Equilibri perfecte

Motivació

En general, un joc simultani té més d'un equilibri de Nash. Això condueix al problema de la selecció d'equilibris: entre tots els equilibris de Nash d'un joc, quin és el més raonable? Durant la dècada dels 1970 i els 1980 es va desenvolupar una línia de recerca que pretenia "refinar" el concepte d'equilibri de Nash afegint-hi més condicions a la definició d'equilibri per a reduir el nombre de jugades que es podien considerar equilibris raonables. Un dels més destacats refinaments de l'equilibri de Nash és l'equilibri perfecte, una solució deguda a l'economista alemany Reinhard Selten (1975), Premi Nobel d'Economia al 1994.
http://en.wikipedia.org/wiki/Reinhard_Selten

L'equilibri de Nash és una jugada σ tal que cada estratègia σ_i de la jugada és una millor resposta a la resta d'estratègies σ_{-i} que formen la jugada. L'equilibri perfecte requereix una mica més: cada estratègia σ_i, a banda de ser una millor resposta a la resta d'estratègies σ_{-i} de la jugada, ha de ser una millor resposta a estratègies τ_{-i} "molt similars" a les estratègies σ_{-i} dels rivals.

El concepte d'equilibri perfecte expressa una idea de "seguretat": si el pla és jugar la jugada σ, seria desitjable que, per a tot jugador i, l'estratègia σ_i no només fos una millor resposta a les estratègies σ_{-i} dels rivals, sinó que també fos una millor resposta a estratègies τ_{-i} que resultarien si els rivals cometessin, amb una petita probabilitat, alguna errada a l'hora d'implementar les estratègies σ_{-i}. Per tant, una justificació de l'equilibri perfecte està associada amb la possibilitat que els jugadors s'equivoquin, de forma que un jugador estarà interessat en triar estratègies que continuen sent una millor resposta encara que els rivals s'equivoquin. És per això que els equilibris perfectes són també coneguts com a *trembling-hand perfect equilibria* (equilibris perfectes de la mà tremolosa).

Un exemple

El joc simultani de la Fig. 1 té dos d'equilibris de Nash, tots dos amb estratègies pures: [*a*, *c*] i [*b*, *d*]. Considerem l'equilibri [*b*, *d*] i suposem que hi ha una minúscula probabilitat $\varepsilon > 0$ (tan petita com vulguem) que el jugador 2 s'equivoqui i triï *c* en comptes de *d*. Això equival a suposar que 2 realment juga l'estratègia mixta $[c, d] = [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Continua sent *b* una millor resposta? Donada l'estratègia $[c, d] = [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, el pagament esperat d'1 de triar *a* és $1 \cdot \varepsilon + 0 \cdot (1 - \varepsilon) = \varepsilon$ i el de triar *b* és $0 \cdot \varepsilon + 0 \cdot (1 - \varepsilon) = 0$. Atès que $\varepsilon > 0$, resulta que, tot i ser una millor resposta a $c = 0$ (jugar *d*), *b* no és una millor resposta a $c = \varepsilon > 0$ (jugar *d* amb probabilitat $1 - \varepsilon$). Així, a l'equilibri de Nash [*b*, *d*], *b* no és una "resposta segura" a *d*, perquè només que és jugui *c* amb una probabilitat infinitesimal, *b* deixa de ser una millor resposta. La conclusió és que [*b*, *d*] no és un equilibri perfecte.

		2	
		c	*d*
1	*a*	1 1	0 0
	b	0 0	0 0

Fig. 1. Un joc per a il·lustrar l'equilibri perfecte

Definició d'equilibri perfecte

Un equilibri perfecte d'un joc simultani $(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ és una jugada $\sigma \in \prod_{i\in N} \Delta(S_i)$ tal que existeix una seqüència de jugades $\{\tau^k\}_{k=1,\ldots,\infty}$ que satisfà el següent:

(i) per a tot jugador $i \in N$ i tot k, τ^k_i assigna probabilitat positiva a tota estratègia pura d'i;
(ii) per a tot jugador $i \in N$, $lim_{k\to\infty} \tau^k_i = \sigma_i$; i
(iii) per a tot jugador $i \in N$, tot k i tota estratègia $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$, $u_i(\sigma_i, \tau^k_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \tau^k_{-i})$.

