjunt d'informació i després es combinen les distribucions de probabilitat.

En termes formals, sigui: (i) H_i el conjunt de conjunts d'informació del jugador i; (ii) per a tot conjunt d'informació $h \in H_i$, A_h el conjunt d'accions disponibles a h; i (iii) per a tot conjunt finit F, $\Delta(F)$ el conjunt de distribucions de probabilitat sobre F. Aleshores, el conjunt d'estratègies mixtes és $\Delta(\prod_{h \in H_i} A_h)$ i el conjunt d'estratègies de comportament és $\prod_{h \in H_i} \Delta(A_h)$.

Per exemple, al joc de la Fig. 1, triar l'estratègia pura (p_{aa}, p_{bb}) amb probabilitat ½ i l'estratègia pura (p_{ba}, p_{ab}) amb probabilitat ½ és una estratègia mixta (perquè indica un pla d'actuació interdependent entre els dos conjunts d'informació del jugador 1). En canvi, triar l'acció p_{aa} al conjunt d'informació $\{v\}$ amb probabilitat ½ i triar l'acció p_{bb} amb probabilitat ½ al conjunt d'informació $\{v'\}$ és una estratègia de comportament. Per tant, estratègies de comportament i estratègies mixtes expressen dues maneres de randomitzar, localment o global.

El conjunt d'estratègies mixtes és, d'entrada, més general que el d'estratègies de comportament, perquè una estratègia mixta permet a un jugador correlacionar les seves eleccions a diferents conjunts d'informació, en tant que les decisions representades per una estratègia de comportament implica que el jugador tria les seves accions a un conjunt d'informació independentment de les eleccions fetes a altres conjunts d'informació. Intuïtivament, una estratègia mixta es correspondria amb una decisió centralitzada (on es tenen alhora presents tots els problemes de decisió representats per tots els conjunts d'informació d'un jugador), en tant que una estratègia de comportament es correspondria amb una decisió descentralitzada (on es considera cada problema de decisió per separat). Per fortuna, hi ha una propietat força raonable dels jocs seqüencials que permet obtenir amb estratègies de comportament qualsevol resultat que es pugui obtenir mitjançant estratègies mixtes.

Jocs seqüencials amb memòria perfecta

Un joc seqüencial és un joc amb memòria perfecta si s'acompleix el següent per a tot jugador i: si el node x del jugador i és precedit per l'acció a presa a un node v assignat també al jugador i aleshores cada node y del conjunt d'informació del que forma part x ha de ser precedit per la mateixa acció a presa a algun node w que pertany al mateix conjunt d'informació que v.

La propietat de memòria perfecta expressa la idea que un jugador sempre recorda les decisions preses anteriorment: si prendre l'acció a a un node v d'un conjunt d'informació h del jugador i pot portar a un segon conjunt d'informació h' del mateix jugador aleshores prendre l'acció a a qualsevol altre node d'h també ha de poder portar a h'. Les Figs. 9 i 10 mostren casos de violació de la memòria perfecta (a la Fig. 10, un únic conjunt d'informació fa possible la violació).

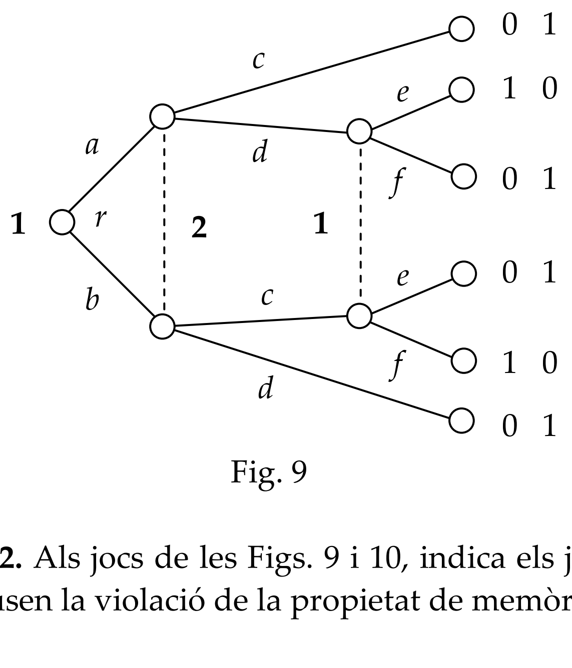

Fig. 9

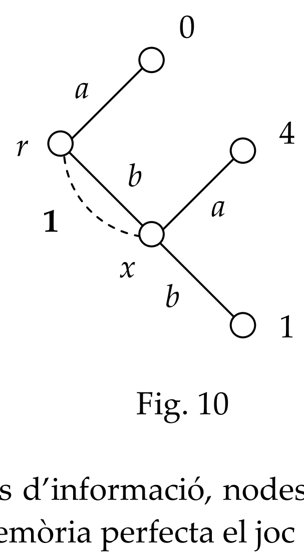

Fig. 10

Q12. Als jocs de les Figs. 9 i 10, indica els jugadors, conjunts d'informació, nodes i accions que causen la violació de la propietat de memòria perfecta. Té memòria perfecta el joc de la Fig. 1?

Q13. Al joc de la Fig. 9, quan el jugador 2 juga c, calcula el pagament del jugador 1 quan juga l'estratègia mixta $[ae, bd] = [½, ½]$. Fes el mateix quan juga l'estratègia mixta $[ad, be] = [½, ½]$. Fes el mateix quan juga l'estratègia de comportament $[a, e] = [½, ½]$.

El conductor desmemoriat

El joc de la Fig. 10, degut a Michele Piccione i Ariel Rubinstein, representa la següent situació. Un individu es troba a un bar planejant el retorn a casa. De camí cap a casa, l'individu ha de circular per una carretera i sortir quan es trobi a la segona cruïlla. Si surt (acció a) a la primera cruïlla (node r) va a parar a un lloc amb un alt cost de retorn cap a la carretera (pagament 0). Si surt a la segona cruïlla (node x) obté el pagament més alt: 4. Si no surt a la segona cruïlla (acció b) va a parar a un lloc amb un menor cost de retorn a la carretera (pagament 1). El problema, del qual és conscient l'individu quan planeja el viatge, és que quan arriba a una cruïlla no se'n recorda de si és la primera o la segona. Per tant, per a l'individu, els nodes r i x són indistingibles. Això implica que, quan és a x, ha oblidat que prèviament ha decidit no sortir ; i que, quan és a r, no pot establir si ja ha passat per la primera cruïlla. Aquesta situació té algunes conseqüències estranyes. Per exemple, si l'individu només tria una estratègia pura (això és, a = sortir o b = continuar), és impossible que arribi a casa.

Q14. Per què és impossible obtenir el pagament 4 a la Fig. 10 si només es trien estratègies pures?

Atès que el jugador 1 de la Fig. 10 només té un conjunt d'informació, les estratègies mixtes i de comportament coincideixen. Quina és l'estratègia mixta que maximitza el pagament d'1 al joc de la Fig. 10? La funció de pagaments esperats, expressada en termes de la probabilitat b de continuar, és $U(b) = (1 - b)\cdot 0 + b\cdot[4\cdot(1 - b) + 1\cdot b] = 4b - 3b^2$. Per a maximitzar respecte de b, igualem la derivada $\dfrac{\partial U(b)}{\partial b}$ a zero. D'aquí, $4 - 6b = 0$ i $b = ⅔$. Per tant, no sortir amb probabilitat ⅔ maximitza el pagament esperat. El pagament esperat quan $b = ⅔$ seria $4/3$.

Q15. Al joc de la Fig. 10, expressa el pagament esperat en termes de la probabilitat a de sortir, calcula el valor d'a que maximitza el pagament esperat i determina el pagament corresponent.

Compatibilitat d'estratègies i conjunts d'informació

Sigui h un conjunt d'informació d'un jugador i d'un joc seqüencial i s_i una estratègia pura del jugador i. Aleshores es diu que h i s_i són compatibles si existeix una combinació d'estratègies pures s_{-i} dels altres jugadors tal que algun node d'h s'assoleix amb probabilitat positiva quan es juga la jugada (s_i, s_{-i}). Per al conjunt d'informació h, sigui $C(h)$ el conjunt d'estratègies del jugador assignat a h que són compatibles amb h.

Per exemple, al joc de la Fig. 1, $h = \{x, y\}$ i $s_2 = (c, c')$ són compatibles, perquè l'estratègia $s_1 = (p_{aa}, p_{bb})$ del jugador 1 fa que hi hagi la probabilitat p_a d'assolir el node x i, per tant, d'assolir h. En canvi, al joc de la Fig. 8, el conjunt d'informació $h = \{y\}$ del jugador 1 no és compatible amb l'estratègia pura (a, e) del jugador 1: no hi ha cap jugada on 1 jugui l'estratègia (a, e) que dugui cap al conjunt d'informació $\{y\}$.

Q16. Mostra que, al joc de la Fig. 1, tots els conjunts d'informació del jugador 1 són compatibles amb totes les estratègies pures del jugador 1. Al joc de la Fig. 7, indica un jugador, un conjunt d'informació del jugador i una estratègia del jugador que siguin compatibles. Al mateix joc, troba conjunt d'informació i estratègia d'un mateix jugador que no siguin compatibles.

Per extensió, un conjunt d'informació h i una estratègia mixta σ_i del jugador i assignat a h són compatibles si existeix una estratègia pura s_i d'i tal que: (i) h i s_i són compatibles; i (ii) $\sigma_i(s_i) > 0$, això és, l'estratègia mixta σ_i assigna probabilitat positiva a l'estratègia pura s_i.

Per al conjunt d'informació h i l'acció a disponible a h, sigui $C(h, a)$ el conjunt d'estratègies del jugador assignat a h que: (i) prescriuen l'acció a al conjunt d'informació h; i (ii) són compatibles amb h.

Per exemple, al joc de la Fig. 1, les 4 estratègies pures del jugador 2 són compatibles amb $h = \{x, y\}$, de forma que $C(h) = \{(c, c'), (c, n'), (n, c'), (n, n')\}$. D'aquestes estratègies, només (c, c') i (c, n') prescrieun l'acció c at conjunt d'informació h, motiu pel qual $C(h, c) =\{(c, c'), (c, n')\}$.

Q17. Al joc de la Fig. 1, determina $C(\{x, y\}, n)$ i $C(\{x', y'\}, n')$. Al joc de la Fig. 8, determina $C(\{y\}, e)$ i $C(\{x\}, c)$.

Representació com a estratègia de comportament d'una estratègia mixta

Sigui i un jugador d'un joc seqüencial i sigui H el conjunt de conjunts d'informació d'i al joc. Una estratègia de comportament $\beta_i = (\beta_{ih})_{h\in H}$ del jugador i és una representació com a estratègia de comportament de l'estratègia mixta σ_i del mateix jugador si, per a tot conjunt d'informació h del jugador i i per a tota acció a disponible al conjunt d'informació h

$$\beta_{ih}(a)\ (\textstyle\sum_{s_i\in C(h)} \sigma_i(s_i)) = \textstyle\sum_{s_i\in C(h,a)} \sigma_i(s_i) \tag{1}$$

on $\beta_{ih}(a)$ és la probabilitat que l'estratègia de comportament assigna a l'acció a al conjunt d'informació i $\sigma_i(s_i)$ és la probabilitat que l'estratègia mixta σ_i assigna a l'estratègia pura s_i.

La condició (1) expressa la idea que, per a tota acció a a tot conjunt d'informació h compatible amb σ_i, $\beta_{ih}(a)$ és la probabilitat condicional d'escollir a a h. Si h no és compatible amb σ_i, llavors $\sum_{s_i\in C(h)} \sigma_i(s_i) = \sum_{s_i\in C(h,a)} \sigma_i(s_i) = 0$ i qualsevol distribució de probabilitat β_{ih} sobre A_h satisfà (1).

Gràcies a (1) podem donar resposta a la pregunta de què es juga al node v quan s'implementa l'estratègia mixta $\sigma_1 = [p_{aa}\ p_{ab},\ p_{aa}\ p_{bb},\ p_{ba}\ p_{ab},\ p_{ba}\ p_{bb}] = [⅙, 2/6, 3/6, 0]$. La resposta consisteix en representar σ_1 com a estratègia de comportament. Les accions disponibles al conjunt d'informació $\{v\}$ són p_{aa} i p_{ba}. El conjunt $C(\{v\})$ coincideix amb el conjunt de totes les estratègies pures del jugador 1. Per tant, amb $h = \{v\}$, $\sum_{s_1\in C(h)} \sigma_1(s_1)$ és la suma de les probabilitats, segons σ_1, de totes les estratègies pures d'1. Per definició, la suma ha de ser 1 (⅙ + 2/6 + 3/6 + 0). En resum, $\sum_{s_1\in C(h)} \sigma_1(s_1) = 1$. D'altra banda, $C(\{v\}, p_{aa}) = \{(p_{aa}, p_{ab}), (p_{aa}, p_{bb})]$. Així, amb $h = \{v\}$ i $a = p_{aa}$, resulta que $\sum_{s_1\in C(h,a)} \sigma_1(s_1) = \sigma_1(p_{aa}, p_{ab}) + \sigma_1(p_{aa}, p_{bb}) = ⅙ + 2/6 = ½$. Per (1), la probabilitat $\beta_{1h}(p_{aa})$ de triar p_{aa} a $h = \{v\}$ quan es juga l'estratègia mixta σ_1 és $\beta_{1h}(p_{aa}) = (½)/1 = ½$. Atès que β_{1h} és una distribució de probabilitat sobre $A_h = \{p_{aa}, p_{ba}\}$, $\beta_{1h}(p_{aa}) = ½$ implica $\beta_{1h}(p_{ba}) = ½$.

Per a acabar d'especificar una estratègia de comportament per al jugador 1, cal determinar la distribució de probabilitat $\beta_{1h'}$ corresponent al conjunt d'informació $h' = \{v'\}$. Com abans, el conjunt $C(h')$ coincideix amb el conjunt de totes les estratègies pures del jugador 1. En conseqüència, $\sum_{s_1 \in C(h')} \sigma_1(s_1)$ és la suma de les probabilitats, segons σ_1, de totes les estratègies pures d'1. També com abans $\sum_{s_1 \in C(h')} \sigma_1(s_1) = 1$. D'altra banda, $C(h', p_{ab}) = \{(p_{aa}, p_{ab}), (p_{ba}, p_{ab})\}$. Així, amb $h' = \{v'\}$ i $a = p_{ab}$, $\sum_{s_1 \in C(h',a)} \sigma_1(s_1) = \sigma_1(p_{aa}, p_{ab}) + \sigma_1(p_{ba}, p_{ab}) = 1/6 + 3/6 = 2/3$. Per (1), la probabilitat $\beta_{1h'}(p_{ab})$ de triar p_{ab} a $h' = \{v'\}$ quan es juga l'estratègia mixta σ_1 és $\beta_{1h'}(p_{ab}) = (2/3)/1 = 2/3$. D'aquí, $\beta_{1h'}(p_{bb}) = 1/3$. Recapitulant, l'estratègia de comportament que representa l'estratègia mixta $\sigma_1 = [p_{aa}\, p_{ab}, p_{aa}\, p_{bb}, p_{ba}\, p_{ab}, p_{ba}\, p_{bb}] = [1/6, 2/6, 3/6, 0]$ és β_1 tal que $\beta_{1h}(p_{aa}) = 1/2$ i $\beta_{1h'}(p_{ab}) = 2/3$. Com a resultat, es pot interpretar que l'estratègia mixta σ_1 diu que s'ha de jugar p_{aa} amb probabilitat $1/2$ al node v i p_{ab} amb probabilitat $2/3$ al node v'.

Q18. Al joc de la Fig. 1, comprova que l'estratègia mixta $\tau_1 = [p_{aa}\, p_{ab}, p_{aa}\, p_{bb}, p_{ba}\, p_{ab}, p_{ba}\, p_{bb}] = [1/3, 1/6, 1/3, 1/6]$ té la mateixa representació com a estratègia de comportament que l'estratègia mixta $\sigma_1 = [p_{aa}\, p_{ab}, p_{aa}\, p_{bb}, p_{ba}\, p_{ab}, p_{ba}\, p_{bb}] = [1/6, 2/6, 3/6, 0]$.

Q19. Al joc de la Fig. 8, troba l'estratègia de comportament que representa l'estratègia mixta $\sigma_1 = [ae, af, be, bf] = [1/2, 1/4, 1/4, 0]$. Fes el mateix per a l'estratègia mixta $\tau_1 = [ae, af, be, bf] = [0, 1/3, 1/3, 1/3]$.

Representació com a estratègia mixta d'una estratègia de comportament

La representació com a estratègia mixta d'una estratègia de comportament $\beta_i = (\beta_{ih})_{h \in H}$ del jugador i d'un joc seqüencial que té H com a conjunt de conjunts d'informació és l'estratègia mixta σ_i del jugador i tal que, per a tota estratègia pura s_i del jugador i,

$$\sigma_i(s_i) = \prod_{h \in H} \beta_{ih}(s_{ih}) \tag{2}$$

on $\sigma_i(s_i)$ és la probabilitat que l'estratègia mixta σ_i assigna a l'estratègia pura s_i, s_{ih} és l'acció que l'estratègia pura s_{ih} selecciona al conjunt d'informació h, $\beta_{ih}(s_{ih})$ és la probabilitat que l'estratègia de comportament β_i assigna a l'acció s_{ih} i $\prod_{h \in H}$ representa el producte de les probabilitats $\beta_{ih}(s_{ih})$.

Per exemple, si $\beta_{1h}(p_{aa}) = 1/2$ i $\beta_{1h'}(p_{ab}) = 2/3$ aleshores l'estratègia mixta σ_1 associada satisfà: $\sigma_1(p_{aa}, p_{ab}) = \beta_{1h}(p_{aa}) \cdot \beta_{1h'}(p_{ab}) = 1/2 \cdot 2/3 = 1/3$; $\sigma_1(p_{aa}, p_{bb}) = \beta_{1h}(p_{aa}) \cdot \beta_{1h'}(p_{bb}) = \beta_{1h}(p_{aa}) \cdot (1 - \beta_{1h'}(p_{ab})) = 1/2 \cdot (1 - 2/3) = 1/6$; $\sigma_1(p_{ba}, p_{ab}) = \beta_{1h}(p_{ba}) \cdot \beta_{1h'}(p_{ab}) = 1/2 \cdot 2/3 = 1/3$; i $\sigma_1(p_{ba}, p_{bb}) = \beta_{1h}(p_{ba}) \cdot \beta_{1h'}(p_{bb}) = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$.

Equivalència de dues estratègies mixtes en termes d'estratègies de comportament

Per la qüestió **Q18**, dues estratègies mixtes poden estar representades per la mateixa estratègia de comportament. Es diu que dues estratègies mixtes són equivalents en termes d'estratègies de comportament si totes dues tenen la mateixa representació com a estratègia de comportament.

Q20. Comprova que, al joc de la Fig. 11, les estratègies mixtes $\sigma_1 = [ae, af, be, bf] = [1/2, 0, 0, 1/2]$ i $\tau_1 = [ae, af, be, bf] = [1/2, 0, 1/2, 0]$ són equivalents en termes d'estratègies de comportament.

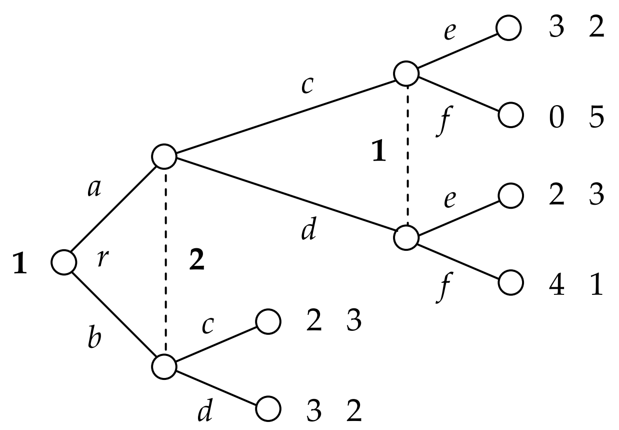

Fig. 11. Myerson (1991, p. 158)

Equivalència de dues estratègies mixtes en termes de pagaments

Dues estratègies mixtes σ_i i τ_i d'un jugador *i* d'un joc seqüencial *G* són equivalents en termes de pagaments si, per a tota assignació σ_{-i} d'estratègies mixtes a la resta de jugadors, $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(\tau_i, \sigma_{-i})$, on u_i és la funció de pagaments del jugador *i* a la representació com a joc simultani del joc seqüencial *G*. Les estratègies mixtes σ_i i τ_i del jugador *i* són equivalents en termes de pagaments si, facin el que facin els rivals, jugar una dóna el mateix pagament al jugador *i* que jugar l'altra.