La definició anterior diu que una jugada σ és un equilibri perfecte si podem trobar almenys una seqüència d'estratègies mixtes que compleix les següents tres condicions.

Condició (i): cada element d'aquesta seqüència assigna probabilitat positiva a totes les estratègies de tots els jugadors (i, per tant, a totes les jugades). Aquest requisit captura la idea que és possible cometre errors: atès que els errors són imprevisibles, en principi totes les estratègies pures es podrien jugar. Les estratègies mixtes d'un jugador que assignen probabilitat positiva a totes les estratègies pures del jugador s'anomenen estratègies completament mixtes. Una jugada és completament mixta si tota estratègia de la jugada és completament mixta.

Condició (ii): la seqüència de jugades $\{\tau^k\}$ convergeix a la jugada σ candidata a ser equilibri perfecte. La combinació de les condicions (i) i (ii) fa que es pugui interpretar la seqüència $\{\tau^k\}$ com una lleugera pertorbació de la jugada σ. A l'exemple anterior, $[c, d] = [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ seria una pertorbació de l'estratègia d quan ε és un nombre real que tendeix cap a zero.

Condició (iii): per a cada jugador i i tot k, l'estratègia σ_i d'i a la jugada σ candidata a ser equilibri perfecte és una millor resposta a les estratègies pertorbades τ^k_{-i} dels rivals. Aquesta condició garanteix que la jugada σ és, de fet, un equilibri de Nash.

Reunint les condicions (i), (ii) i (iii) resulta que un equilibri de Nash σ és perfecte si existeix una seqüencia $\{\tau^k\}$ de jugades formades per estratègies completament mixtes, que convergeix cap a σ i és tal que, per a cada jugador i, la seva estratègia σ_i a l'equilibri σ és una millor resposta a les estratègies que els rivals juguen a la seqüencia $\{\tau^k\}$. La interpretació és que els elements d'aquesta seqüència representen jugades que es juguen per error, que aquest error es va aproximant cap a zero i que les estratègies indicades a la jugada σ han de ser millor resposta fins i tot en el cas que es cometen els errors.

Un altre exemple

El joc simultani de la Fig. 2 permetrà il·lustrar com es demostra que un equilibri de Nash és perfecte. Prenguem, per exemple, l'equilibri amb estratègies pures $[a, e]$. Per a provar que és perfecte, cal pertorbar l'equilibri inicial amb probabilitats que tendeixen cap a zero i comprovar que, per a cada jugador, la seva estratègia a $[a, e]$ és millor resposta a les estratègies pertorbades. La mateix Fig. 2 mostra unes possibles pertorbacions, on s'enten que ε representa una seqüència de nombre reals positius que tendeixen monòtonament a zero (pot definir-se $\varepsilon = 1/k$ amb k = 20, 21, 22, 23, …). Per simplicitat s'ha considerat el mateix terme ε a les estratègies pertorbades de tots dos jugadors, però podria ser un terme δ diferent al cas del jugador 2: ε representa la probabilitat d'equivocar-se, que no té perquè ser la mateixa per als dos jugadors.