Teorema de Kuhn (1953)

Sigui β *la jugada formada per les estratègies de comportament d'un joc seqüencial que representen les estratègies mixtes corresponents de la jugada* σ *formada per estratègies mixtes. Aleshores, per a tot jugador i, el pagament esperat d'i quan es juga* β *coincideix amb el pagament esperat d'i quan es juga* σ *si, i només si, el joc té memòria perfecta.*

El teorema de Kuhn liquida el debat sobre si a un jugador li convé més triar estratègies mixtes o de comportament (almenys si el joc té memòria perfecta). En principi, una estratègia mixta és més general (permet més coses) que una de comportament. Però, en última instància, les estratègies són instruments per a aconseguir un fi: els pagaments. Així, si per a cada estratègia mixta hi hagués una estratègia de comportament que proporcionés els mateixos pagaments, no s'hi guanyaria res seleccionant estratègies mixtes en comptes d'estratègies de comportament. El teorema de Kuhn diu que aquest és el cas si el joc té memòria perfecta: no cal que un jugador es preocupi de correlacionar les seves decisions a diferents conjunts d'informació sinó que pot enfrontar-se al problema de què jugar localment, això és, considerant la decisió de què triar a cada conjunt d'informació per separat.

[Nota: hi ha una altra versió del teorema de Kuhn que diu que, amb memòria perfecta, dues estratègies mixtes que són equivalents en termes d'estratègies de comportament també ho són en termes de pagaments].

Q21. Al joc de la Fig. 1, suposa que el jugador 2 tria l'estratègia mixta σ_2 tal que $\sigma_2(c, c') = \sigma_2(d, d') = ½$. Comprova que el jugador 1 obté el mateix pagament jugant l'estratègia mixta $\sigma_1 = [p_{aa}\, p_{ab}, p_{aa}\, p_{bb}, p_{ba}\, p_{ab}, p_{ba}\, p_{bb}] = [1/6, 2/6, 3/6, 0]$ que l'estratègia de comportament que la representa.

El següent exemple demostra que la hipòtesi de memòria perfecta és necessària per a la validesa del teorema de Kuhn. Al joc de la Fig. 9, sigui l'estratègia mixta σ_1 del jugador 1 tal que $\sigma_1(a, e) = \sigma_1(b, f) = ½$. La seva representació com a estratègia de comportament β_1 satisfà $\beta_1(a) = \beta_1(e) = 1/2$. Però, quan el jugador 2 juga l'estratègia tal que $c = ½$, el pagament esperat d'1 triant σ_1 és ½ en tant que el seu pagament esperat triant β_1 és ¼. Pel teorema de Kuhn, el joc de la Fig. 9 no pot tenir memòria perfecta, que és efectivament el que succeeix.

Q22. Al joc de la Fig. 9, l'estratègia on el jugador 2 tria *c* amb probabilitat ½, és una estratègia pura? És una estratègia mixta? És una estratègia de comportament?

Pel teorema de Kuhn, no hi ha cap pèrdua de generalitat si els jocs amb memòria perfecta s'analitzen en termes d'estratègies de comportament, que són més fàcils de visualitzar i entendre a una joc seqüencial que les estratègies mixtes. De fet, d'ara endavant els jocs seqüencials que es considerin tindran memòria perfecta.

L'anàlisi en termes d'estratègies de comportament porta associada una complicació: quan un jugador decideix què fer a un conjunt d'informació amb més d'un node necessita formar una creença sobre el node en què es troba.

Creences

Una creença del jugador *i* d'un joc seqüencial consisteix en assignar, a cada conjunt d'informació *h* del jugador, una distribució de probabilitat sobre els nodes que formen *h*.

Una creença d'un jugador explicita, per a tot node *x* assignat a un jugador, quina és la probabilitat que el jugador assigna a trobar-se al node *x* (probabilitat condicionada al fet de trobar-se al conjunt d'informació que conté *x*). Gràcies a la creença adoptada a un conjunt d'informació *h*, el jugador assignat a *h* podrà determinar quina és la millor elecció.

Per exemple, sigui el jugador 2 del joc de la Fig. 1 al seu conjunt d'informació $h = \{x, y\}$. Si el jugador 2 es troba al node *x*, l'acció que li maximitza el pagament és *c*. En canvi, si es troba al node *y*, l'acció que maximitza el pagament és *n*. Una creença del jugador 2 ha d'especificar quina probabilitat atribueix a cada node d'*h* quan les decisions de la resta de jugadors porten a *h*. Sigui α la probabilitat que 2 assigna al fet de trobar-se al node *x* quan 2 sap que es troba al conjunt d'informació *h*. Aleshores, triar *c* comporta un pagament esperat (donat que 2 sap que es troba a *h*) de $2\alpha - 5(1 - \alpha) = 7\alpha - 5$ i triar *n* comporta un pagament esperat de 0. En conseqüència, triar *c* serà (estrictament) millor que triar *n* si $7\alpha - 5 > 0$; això és, si $\alpha > 5/7$; serà (estrictament) pitjor si $\alpha < 5/7$; i serà igual triar *c* que *n* si $\alpha = 5/7$.

Sistema de creences

Un sistemes de creences per a un joc seqüencial és una especificació d'una creença per a cada jugador del joc.

Regla de Bayes

La regla de Bayes [IPA: /'beɪz/)] permet actualitzar una probabilitat d'un esdeveniment quan s'observa un altre esdeveniment. Sigui $p(A)$ la probabilitat inicial (*prior probability*) o probabilitat marginal d'un determinant esdeveniment A. Aquesta probabilitat, en principi, no té en compte cap informació relativa a un altre esdeveniment B. Sigui $p(A|B)$ la probabilitat condicionada (*posterior probability*) d'A donat (quan succeeix) l'esdeveniment B. Per definició de probabilitat condicionada, $p(A|B) = p(A \cap B)/p(B)$. Sigui $p(B) \neq 0$ la probabilitat inicial de B i sigui $p(B|A)$ la probabilitat condicionada de B donat A. La fórmula de Bayes estableix que

$$p(A \mid B) = \frac{p(B \mid A)p(A)}{p(B)}. \tag{3}$$

Alternativament, si $\{A_i\}_{i \in I}$ és una partició de l'espai d'esdeveniments, resulta que

$$p(A_i \mid B) = \frac{p(B \mid A_i)p(A_i)}{p(B)} = \frac{p(B \mid A_i)p(A_i)}{\sum_{j \in I} p(B \cap A_j)} = \frac{p(B \mid A_i)p(A_i)}{\sum_{j \in I} p(B \mid A_j)p(A_j)}. \tag{4}$$

Consistència de les creences amb estratègies de comportament
La informació que un jugador té sobre les decisions dels altres condiciona el tipus de creença que es poden adoptar. La regla de Bayes (4) s'emprarà per a determinar com la informació que reben els jugadors a mesura que un joc seqüencial es juga modifica les seves creences.

Per exemple, al joc de la Fig. 1, suposem que $p_a = ½$, que $p_{aa} = ⅔$ i que $p_{ab} = ¼$. Amb aquesta informació, pot actualitzar-se una creença al conjunt d'informació $h = \{x, y\}$ aplicant la regla de Bayes. Sigui $p(x)$ la probabilitat d'arribar al node x des de l'arrel. Aquesta probabilitat és la probabilitat de passar del node r al node v (la probabilitat $p_a = ½$) multiplicada per la probabilitat de passar del node v al node x (la probabilitat $p_{aa} = ⅔$). Per tant, $p(x) = p_a \cdot p_{aa} = ½ \cdot ⅔ = ⅓$. Amb $h = \{x, y\}$, sigui $p(x|h)$ la probabilitat d'assolir el node x donat que s'ha assolit el conjunt d'informació h. Aquesta és la probabilitat que interessa calcular: si s'ha arribat al conjunt d'informació h (un fet que el jugador 2 sap quan es produeix), quina és la probabilitat de trobar-se al node x? Atès que h està particionat en dos conjunts, $\{x\}$ i $\{y\}$, per (4),

$$p(x \mid h) = \frac{p(h \mid x)p(x)}{p(h \mid x)p(x) + p(h \mid y)p(y)}.$$

Però $p(h|x) = 1$: la probabilitat de ser al conjunt d'informació h quan s'assoleix el node x és 1, perquè el node x és part d'h. Anàlogament, $p(h|y) = 1$. En conseqüència,

$$p(x \mid h) = \frac{p(x)}{p(x) + p(y)}.$$

Aquesta fórmula simplement expressa com distribuir proporcionalment entre x i y la probabilitat total $p(x) + p(y)$. A l'exemple anterior, $p(y) = (1 - p_a) \cdot p_{ab} = ½ \cdot ¼ = ⅛$. Així doncs $p(x|h) = ⅓ / (⅓ + ⅛) = 8/11$ i, atès que $p(x|h) + p(y|h) = 1$, $p(y|h) = 3/11$. Aquestes dues probabilitats defineixen les creences al conjunt d'informació $h = \{x, y\}$ consistents amb l'estratègia de comportament del jugador 1 tal que $p_{aa} = ⅔$ i $p_{ab} = ¼$ i consistents amb les eleccions de la naturalesa.

Q23. Al joc de la Fig. 1, troba les creences al conjunt d'informació $\{x', y'\}$ consistents amb $p_a = ½$, $p_{aa} = ⅔$ i $p_{ab} = ¼$.

Q24. Al joc de la Fig. 1, troba les creences al conjunt d'informació $\{v\}$ consistents amb l'elecció de la naturalesa. Fes el mateix per al conjunt d'informació $\{v'\}$.

Q25. Al joc de la Fig. 10, l'elecció òptima era $b = ⅔$. Quina és la creença consistent amb aquesta estratègia? Donada aquesta creença consistent, és $b = ⅔$ l'estratègia que maximitza el pagament? Si no és així, quina l'estratègia que maximitza el pagament amb creences consistents?

Sistema de creences consistent amb una jugada formada per estratègies de comportament
Sigui β una jugada d'un joc seqüencial formada per estratègies de comportament (incloent-hi les eleccions de la naturalesa, si n'hi ha). Aleshores el sistema de creences π és consistent amb β si, per a tot jugador i, tot conjunt d'informació h d'i i tot node x d'h, la probabilitat $\pi(x)$ que el sistema de creences assigna al node x satisfà (5)

$$\pi(x) \cdot \textstyle\sum_{y\in h} p(y|\beta) \;=\; p(x|\beta) \tag{5}$$

on, per a tot node v del conjunt d'informació h, $p(v|\beta)$ és la probabilitat d'arribar al node v des de l'arrel quan es juga d'acord amb β: el producte de les probabilitats de les branques que connecten l'arrel amb v.

La fórmula (5) no és tan útil com pot semblar. Si hi ha una probabilitat positiva d'arribar al conjunt d'informació h des de l'arrel, aleshores $\sum_{y\in h} p(y|\beta) > 0$ i $\pi(x) = p(x|\beta) \,/\, \sum_{y\in h} p(y|\beta)$. L'exemple anterior il·lustra aquest cas: amb β tal que $p_a = ½$, $\beta(p_{aa}) = ⅔$ i $\beta(p_{ab}) = ¼$, $p(x|\beta) = ½ \cdot ⅔ = ⅓$ i $\sum_{y\in h} p(y|\beta) = p(x|\beta) + p(y|\beta) = ⅓ + ½ \cdot ¼ = 11/24$. Així, $\pi(x) = ⅓ \,/\, 11/24 = 8/11$.

Però si la probabilitat d'arribar a h és 0, $\sum_{y\in h} p(y|\beta) = p(x|\beta) = 0$ i qualsevol valor de $\pi(x)$ satisfà (5). Per exemple, al joc de la Fig. 1, amb β tal que $p_a = ½$ i $\beta(p_{ba}) = \beta(p_{ab}) = 1$, $p(x|\beta) = p_a \cdot p_{aa} = ½ \cdot 0 = 0$ i $p(y|\beta) = (1 - p_a) \cdot p_{ab} = ½ \cdot 0 = 0$. Per tant, qualsevol creença a $h = \{x, y\}$ és consistent amb β.

Q26. Al joc de la Fig. 1, troba les creences al conjunt d'informació $\{x, y\}$ consistents amb β tal que $p_a = ½ = \beta(p_{aa})$ i $\beta(p_{bb}) = 1$. Indica un jugada formada per estratègies de comportament que facin consistent la creença $\pi(x') = \pi(y') = ½$ si $p_a = ⅓$.

Seqüencialitat racional
Una jugada β formada per estratègies de comportament d'un joc seqüencial és seqüencialment racional a un conjunt d'informació h, donat un sistema de creences π, si l'estratègia β_{ih} corresponent al jugador i assignat a h maximitza el pagament esperat d'i, donades les creences especificades per π, assumint que h s'assoleix i assumint que els jugadors que juguen després del jugador i juguen d'acord amb β. [Per extensió, es dirà, en aquestes circumstàncies, que l'estratègia de comportament β_{ih} és seqüencialment racional at h]

Com a il·lustració, considerem la seqüencialitat racional al conjunt d'informació $\{y\}$ del joc de la Fig. 8. Atès que el conjunt d'informació $\{y\}$ només té un node, tot sistema de creences ha d'assignar probabilitat 1 al node y. Això fa que sigui irrellevant el que la jugada especifiqui abans del node y: tot el que ha pogut passar abans està resumit, des del punt de vista del jugador que juga a y, a les creences. D'altra banda, ningú no juga després del node y, de forma que l'elecció dictada per una estratègia de comportament al conjunt $\{y\}$ és seqüencialment racional a $\{y\}$ si, i només, si l'elecció maximitza el pagament al node y. Per tant, només triar e amb probabilitat 1 és seqüencialment racional a $\{y\}$.

Una segona il·lustració. Al joc de la Fig. 11, sigui β la jugada tal que $\beta(a) = \frac{1}{3}$, $\beta(c) = \frac{1}{4}$ i $\beta(e) = \frac{1}{5}$. Suposem que el sistema de creences és tal que s'assigna probabilitat ½ als dos nodes del conjunt d'informació del jugador 2. Assumint aquesta creença i assumint que el jugador 1 triarà després e amb probabilitat ⅕, el pagament esperat d'1 al seu conjunt d'informació quan tria c és $\frac{1}{2}(2\cdot \frac{1}{5} + 5\cdot\frac{4}{5}) + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{37}{10}$ i quan tria d és $\frac{1}{2}(3\cdot \frac{1}{5} + 2\cdot\frac{4}{5}) + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{17}{10}$. Conclusió: $\beta(c) = \frac{1}{4}$ no és seqüencialment racional al conjunt d'informació del jugador 2 perquè, donades les creences i el comportament d'1 al seu segon conjunt d'informació, la millor resposta de 2 és triar c (amb probabilitat 1).

Q27. Al joc de la Fig. 11, especifica un sistema de creences i una jugada formada per estratègies de comportament que facin que jugar a amb probabilitat ½ a l'arrel sigui seqüencialment racional. Especifica creences i estratègies que facin que jugar a amb probabilitat ½ a l'arrel no sigui seqüencialment racional.

Q28. Al joc de la Fig. 8, és seqüencialment racional triar c al node x? I triar b al node r?

Equilibri de Nash amb estratègies de comportament d'un joc seqüencial

Una jugada β formada per estratègies de comportament és un equilibri de Nash d'un joc seqüencial si, per a tot jugador i, no existeix cap estratègia de comportament que, donades les estratègies de comportament β_{-i} dels rivals, proporciona a i un pagament esperat superior.

Seqüencialitat racional i equilibri de Nash

Sigui β *un equilibri de Nash amb estratègies de comportament d'un joc seqüencial amb memòria perfecta. Sigui h un conjunt d'informació que s'assoleix amb probabilitat positiva quan es juga* β. *Sigui* π *un sistema de creences consistent amb* β. *Aleshores* β *és seqüencialment racional al conjunt d'informació h.*

El resultat anterior diu que les estratègies d'equilibri especificades a conjunts d'informació que s'assoleixen amb probabilitat positiva quan es juga l'equilibri són seqüencialment racionals. Per tant, els conjunts d'informació assolits quan es juga un equilibri de Nash no són problemàtics: a mesura que una jugada d'equilibri va arribant als diferents conjunts d'informació, els jugadors no tenen incentius a modificar les decisions previstes per l'equilibri.

[El resultat també es podria formular si els equilibris de Nash es defineixen a la representació com a joc simultani del joc seqüencial i s'expressen com a jugades formades per estratègies mixtes. En aquest cas, si σ és un equilibri de Nash amb estratègies mixtes a la representació com a joc simultani d'un joc seqüencial amb memòria perfecta, si β és la representació de σ en termes d'estratègies de comportament i si π és un sistema de creences consistent amb β, aleshores β és seqüencialment racional a tots els conjunts d'informació que β assoleix.]

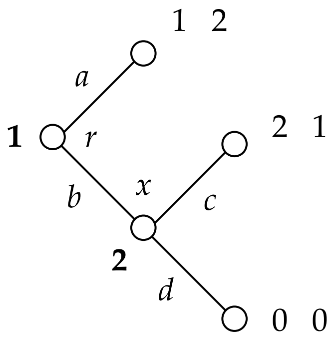

Fig. 12

El problema seriós té lloc als conjunts d'informació per on "no passa" l'equilibri. Per a il·lustrar la magnitud del problema, sigui el joc de la Fig. 12. La jugada [*a*, *d*] és un equilibri de Nash del joc. El resultat anterior diu que això garanteix que triar *a* és seqüencialment racional al conjunt d'informació {*r*}, que és l'únic que s'assoleix amb probabilitat positiva quan es juga [*a*, *d*]. La qüestió és que es passa per alt què succeeix a l'altre conjunt d'informació, {*x*}, on l'estratègia *d* resulta no ser seqüencialment racional.

Q29. Prova que, al joc de la Fig. 12, *d* no és seqüencialment racional al conjunt d'informació {*x*}.

La no seqüencialitat racional de *d* a {*x*} significa que, si s'assolís el node *x*, el jugador 2 no triaria *d*. Però com a l'equilibri de Nash [*a*, *d*] el node *x* no s'assoleix, el jugador 2 no es veu amb la necessitat de triar una acció (l'acció *d*) que no li maximitza el pagament. De fet, l'equilibri de Nash [*a*, *d*] pot interpretar-se com sostingut per una amenaça no creïble: l'amenaça del jugador 2 de triar *d* si tingués l'oportunitat de jugar. Com resulta que, a [*a*, *d*], no té l'oportunitat de jugar, 2 no ha de demostrar que està disposat a complir la seva amenaça. Però la hipòtesi que 2 és racional porta a la conclusió que no la complirà: *d* no és seqüencialment racional, de forma que, arribats al node *x* i fracassat el seu pla de forçar al jugador 1 a triar *a*, 2 no triarà *d* sinó *c*. Sabent 1 que 2 actuarà d'aquesta manera, 1 no triarà *a*, sinó *b*. Resultat: l'equilibri de Nash [*a*, *d*] de la Fig. 12 no és estratègicament estable. En concret, el jugador 1 no té incentiu a jugar *a* perquè sap que, si juga *b* en comptes d'*a*, el jugador 2 es veurà obligat (per la seva racionalitat) a triar *c* en comptes de *d*.

Q29. Comprova que, al joc de la Fig. 12, l'equilibri de Nash [*b*, *c*] és seqüencialment racional als dos conjunts d'informació.

L'exemple anterior relatiu al joc de la Fig. 12 evidencia un fet important: com de raonable i justificat sigui el comportament a un determinat conjunt d'informació depèn del que es pugui fer a conjunts d'informació que no s'assoleixen. Específicament, al joc de la Fig. 12, per a saber si triar *a* és el millor per al jugador 1 cal avaluar què passaria si no es jugués *a*. Aquesta anàlisi contrafàctica dificulta enormement l'estudi dels jocs seqüencials perquè cal tenir en consideració què passaria si passés el que no passa. La idea d'imposar restriccions sobre les creences als conjunts d'informació per on no s'hi passa condueix a la solució de referència dels jocs seqüencials: l'equilibri seqüencial de Kreps i Wilson (1982)

Consistència completa d'un sistema de creences

Un sistema de creences π d'un joc seqüencial és completament consistent amb una jugada β formada per estratègies de comportament (naturalesa inclosa) si, i només si, existeix una seqüència $\{\beta^k\}_{k=1,\ldots,\infty}$ de jugades formades per estratègies de comportament tal que:

(i) per a tot k, β^k assigna probabilitat positiva a tota acció de tot conjunt d'informació;

(ii) $lim_{k\to\infty}\, \beta^k = \beta$; i

(iii) per a tot conjunt d'informació h i tot node $x \in h$, $\pi(x) = lim_{k\to\infty} \dfrac{p(x\,|\,\beta^k)}{\sum_{y\in h} p(x\,|\,\beta^k)}$,

on $p(x|\beta^k)$ és la probabilitat d'arribar al node x partint de l'arrel del joc quan les probabilitats de les branques que uneixen x amb r les determina la jugada β^k.

La consistència completa tracta el problema de quines creences especificar a conjunts d'informació que no s'assoleixen quan es juga una determinada jugada β pertorbant la pròpia jugada β de manera que totes les accions es puguin jugar (condició (i)). Si tot es pot triar, tots els conjunts d'informació tenen probabilitat positiva i es pot fer servir la regla de Bayes per a calcular creences consistents (condició (iii)). Finalment, la condició (ii) reverteix la pertorbació i, per (iii), adoptem les creences que s'obtenen quan la pertorbació s'esvaeix (això és, quan retornem a la jugada original). El principi és el mateix que el de l'equilibri perfecte: de fet, l'equilibri seqüencial és bàsicament la versió per a jocs seqüencials de l'equilibri perfecte dels jocs simultanis.