			ε	$1 - \varepsilon$
			2	
			d	*e*
$1 - 3\varepsilon$		*a*	0 4	4 4
ε	**1**	*b*	6 3	2 0
2ε		*c*	1 0	3 2

Fig. 2. Comprovació de la perfecció d'un equilibri

És de destacar que, per a ser perfecte, un equilibri no ha de ser robust (continuar sent un equilibri) respecte de totes les pertorbacions possibles: <u>n'hi ha prou que sigui robust a una única pertorbació</u>. Analitzem si [*a*, *e*] és un equilibri robust a la pertorbació indicada a la Fig. 2. Aquesta pertorbació està representada per la seqüència de jugades completament mixtes τ^{ε} tal que $\tau^{\varepsilon}(a) = 1 - 3\varepsilon$, $\tau^{\varepsilon}(b) = \varepsilon$, $\tau^{\varepsilon}(c) = 2\varepsilon$, $\tau^{\varepsilon}(d) = \varepsilon$ i $\tau^{\varepsilon}(e) = 1 - \varepsilon$, on ε tendeix a zero.

Primer comprovem que *a* és millor resposta a qualsevol estratègia del tipus $\tau^{\varepsilon}(d) = \varepsilon$ i $\tau^{\varepsilon}(e) = 1 - \varepsilon$, amb $\varepsilon > 0$ apropiadament petit. Donada aquesta estratègia del jugador 2, triar

a	implica al jugador 1 obtenir el pagament esperat	$0 \cdot \varepsilon + 4 \cdot (1 - \varepsilon) = 4 - 4\varepsilon$
b	implica al jugador 1 obtenir el pagament esperat	$6 \cdot \varepsilon + 2 \cdot (1 - \varepsilon) = 2 + 4\varepsilon$
c	implica al jugador 1 obtenir el pagament esperat	$1 \cdot \varepsilon + 3 \cdot (1 - \varepsilon) = 3 - 2\varepsilon$.

Per a què *a* sigui millor resposta a la pertorbació (condició (iii) de la definició), cal que $4 - 4\varepsilon > 2 + 4\varepsilon$ (triar *a* és millor que triar *b*) i que $4 - 4\varepsilon > 3 - 2\varepsilon$ (triar *a* és millor que triar *c*). Al primer cas, cal que $2 > 8\varepsilon$, això és, $\varepsilon < ¼$; al segon cas, cal que $1 > 2\varepsilon$; això és, $\varepsilon < ½$. En conclusió, per a una pertorbació suficientment petita ($\varepsilon < ¼$), *a* és millor resposta a l'estratègia pertorbada del jugador 2. Aquest valor és el llindar de la robustesa de l'estratègia *a*: fins i tot amb una probabilitat propera al 25% que el jugador 2 s'equivoqui i triï *d* en comptes de *e*, el jugador 1 continua tenint incentiu a jugar la seva part de l'equilibri de Nash [*a*, *e*].

Passem ara al jugador 2 per a comprovar si *e* és millor resposta a tota estratègia del tipus $\tau^{\varepsilon}(a) = 1 - 3\varepsilon$, $\tau^{\varepsilon}(b) = \varepsilon$ i $\tau^{\varepsilon}(c) = 2\varepsilon$, amb $\varepsilon > 0$ suficientment petit. Donada aquesta estratègia del jugador 1, triar

d	implica al jugador 2 obtenir el pagament esperat	$4 \cdot (1 - 3\varepsilon) + 3 \cdot \varepsilon + 0 \cdot 2\varepsilon = 4 - 9\varepsilon$
e	implica al jugador 2 obtenir el pagament esperat	$4 \cdot (1 - 3\varepsilon) + 0 \cdot \varepsilon + 2 \cdot 2\varepsilon = 4 - 8\varepsilon$.

En aquest cas és immediat que, atès que $\varepsilon > 0$, *e* és sempre millor que *d*. Com a conseqüència, *e* és millor resposta a la seqüència pertorbada del jugador 1. La conclusió final és que [*a*, *e*] és un equilibri perfecte: s'ha trobat <u>una</u> seqüència de jugades complementament mixtes que compleix les condicions (i), (ii) i (iii).

Q1. Comprova que l'equilibri de Nash [*a*, *c*] de la Fig. 1 és perfecte.

Q2. Troba tots els equilibris de Nash i els equilibris perfectes dels tres següents jocs.

1 \ 2	c	d
a	1, 1	0, 0
b	1, 0	0, 1

1 \ 2	c	d
a	2, 1	0, 0
b	0, 0	1, 2

1 \ 2	c	d
a	1, 1	0, 2
b	2, 0	0, 0

Q3. (Myerson (1991, p. 242)) Troba tots els equilibris de Nash i els equilibris perfectes del següent joc.

1 \ 2	e	f
a	5, 4	5, 4
b	8, 3	1, 9
c	3, 6	7, 2
d	4, 5	6, 3

Q4. (Myerson (1991, pp. 242–3)) Al següent joc, mostra que l'equilibri de Nash on $a = c = ½$ i $d = 1$ no és perfecte.

1 \ 2	d	e	f
a	1, 2	3, 0	0, 3
b	1, 1	2, 2	2, 0
c	1, 2	0, 3	3, 0

Q5. Considera un joc que tingui un equilibri de Nash que és completament mixt (com ara el joc de la Fig. 1 de l'epígraf *Equilibri de Nash*). És necessàriament perfecte aquest tipus d'equilibri?

Propietat fonamental dels equilibris perfectes
Tot joc simultani té almenys un equilibri perfecte.

Sabent que tot equilibri perfecte és un equilibri de Nash, l'anterior resultat té com a corol·lari que tot joc té almenys un equilibri de Nash. I atès que els equilibris perfectes són un refinament dels equilibris de Nash, no tot equilibri de Nash és necessàriament perfecte.

Definició d'estratègia fortament dominada
L'estratègia pura s_i' del jugador i d'un joc simultani $(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ és una estratègia fortament dominada si, i només si,

$$\exists\ \sigma_i \in \Delta(S_i) \text{ tal que } \forall\ s_{-i} \in S_{-i} \quad u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}).$$

L'estratègia pura s_i' del jugador i és fortament dominada si existeix una altra estratègia (possiblement mixta) d'i que sempre dóna a i pagament més gran que s_i'. Per tant, un jugador racional mai no triaria una estratègia fortament dominada: alguna altra li dóna sempre més.

Un exemple sobre estratègies fortament dominades

Al joc de la Fig. 3, l'estratègia d és fortament dominada per l'estratègia mixta (del mateix jugador) tal que $[a, b] = [½, ½]$. De fet, si 2 tria e el pagament per a 1 de triar d és zero, en tant que el pagament de jugar a i b cadascuna amb probabilitat ½ és ½; i si 2 tria f el pagament per a 1 de triar d és zero, en tant que el pagament de jugar a i b cadascuna amb probabilitat ½ és 1. Com a resultat, faci el que faci 2, $[a, b] = [½, ½]$ proporciona a 1 un pagament superior a d.

		2: e	2: f
1	a	0 0	2 −2
	b	1 −1	0 0
	c	−1 1	2 −2
	d	0 0	0 0

Fig. 3

Q6. Hi ha alguna altra estratègia fortament dominada al joc de la Fig. 3?

Q7. Demostra que <u>cap estratègia que forma part d'un equilibri de Nash no pot assignar probabilitat positiva a una estratègia fortament dominada</u> (aquest resultat implica que, en calcular els equilibris de Nash, es pot prescindir de les estratègies fortament dominades).

Q8. Prova que un jugador no pot tenir dues estratègies fortament dominades.