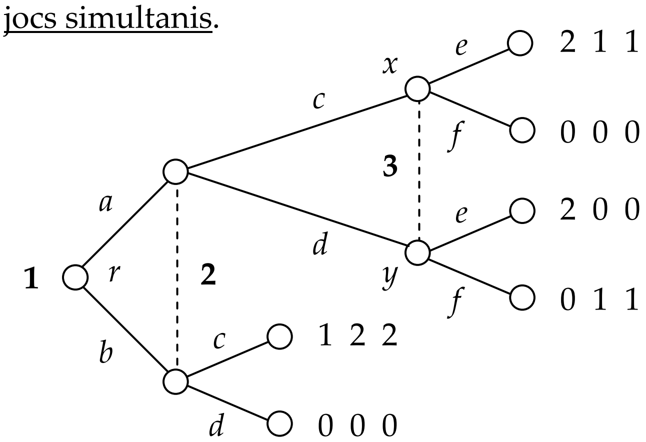

Fig. 13

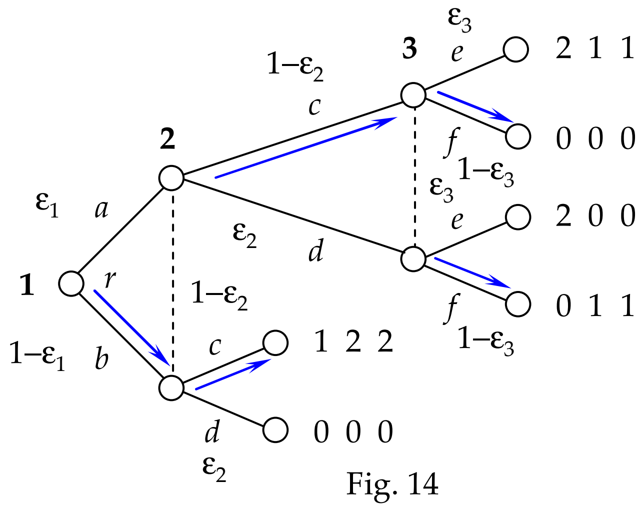

Fig. 14

Per exemple, sigui el joc de la Fig. 13. Considerem l'equilibri de Nash [b, c, f], representat a la Fig. 13 mitjançant fletxes. Atès que el conjunt d'informació h del jugador 3 no s'assoleix quan es juga [b, c, f], qualsevol creença sobre els nodes d'h és consistent amb [b, c, f]. Per a determinar quines creences són completament consistents amb [b, c, f], pertorbem la jugada [b, c, f]. La Fig. 14 mostra la pertorbació on a es juga amb probabilitat $\varepsilon_1 > 0$, d es juga amb probabilitat $\varepsilon_2 > 0$ i e es juga amb probabilitat $\varepsilon_3 > 0$, on les probabilitats ε_i s'assumeix que tendeixen monòtonament cap a zero. Per tant, en el límit, la seqüència de jugades $[b, c, f] = [1 - \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_3]$ convergeix cap a [b, c, f]. Això compliria amb els requisits (i) i (ii) de consistència completa. El requisit (iii) requereix calcular les creences consistents amb $[b, c, f] = [1 - \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_3]$ i prendre el límit quan les ε_i se'n van cap a zero. En relació amb el conjunt d'informació $\{x, y\}$ del jugador 3, la probabilitat de ser al node superior x quan es juga $\beta^\varepsilon = [b, c, f] = [1 - \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2, 1 - \varepsilon_3]$ s'obté aplicant la regla de Bayes. D'una banda, la probabilitat $p(x|\beta^\varepsilon)$ d'assolir x partint d'r quan es juga β^ε és la probabilitat ε_1 d'a per la la probabilitat $1 - \varepsilon_2$ de c. D'altra banda, la probabilitat $p(y|\beta^\varepsilon)$ d'assolir y partint d'r quan es juga β^ε és la probabilitat ε_1 d'a per la la probabilitat ε_2 de d. Per la regla de Bayes, la creença associada al node x serà $\pi^\varepsilon(x) = p(x|\beta^\varepsilon) / [p(x|\beta^\varepsilon) + p(y|\beta^\varepsilon)] = \varepsilon_1\cdot(1 - \varepsilon_2)/ [\varepsilon_1\cdot(1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2]$. Per la hipòtesi que $\varepsilon_1 > 0$, podem cancel·lar ε_1 i s'obté $\pi^\varepsilon(x) = 1 - \varepsilon_2$. Prenent el límit quan ε_2 tendeix cap a zero resulta que $\pi(x) = 1$. En resum, l'única creença completament consistent amb [b, c, f] implica assignar probabilitat 1 al node x. Donada aquesta creença, triar f no és seqüencialment racional a {x, y}. Per la definició presentada a continuació, [b, c, f] no constitueix un equilibri racional: no hi ha manera de construir creences completament consistents amb [b, c, f] que facin seqüencialment racional l'elecció d'f al conjunt d'informació del jugador 3.

Definició d'equilibri seqüencial

Un equilibri seqüencial d'un joc seqüencial amb memòria perfecta és un <u>parell</u> (π, β), on π és un sistema de creences i β és una jugada formada per estratègies de comportament, tal que:

(i) π és <u>completament consistent</u> amb β; i

(ii) per a tot conjunt d'informació h del joc, β és <u>seqüencialment racional</u> a h donat π.

Un equilibri seqüencial requereix especificar no només decisions (les estratègies de comportament) sinó les creences que justifiquen la racionalitat (seqüencial) de les decisions, on les creences han de ser completament consistents amb les decisions.

Propietats fonamentals dels equilibris seqüencials

• *Tot joc seqüencial amb memòria perfecta té almenys un equilibri seqüencial.*

• *Si (π, β) és un equilibri seqüencial d'un joc seqüencial amb memòria perfecta aleshores: (i) β és un equilibri de Nash del joc seqüencial; i (ii) la jugada σ formada per les estratègies mixtes que representen les estratègies de comportament de la jugada β és un equilibri de Nash de la representació com a joc simultani del joc seqüencial.*

La segona propietat diu que les estratègies que formen part d'un equilibri seqüencial defineixen un equilibri de Nash tant al joc seqüencial com al joc simultani corresponent. Aquesta propietat suggereix dues maneres de calcular els equilibris seqüencials d'un joc: (i) es calculen directament al joc seqüencial; o (ii) es determinen primerament els equilibris de Nash a la representació com a joc simultani, es representen els equilibris obtinguts (que són estratègies mixtes) en forma de jugades β definides en termes d'estratègies de comportament, es busca el sistema de creences π completament consistents amb β i, finalment, es verifica la seqüencialitat racionalitat de β donat π.

Exemple de càlcul dels equilibris seqüencials

Retornem al joc de la Fig. 1. Els equilibris seqüencials sovint es calculen més fàcilment (quan els volem calcular directament sobre el joc seqüencial) aplicant la tècnica de la <u>inducció cap enrere</u>: comencem pels conjunts d'informació on s'acaba el joc, resolem el problema de decisió allà, fixem les solucions i passem a considerar els conjunts d'informació que vénen immediatament abans dels conjunts d'informació resolts fins que s'arriba a l'arrel.

Comencem pel conjunt d'informació {x', y'}. Sigui α la probabilitat que 2 assigna al node x', de forma que la probabilitat assignada a y' és $1 - \alpha$. Aleshores triar c' proporciona un pagament esperat de $8\alpha + 1(1 - \alpha) = 1 + 7\alpha$ i triar n' proporciona un pagament esperat de $0\alpha + 0(1 - \alpha) = 0$. D'aquí resulta que, per a tot valor d'α, $1 + 7\alpha > 0$. La conclusió és que l'única resposta seqüencialment racional a {x', y'} és c'. Per tant, a tot equilibri seqüencial, c' ha de tenir assignada probabilitat 1: <u>el comprador sempre compra quan el preu és baix</u>.

Ara convé passar al conjunt d'informació $\{v\}$, perquè, atès que 2 triarà c' a $\{x', y'\}$, el pagament esperat per a 1 de triar p_{ba} a $\{v\}$ és –3 i el pagament esperat de triar p_{aa} és positiu (tot i que encara no sabem amb quina probabilitat el jugador 2 triarà c al conjunt d'informació $\{x, y\}$). Com a resultat, a tot equilibri seqüencial, p_{aa} ha de tenir assignada probabilitat 1: quan el cotxe és de qualitat alta, el venedor sempre fixa el preu alt.

L'anàlisi no és tan immediata als altres dos conjunts d'informació: $\{x, y\}$ i $\{v'\}$. Considerem $\{x, y\}$ i sigui ara α la probabilitat assignada al node x. Llavors el pagament esperat de triar c és $2\alpha + -5(1-\alpha) = 7\alpha - 5$ i el de triar n és $0\alpha + 0(1-\alpha) = 0$. Això condueix a tres possibilitats: que c sigui l'única millor resposta (fet que succeeix quan $7\alpha - 5 > 0$, és a dir, quan $\alpha > 5/7$); que n sigui l'única millor resposta (que té lloc quan $\alpha < 5/7$); i que tant c com n sigui millor resposta (cas que permetria randomitzar al jugador 2 i que requereix $\alpha = 5/7$). Cal analitzar cadascuna de les tres possibilitats per a comprovar si es pot construir algun equilibri seqüencial.

Cas 1: $\alpha > 5/7$. Atès que un equilibri seqüencial demana eleccions seqüencialment racionals, si $\alpha > 5/7$ el jugador 2 tria c. Donat c, preguntem-nos ara què és el millor per al jugador 1 al seu conjunt d'informació $\{v'\}$. Si 1 tria p_{ab} a $\{v'\}$ el pagament esperat és 8 i si tria p_{bb} a $\{v'\}$ el pagament esperat és 2 (per ja s'ha determinat que 2 tria c' a $\{x', y'\}$). Per la seqüencialitat racional, 1 tria p_{ab} a $\{v'\}$. El següent pas és comprovar si la creença assumida $\alpha > 5/7$ és completament consistent amb les estratègies assignades al jugador 1 (i amb les probabilitats assignades a la naturalesa). Atès que estem considerant l'estratègia (p_{aa}, p_{ab}) del jugador 1, el conjunt d'informació $\{x, y\}$ s'assoleix amb probabilitat positiva, de forma que no cal considerar pertorbacions de l'estratègia del jugador 1. Per la regla de Bayes, la probabilitat d'x ha de ser $p_a / (1 - p_a)$. Així que $p_a / (1 - p_a) > 5/7$ o, de manera equivalent, $p_a > 5/12$. Què significa aquest resultat? Que si la probabilitat que el cotxe sigui de qualitat alta és superior a $5/12 \approx 41'66\%$, tenim un equilibri seqüencial on el comprador sempre compra i el venedor sempre carrega un preu alt. Val la pena fer notar que, en aquest equilibri, el compra una carraca pel preu d'un cotxe de qualitat amb probabilitat $7/12 \approx 58'33\%$. Si el comprador accepta aquesta possibilitat és perquè li compensa comprar el cotxe d'alta qualitat al preu alt l'altre 41'66% de les vegades. Per contra, si $p_a < 5/12$ aleshores no existeix cap equilibri seqüencial on $c = 1$. La possibilitat $p_a = 5/12$ (això és, $\alpha = 5/7$) s'analitza al cas 3.