Definició d'estratègia feblement dominada

L'estratègia σ_i' del jugador i d'un joc simultani $(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ és una estratègia <u>feblement dominada</u> per l'estratègia σ_i''del mateix jugador si, i només si,

$$\text{(i)} \ \forall\, s_{-i} \in S_{-i} \quad u_i(\sigma_i'', s_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', s_{-i}) \text{ i}$$
$$\text{(ii)} \ \exists\, s_{-i} \in S_{-i} \quad u_i(\sigma_i'', s_{-i}) > u_i(\sigma_i', s_{-i})$$

L'estratègia σ_i' del jugador i és feblement dominada per σ_i'' si, juguin el que juguin els rivals, σ_i'' sempre dóna a i un pagament almenys tan gran com σ_i' i, en alguna ocasió, dóna un pagament superior. Per exemple, al joc de la Fig. 3, l'estratègia d és feblement dominada per l'estratègia b: si 2 tria f, 1 obté el mateix jugant b que jugant d; però si 2 tria e, 1 obté més jugant b que jugant d. <u>Una estratègia d'un jugador és feblement dominada si és feblement dominada per alguna altra estratègia del mateix jugador</u>.

Sobre l'eliminació d'estratègies feblement dominades

Atès que un jugador racional intenta obtenir el pagament més alt possible, està justificat eliminar de tota consideració una estratègia fortament dominada. Però passa el mateix amb una estratègia feblement dominada? La cosa no està tan clara. Considerem el joc de la Fig. 4.

	2: c	2: d
a	2 2	0 2
b	2 0	1 1

Fig. 4

En aquest joc, a és feblement dominada per b i c és feblement dominada per d. Si s'eliminen les estratègies a i c, resta un joc amb una única jugada: $[b, d]$. El vector de pagaments resultant és (1, 1). Però aleshores tots dos jugadors perden el pagament 2 més alt, associat amb l'equilibri de Nash $[a, c]$. El cas, però, és que la jugada $[a, c]$ no és un equilibri perfecte.

Q9. Comprova que, al joc de la Fig. 4, [*a*, *c*] no és un equilibri perfecte.

Relació entre equilibri perfecte i estratègies feblement dominades

- *A jocs simultanis amb només dos jugadors, un equilibri de Nash és perfecte si, i només, si cap estratègia de l'equilibri no és feblement dominada.*

L'anterior resultat indica que el que succeeix al joc de la Fig. 4 no és casual: l'equilibri de Nash [*a*, *c*] no és perfecte perquè almenys una de les dues estratègies (de fet, les dues) és feblement dominada.

- *A tot joc simultani, cap estratègia d'un equilibri perfecte no és feblement dominada. Però un equilibri de Nash format per estratègies que no són feblement dominades no és necessàriament perfecte.*

Per tant, l'equivalència entre perfecció i dominància no és certa per a més de dos jugadors: al joc de la Fig. 5 (van Damme (1991, p. 29)), l'equilibri [*b*, *c*, *e*] no és perfecte, tot i que ni *b*, ni *c*, ni *e* són estratègies feblement dominades.

1 \ 2	*c*	*d*	*c*	*d*
a	1 1 1	1 0 1	1 1 0	0 0 0
b	1 1 1	0 0 1	0 1 0	1 0 0
3	*e*		*f*	

Fig. 5. Un equilibri de Nash no feblement dominat no és necessàriament perfecte

Q10. Comprova que, al joc de la Fig. 5, [*b*, *c*, *e*] no és un equilibri perfecte. Comprova que l'equilibri [*a*, *c*, *e*] és perfecte.

Q11. Al següent joc (van Damme (1991, p. 56)), comprova que [*a*, *c*, *e*] és perfecte i que [*b*, *d*, *f*] no l'és.

1 \ 2	*c*	*d*	*c*	*d*
a	0 0 0	2 0 0	0 1 0	0 0 1
b	0 0 2	0 2 0	1 0 0	0 0 0
3	*e*		*f*	

Q12. Calcula tots els equilibris perfectes del següent joc.

2

		d	*e*	*f*
	a	1 1	0 0	0 0
1	*b*	0 0	0 0	0 0
	c	0 0	0 0	1 1

Sobre l'ordre d'eliminació d'estratègies feblement dominades

Quan s'elimina alguna estratègia feblement dominada d'un joc és possible que alguna de les restants estratègies (del mateix o d'altres jugadors) sigui feblement dominada. Aquí sorgeix el problema de l'ordre en què les estratègies feblement dominades s'eliminen, perquè el resultat de l'eliminació pot dependre de l'ordre d'eliminació. El joc de la Fig. 6, degut a Elon Kohlberg i Jean-François Mertens, il·lustra la problemàtica.