Cas 2: $\alpha < 5/7$. Ara 2 tria n. Donat n, el millor per a 1 al node $\{v'\}$ és escollir p_{bb} (cal recordar que 2 tria c' a $\{x', y'\}$). Per tant, l'estratègia d'1 és (p_{aa}, p_{bb}): preu alt si el cotxe és d'alta qualitat i preu baix si el cotxe es de baixa qualitat. L'única creença consistent amb aquesta estratègia implica creure al conjunt d'informació $\{x, y\}$ que s'ha assolit x, perquè quan es juga (p_{aa}, p_{bb}) i la naturalesa a l'arrel el node y no s'assoleix mai. En suma, 2 ha d'assignar probabilitat 1 al node x, contradient la hipòtesi que $\alpha < 5/7$. Dit d'una altra manera, la creença $\alpha < 5/7$ no és consistent amb (p_{aa}, p_{bb}).

Cas 3: $\alpha = 5/7$. En aquest cas, 2 és indiferent entre c i n. Sigui c la probabilitat amb què 2 juga c (c és un valor entre 0 i 1, aquests dos valors permesos). Per la consistència de les creences, $\alpha = 5/7$ demana que $5/7 = p_a \cdot p_{aa} / (p_a \cdot p_{aa} + (1 - p_a) \cdot p_{ab})$. Ja sabem que $p_{aa} = 1$. Ara cal determinar quin valor de p_{ab} justifica la consistència de la creença $\alpha = 5/7$. Aïllant p_{ab} a $5/7 = p_a / (p_a + (1 - p_a) \cdot p_{ab})$ s'obté $p_{ab} = 2p_a / 5(1 - p_a)$. Donat que $0 < p_a < 1$, $0 < p_{ab} < 1$. Conclusió: 1 ha de randomitzar a v' per a què $\alpha = 5/7$ sigui una creença consistent. Situat al node v', el pagament esperat d'1 triant p_{ab}

és 8c i triant p_{bb} és 2. Així, per a induir al jugador 1 a randomitzar, cal que 8c = 2. En suma, c = ¼. Ja tenim un altre equilibri seqüencial: aquell on (p_{aa}, p_{ab}) = (1, 2p_a / 5(1 − p_a)) i (c, c') = (¼, 1). Per a interpretar aquest equilibri, suposem que p_a = ½: hi ha la mateixa probabilitat que la qualitat del cotxe sigui alta que baixa. En tal cas, p_{ab} = ⅖ i l'equilibri significa el següent: (i) el venedor fixa el preu alt si el cotxe és d'alta qualitat; (ii) si el cotxe és de baixa qualitat, el venedor estableix un preu alt amb una probabilitat del 40%; (iii) el comprador sempre compra si el preu és baix; i (iv) el comprador compra si el preu és alt només amb una probabilitat del 25%.

Q30. L'especificació d'un equilibri seqüencial requereix indicar un sistema de creences consistent amb les estratègies. Indica sistemes de creences per cadascun dels candidats a equilibri seqüencial trobats.

Q31. Té el joc de la Fig. 14 memòria perfecta? Si és així, calcula els seus equilibris seqüencials Calcula els equilibris seqüencials dels jocs de les Figs. 6, 7, 8, 11, 12, 13 i 15. Representa el jocs de la Figs. 13, 14 i 15 com a jocs simultanis.

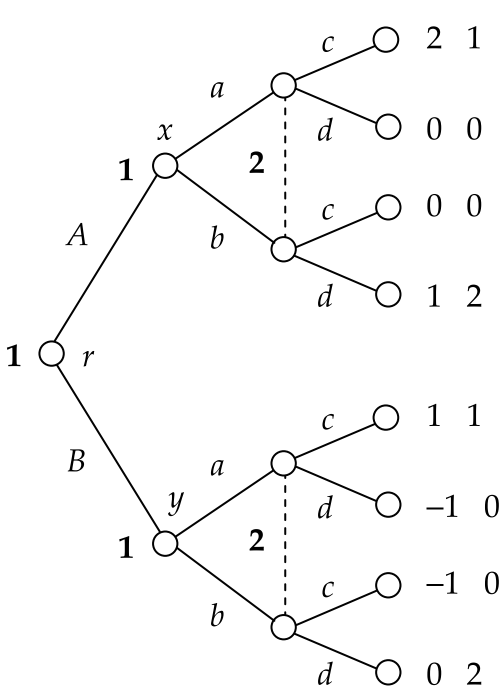

Fig. 13

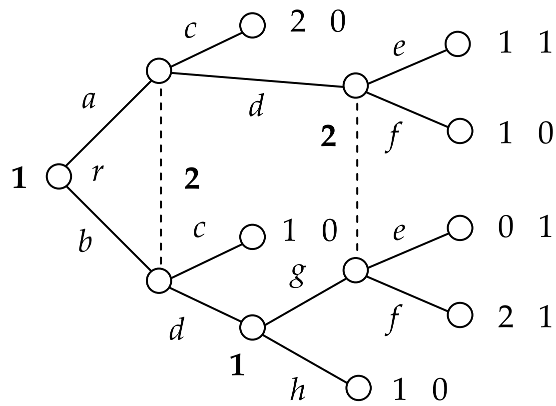

Fig. 14

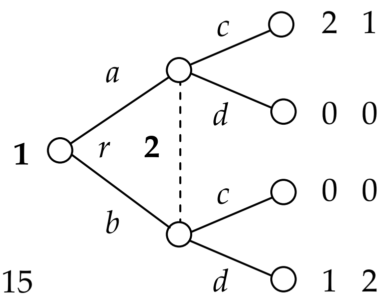

Fig. 15

Q33. Myerson (1991, p. 212). Calcula els equilibris seqüencials del joc de la Fig. 16.

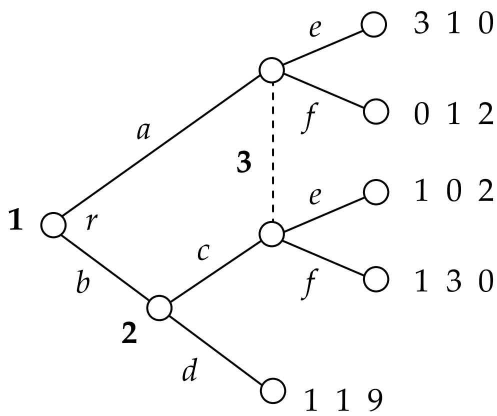

Fig. 16

Q32. Determina si l'únic equilibri de Nash amb estratègies pures [(p_{aa}, p_{ab}), (n, n')] del joc de la Fig. 1 és un equilibri seqüencial. Si és així, identifica el sistema de creences.

Q33. Fudenberg i Tirole (1991, p. 98). Calcula els equilibris seqëuncials del joc de la Fig. 17.

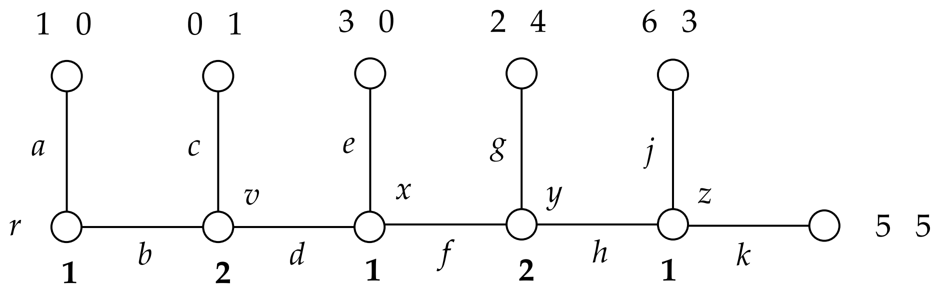

Fig. 17

Subjocs

Un <u>subjoc</u> G' d'un joc seqüencial G és un joc seqüencial obtingut de G prenent com a arrel de G' un node x de G tal que $\{x\}$ és un conjunt d'informació de G i eliminant tot el que no va després d'x, de manera que els conjunts d'informació que venen després d'x queden intactes. Amb aquesta definició, un joc seqüencial és un subjoc de sí mateix. Els subjocs d'un joc diferents del joc mateix s'anomenen subjocs <u>propis</u>.

Per exemple, el joc de la Fig. 17, té tants subjocs com nodes de decisió: hi ha un subjoc que té r com a arrel (el joc mateix); un segon subjoc té v com a arrel; un tercer, té x com a arrel; un quart, té y; i el darrer subjoc té z com a arrel. Per tant, 5 subjocs i 4 subjocs propis. En canvi, el joc de la Fig. 16 no té cap subjoc propi: l'única possibilitat d'arrel d'un subjoc és el node del jugador 2, però com el node superior del conjunt d'informació del jugador 3 no està precedit per node del jugador 2, el possible subjoc que comenci al node del jugador 2 trencaria el conjunt d'informació de 3, fent impossible deixar intactes els conjunts d'informació que hi ha després de l'arrel del subjoc.

Q34. Identifica els subjocs propis dels jocs de les Figs. 1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 i 15.

Equilibri perfecte en subjocs

Un equilibri de Nash β amb estratègies de comportament d'un joc seqüencial G és un <u>equilibri perfecte en subjocs</u> si la restricció de β a cada subjoc de G és un equilibri de Nash del subjoc (la noció de perfecció en subjocs es deu a Reinhard Selten). Per exemple, al joc de la Fig. 12, l'equilibri [b, d] no és perfecte en subjocs, ja que d no és un equilibri al subjoc que té x com a arrel.

Relació entre els equilibris de Nash, els equilibris seqüencials i els perfectes en subjocs

• *Tot equilibri perfecte en subjocs és un equilibri de Nash però no tot equilibri de Nash és perfecte en subjocs* (per exemple, [b, d] a la Fig. 12 és equilibri de Nash però no perfecte en subjocs).

• *Per a tot equilibri seqüencial (π, β) d'un joc seqüencial amb memòria perfecta, β és un equilibri perfecte en subjocs però si β és un equilibri perfecte en subjocs no necessàriament existeix un sistema de creences π que faci que (π, β) sigui un equilibri seqüencial del joc* (per exemple, [b, d, f] al joc de la Fig. 13 és equilibri perfecte en subjocs, ja que el joc no té subjocs propis, però no és equilibri seqüencial).

Jocs amb informació perfecta
Un joc seqüencial té informació perfecta si cada conjunt d'informació està format només per un node. Un joc seqüencial té informació imperfecta si existeix algun conjunt d'informació que tingui més d'un node. Per exemple, el joc de la Fig. 8 és un joc amb informació perfecta i el de la Fig. 1 és un amb informació imperfecta

Q35. Demostra que un joc seqüencial amb informació perfecta és un joc amb memòria perfecta.

Q36. Identifica totes els jocs de les figures prèvies que tinguin informació perfecta.

Equilibri seqüencial a jocs amb informació perfecta
A un joc amb informació perfecta, només es pot definir un sistema de creences: aquell sistema que assigna probabilitat 1 a tots els nodes de decisió. Per tant, quan la informació és perfecta, el joc mateix defineix les creences i la noció de sistema de creences no aporta res. A més, per a jocs amb informació perfecta, les nocions d'equilibri seqüencial i d'equilibri perfecte en subjocs coincideixen: un equilibri de Nash β amb estratègies de comportament és un equilibri perfecte si, i només si, (π, β) és un equilibri seqüencial, on π és l'únic sistema de creences que es pot definir a un joc amb informació perfecta.

Inducció cap enrere (*backward induction*)
La tècnica de la inducció cap enrere permet calcular fàcilment els equilibris perfectes en subjocs (i, per tant, els equilibris seqüencials) d'un joc amb informació perfecta. Apliquem la inducció cap enrere al joc de la Fig. 8. Primer s'identifiquen els nodes on la decisió no depèn del que facin els demés. Això passa a l'últim node de decisió y i, en general, això passarà a tots els nodes on cadascuna de les accions que es puguin prendre al node posen fi al joc. Si el jugador 1 és al node y, la seva millor opció és triar e, perquè e proporciona un pagament més alt (2) que f (0). Ara fixem aquesta millor opció a e i busquem el node que precedeix immediatament el node y. Aquest node és l'x. Si el jugador 2 és al node x, obté 1 triant c i obté 2 triant d (perquè, com s'ha vist, si s'arriba al node y, el jugador 1 triarà e). Així doncs, el jugador 2 triarà d. Finalment, passem al node que està justament abans del node x: l'arrel r. Aquí repetim la mateixa estratègia d'anàlisi: si 1 tria a al node r obté 3 i si tria b (sabent que a x el jugador 2 triarà d i, al node y, ell mateix triarà e) sap que obtindrà 2. Per tant, la millor opció és a. I ja la tenim: la jugada $[a, d, e]$ és l'únic equilibri perfecte en subjocs i, per consegüent, l'únic equilibri seqüencial del joc de la Fig. 8.

Propietats fonamentals dels equilibris seqüencials a jocs amb informació perfecta
• *Tot joc seqüencial amb informació perfecta té almenys un equilibri seqüencial on tots els jugadors juguen estratègies pures.*
• *A tot joc seqüencial amb informació perfecta on cap jugador no rep el mateix pagament a dos nodes terminals diferents l'equilibri seqüencial és únic (i, per la propietat anterior, és un equilibri seqüencial amb estratègies pures).*

Q37. Calcula tots els equilibris seqüencials de tots els jocs apareguts fins ara que tinguin informació perfecta.

Q38. Calcula tots els equilibris seqüencials dels jocs de les Figs. 18, 19, 20, 21 i 22.

Dubtes sobre l'estabilitat estratègica de l'equilibri seqüencial a jocs amb informació perfecta
Podria semblar que les propietats anteriors fan que els jocs amb informació perfecta puguin ser considerats jocs ja resolts. No és així. Els equilibris perfectes en subjocs no estan lliures de crítica ni tan sols als jocs amb informació perfecta. La raó és que la perfecció en subjocs (o, el que és el mateix, la inducció cap enrere) pressuposa certes hipòtesis de racionalitat dels jugadors que poden tornar-se falses quan el joc es juga. Per exemple, al joc de la Fig. 8, s'ha conclòs que 1 tria *e* a *y* per la hipòtesi que 1 és racional. De la mateixa manera, la conclusió que 2 tria *d* a *x* s'ha fet basant-se en la premissa que 1 tria *e* a *y*. Per a sostenir aquesta premissa, sembla que caldria que 2 sapigués que 1 és racional: si 2 sap que 1 és racional, llavors 2 sap que 1 triarà *e* al node *y* i, per tant, 2 trobarà justificat triar *d* al node *x*, tal i com dicta la inducció cap enrere. Però el cas és que l'única manera que 2 tingui l'oportunitat de jugar és que 1 triï *b* al node *r*, la qual cosa constitueix una elecció irracional: triant *a* al node *r* el jugador 1 obté 3 i triant *b* sempre obté menys. Conclusió: si s'arriba al node *x*, és qüestionable mantenir la hipòtesi que 1 és racional i, en tal cas, pot estar justificat triar *c* perquè 2 pot témer que, no essent 1 racional, 1 pugui triar *f* al node *y*. Aquest raonament destrueix la lògica de la inducció cap enrere i, de passada, la lògica de la seqüencialitat racional i de la perfecció en subjocs.

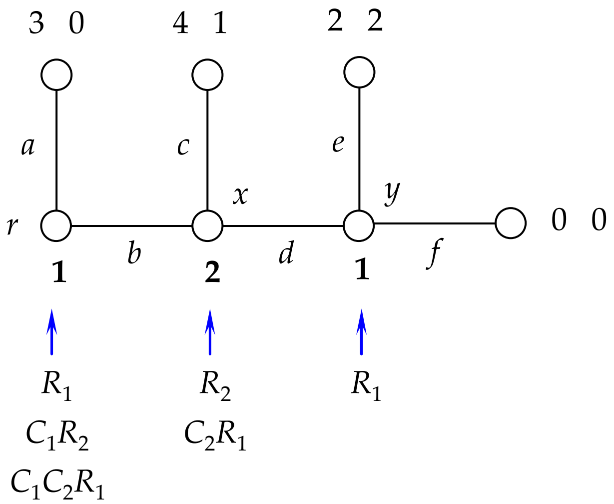

Fig. 18

Es podria pensar que aquest exemple és innocu perquè, malgrat el que faci el jugador 2 al node *x*, l'1 continua triant *a* a la Fig. 8. Però un raonament similar es pot aplicar al joc de la Fig. 18 per a justificar l'aparentment inestabilitat de l'únic equilibri seqüencial (i, per tant, perfecte en subjocs), que és [*a*, *d*, *e*]. La justificació d'aquest equilibri és la següent. Al subjoc amb arrel *y*, l'únic equilibri és *e* (l'acció que maximitza el pagament d'1 quan s'assoleix el node *y*). Per a justificar que 1 tria *e* a *y* cal assumir que 1 és racional al node *e* (en símbols, R_1).

Solucionat el subjoc amb arrel *y*, considerem el subjoc que té com a arrel el node que està immediatament abans que *y*: el node *x*. Atès que 1 tria *e* a *y*, la millor resposta de 2 al node *x* és *d*. Per a arribar a aquesta conclusió, cal assumir: (i) que 2 creu que 1 és racional (abreujat C_2R_1); i (ii) que 2 mateix és racional (en símbols, R_2). Atès que si 1 és racional aleshores tria *e* al node *y*, si 2 creu que 1 és racional aleshores 2 creurà que 1 tria *e* al node *y*; i si 2 és racional, aleshores triarà *d* al node *x*. Resolt el subjoc que comença a *x*, passem al subjoc que té com a arrel el node que precedeix immediatament el node *x*: el subjoc amb arrel *r* (que és el joc sence mateix). Per a què 1 pugui replicar al node *r* el raonament fet pel jugador 2 cal que 1 cregui allò que 2 creu, això és, cal que 1 cregui que 2 és racional (C_1R_2) i cal que 1 cregui que 2 creu que 1 és racional ($C_1C_2R_1$). Per $C_1C_2R_1$, 1 creu que 2 creu que 1 triarà *e* al node *y*. Donat això, per C_1R_2, 1 creu que 2 triarà *d* al node *x*. Assumint que 1 és racional, la conclusió és que 1 tria *a* al node *r*.

Com a resultat, la justificació de l'únic equilibri seqüencial del joc de la Fig. 18 porta a què el node x del jugador 2 no s'assoleixi. Però el cas és que tota l'anàlisi feta per al jugador 2 (que portava a la conclusió que triaria d si s'assolís el node x) pressuposava que s'arribava al node x. Atès que el compliment de les condicions R_1, C_1R_2 i $C_1C_2R_1$ fan que no s'arribi al node x (perquè 1 tria a al node r), l'assoliment del node x implica que alguna de les tres condicions s'ha d'incomplir. La conseqüència d'això és que, situat al node x, el jugador 2 ha de seleccionar alguna explicació de què ha succeït. Una possible explicació és que 1 no és racional. En aquestes condicions, 2 ja no té garantida la conclusió que 1 triarà e al node y: si 1 no és racional, és ben possible que triï f. En tal cas, c és la millor resposta per a 2 al node x.

Però la història no acaba aquí. Si 1 anticipa que 2 interpretarà que jugar b és un senyal que indica que 1 no és racional i que, per tant, 2 triarà c, aleshores al jugador 1 li convé racionalment triar b, perquè (si expecta que 2 triï c) obtindrà un pagament de 4 si escull b i només un pagament de 3 si selecciona a.

La història tampoc no finalitza en aquest punt, perquè si 2 se n'adona d'aquesta possibilitat, podrà considerar que b és una elecció racional per part del jugador 1 i, per consegüent, encara podrà avalar la presumpció que 1 triarà e al node y. Si és així, 2 conclourà que el millor és d. Però això fa que l'elecció de b per part d'1 sigui irracional… En resum: no està gens clar que l'única cosa que justificadament pugui fer el jugador 2 al node x sigui triar d i, de retruc, no està gens clar que l'única cosa que justificadament pugui fer el jugador 1 al node r sigui triar a.