2

		d	*e*
	a	3 2	2 2
1	*b*	1 1	0 0
	c	0 0	1 1

Fig. 6

L'estratègia *b* és fortament dominada per *a*. Si s'elimina, *d* és feblement dominada per *e* al joc resultant. Eliminada *d*, l'únic equilibri de Nash (i, per tant, equilibri perfecte) del nou joc és [*a*, *e*]. Però si comencem eliminant *c*, que també és fortament dominada per *a*, resulta que ara *e* és feblement dominada per *d*. Eliminada *e*, l'únic equilibri de Nash és [*a*, *d*]. Per a acabar-ho d'adobar, si eliminem *b* i *c* alhora, aleshores ja no és possible eliminar més estratègies i tot el que resta (el joc amb jugades [*a*, *d*] i [*a*, *e*]) és equilibri de Nash (i equilibri perfecte).

Q13. Troba els equilibris perfectes del joc de la Fig. 6.

Q14. Troba les estratègies fortament dominades, les feblement dominades, el resultat d'eliminar estratègies fortament i feblement dominades, els equilibris de Nash i els equilibris perfectes del següent joc (Fudenberg i Tirole (1991, p. 5)).

2

		d	*e*	*f*
	a	4 3	5 1	6 2
1	*b*	2 1	8 4	3 6
	c	3 0	9 6	2 8

Inconvenients dels equilibris perfectes

• Un equilibri perfecte pot donar menys pagament a tots els jugadors que un equilibri que no és perfecte.

Aquest fet l'il·lustra el joc de la Fig. 7 (van Damme (1991, p. 14)): l'equilibri de Nash [*a*, *c*] és perfecte però dóna menys pagament que l'equilibri no perfecte [*b*, *d*] a tots els jugadors.

• Afegir estratègies fortament dominades pot crear nous equilibris perfectes.

Aquest inconvenient és seriós, perquè afegir o eliminar una estratègia fortament dominada no hauria de tenir efectes sobre la solució d'un joc (ja que són estratègies que mai no triaria un jugador racional). El joc de la Fig. 8 (van Damme (1991, p. 14)) demostra aquesta possibilitat. El joc original està format pels conjunts d'estratègies $S_1 = \{a, b\}$ i $S_2 = \{d, e\}$: el joc de la Fig. 1 amb canvi de nom de les estratègies del jugador 2. En aquest joc, l'equilibri de Nash [*b*, *e*] no és perfecte. Ara afegim les estratègies fortament dominades *c* i *f*. En el joc resultant, [*b*, *e*] és perfecte.

Q15. Comprova que [*b*, *e*] és un equilibri perfecte del joc de la Fig. 8.

1 \ 2	*c*	*d*
a	1 1	10 0
b	0 10	10 10

Fig. 7

1 \ 2	*d*	*e*	*f*
a	1 1	0 0	–1 2
b	0 0	0 0	0 –2
c	–2 –1	–2 0	–2 –2

Fig. 8

Bibliografia

- Selten, Reinhard (1975): "Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games", *International Journal of Game Theory* 4, 25–55.
  http://www.springerlink.com/content/101791/
- Fudenberg, Drew i Tirole, Jean (1991): *Game Theory*. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts, pp. 350–356.
  [658.012 Fud]
- Myerson, Roger B. (1991): *Game Theory. Analysis of Conflict*. Harvard University Press: Cambridge, Massachusetts, pp. 216–222.
  [658.012 Mye]
- Van Damme, Eric (1991): *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, 2a edició. Springer-Verlag: Berlin, pp. 13–14, 26–29 i 49–51.
  [658.012 Dam]