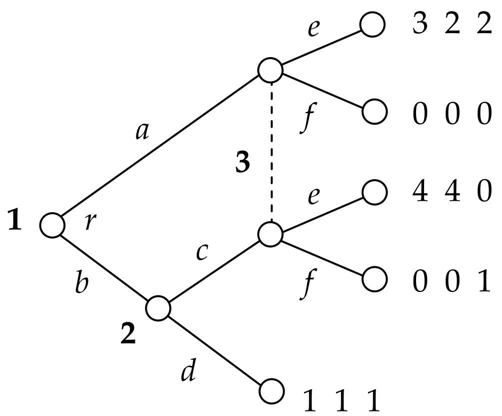

Fig. 19. Un joc de Selten

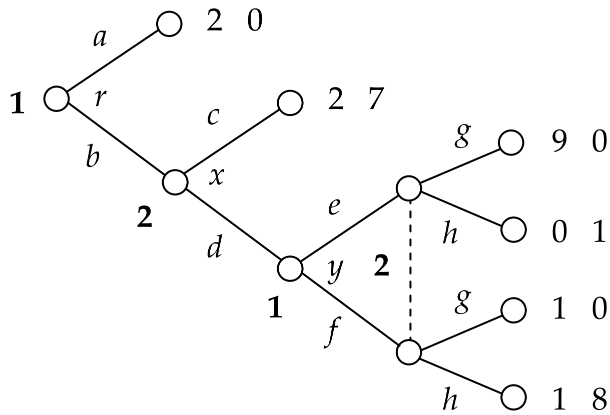

Fig. 20. Myerson (1991, p. 192)

Un altre inconvenient de l'equilibri seqüencial

Les possibles febleses del concepte d'equilibri seqüencial com a solució d'un joc seqüencial no es limiten als jocs amb informació perfecta. Els jocs de les Figs. 21 i 22 evidencien que l'equilibri seqüencial és sensible (a jocs amb informació imperfecta) a aspectes del joc que semblen irrellevants. Al joc de la Fig. 21 $[c, e]$ és un equilibri seqüencial amb la creença que assigna probabilitat ⅔ al node x. Aquesta creença és completament consistent amb $[c, e]$, ja que la pertorbació on $[a, b, c] = [2\varepsilon_1, \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_1]$ convergeix a $[a, b, c] = [0, 0, 1]$ quan ε_1 s'apropa a zero i la creença consistent amb $[a, b, c] = [2\varepsilon_1, \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_1]$ assigna probabilitat $2\varepsilon_1 / (2\varepsilon_1 + \varepsilon_1) = ⅔$ al node x. A més, donada la creença $\pi(x) = ⅔$, e és seqüencialment racional: si 2 creu que és més probable ser a x que a l'altre node del seu conjunt d'informació, triar e és millor que triar d. Per últim, donat e, c és la millor resposta del jugador 1 al node r.

Ara considerem el joc de la Fig. 22 que, essencialment, és el mateix joc que el de la Fig. 21. L'única diferència és que, a la Fig. 21, el jugador 1 tria, al mateix temps, entre acabar el joc (acció *c*) o triar entre *a* i *b*; per contra, a la Fig. 22, el jugador 1 primer decideix si acaba el joc (acció *c*) o si permet que continuï (acció *f*) i, a continuació, decideix entre *a* i *b*. Aquesta no sembla una distinció rellevant: quina importància pot tenir decidir inicialment entre tres opcions o primer entre una i la resta i, després, entre les dues restants? El cas és que aquesta distinció afecta els equilibris seqüencials, perquè que 1 triï *c* i 2 triï *e* no forma part d'un equilibri seqüencial al joc de la Fig. 22. El motiu és que, a la Fig. 21, 1 no havia d'especificar què faria si no triés *c*; en canvi, a la Fig. 22, 1 ha d'indicar (al node *v*) que fa si no tria *c*. Al node *v*, l'única reposta que és seqüencialment racional és *b*, ja que els pagaments de triar *b* són sempre superiors als de triar *a*. Això restringeix les possibles creences del jugador 2 al node *x*: si 1 tria *b* a *v*, l'única creença completament consistent requereix assignar probabilitat 0 al node *x*. Donada aquesta creença, l'única resposta seqüencialment racional de 2 al seu conjunt d'informació és *d*. Per tant, 1 ha de triar *f* al node *r* i [*f*, *b*, *d*] és l'única jugada que és part d'un equilibri seqüencial.

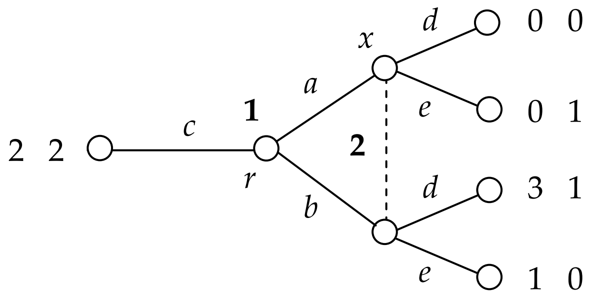

Fig. 21

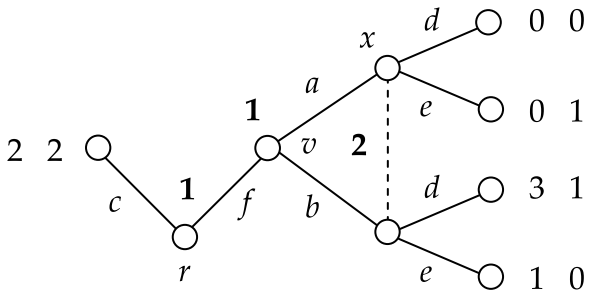

Fig. 22

Inducció cap endavant (*forward induction*)

La inducció cap enrere pressuposa la racionalitat de les decisions dels jugadors que juguen després. La inducció cap endavant pressuposa la racionalitat de les decisions dels jugadors que han jugat prèviament. Com a tècnica d'anàlisi, la inducció cap enrere analitza el problema de decisió en un determinat conjunt d'informació no tenint en compte el que ha passat prèviament. Aquesta presumpció condueix a les complicacions analitzades als jocs de les Figs. 8 i 18, perquè quan un jugador decideix què fer a un conjunt d'informació d'un joc seqüencial no pot passar per alt què s'ha fet prèviament. La inducció cap endavant es basa en la idea d'explotar la informació que proporcionen les decisions preses per jugadors que han jugat prèviament, buscant sempre una explicació de les decisions basades en la racionalitat dels jugadors. En aquest sentit, la inducció cap endavant pren les decisions de jugadors que han jugat abans com a senyals o indicis de les intencions d'aquests jugadors.

La inducció cap endavant permet resoldre el joc de la Fig. 21 amb el següent raonament. Suposem que el conjunt d'informació del jugador 2 s'assoleix. Això vol dir que el jugador 1 ha triat *a* o *b*. L'estructura del joc no permet al jugador 2 saber si 1 ha escollit *a* o *b*. Però, si 1 és racional, no pot ser que triï *a* quan disposa de l'opció *c*: triant *c*, el jugador 1 s'assegura un pagament de 2; triant *a*, només obté un pagament de 0. La conclusió és que un jugador racional no pot rebutjar *c* per a triar *a*. Per tant, si s'arriba al conjunt d'informació de 2, és el node inferior el que s'ha d'haver assolit. En tal cas, el millor per a 2 és triar *d*; i donat *b*, el millor per a 1 és triar *b*. Així, la inducció cap endavant destrueix l'equilibri seqüencial basat en triar *c* i *e*.

Conflicte entre inducció cap endavant i inducció cap enrere

L'exemple anterior mostra indicis de conflicte entre els dos tipus d'inducció, però el conflicte no sembla dràstic perquè, després de tot, hi ha un equilibri consistent tant amb la inducció cap enrere (això és, la seqüencialitat racional) i la inducció cap endavant: triar *b* i *d*. El joc de la Fig. 20 posa de manifest que la inducció cap endavant i cap enrere poden arribar a conclusions contradictòries.

Seguint un raonament basat en la inducció cap enrere al joc de la Fig. 20, s'arribaria a la conclusió que, al segon conjunt d'informació del jugador 2, s'hauria de triar *h*, ja que, amb independència de la creença formada sobre a quin dels dos nodes es troba 2, *h* sempre dóna un pagament superior al pagament que dóna *g*. Donada l'acció *h*, el millor per a 1 al node *y* és *f*. Donades les accions *f* i *h*, el millor per a 2 al node *x* és *d*. I donades *d*, *f* i *h*, el millor per a 1 a l'arrel *r* és *a*. En resum, la inducció cap enrere selecciona [*a*, *d*, *f*, *h*].

El raonament basat en la inducció cap endavant, constataria que, quan s'arriba al segon conjunt d'informació del jugador 2, el jugador 1 ha renunciat a un pagament segur de 2, que és el pagament que obtindria triant *a* a l'arrel *r*. Per tant, si 1 es troba al node *y*, l'única manera de racionalitzar que hagi renunciat al pagament de 2 és que pretén obtenir un pagament superior. Així doncs, no pot ser que 1 renunciï a obtenir 2 per a obtenir només 1 triant *f* al node *y* (triar *b* i després *f* és una estratègia fortament dominada per triar *a*). Com a resultat, si 1 és racional ha de triar *e* al node *y*. En aquest cas, el millor per a 2 al node anterior *x* és escollir *c*. Però triar *c* i *e* no és el que dicta la inducció cap enrere.

Les complicacions que causa la inducció cap endavant no s'acaben aquí. van Damme (1989) considera el següent exemple. Partim del joc de la Fig. 15 (batalla de sexes), on els pagaments són en euros. Dels tres equilibris de Nash del joc, els dos millors són amb estratègies pures, però un afavoreix al jugador 1 i l'altre afavoreix al jugador 2. D'aquí resulta el problema de la selecció d'un dels equilibris. Aleshores el jugador 1, abans de jugar el joc, decideix, en presència del jugador 2, si se'n desfà d'un euro (acció *B*) o no (acció *A*). La Fig. 13 mostra el joc resultant, on la inducció cap endavant justifica l'equilibri que afavoreix al jugador 1 (comprova-ho).

Bibliografia

- Kreps, David i Wilson, Robert (1982): "Sequential equilibria", *Econometrica* 50, 863–894. http://www.wiley.com/bw/journal.asp?ref=0012-9682
- Kuhn, Harold W. (1953): "Extensive games and the problem of information", a Kuhn, Harold W. i Tucker, Albert W.: *Contributions to the Theory of Games I*. Princeton University Press: Princeton, pp. 193–216. [658.012 Gam]
- Fudenberg, Drew i Tirole, Jean (1991): *Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, capítol 3.
- Myerson, Roger B. (1991): *Game Theory. Analysis of Conflict*. Harvard University Press: Cambridge, Massachusetts, capítol 4.
- van Damme, Eric (1989): "Stable equilibria and forward induction", *Journal of Economic Theory* 48, 476–496. http://www.elsevier.com/wps/find/journaldescription.cws_home/622869/description#description