Microeconomia I

1r curs
Llicenciatura en Economia
Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials
Universitat Rovira i Virgili
Curs 2008-09

Aula A2.2
Sessions: dilluns d'11 a 13 i dijous de 9 a 11
del 15 de setembre al 18 de desembre de 2008

Antonio Quesada
Departament d'Economia · Despatx 314
Telèfon: 977 75 98 53
Adreça de correu electrònic: aqa@urv.cat
Hores de consulta durant el 1r quadrimestre: dilluns de 8 a 11 i dijous d'11 a 14
Pàgina web: http://gandalf.fcee.urv.es/professors/AntonioQuesada/docencia.html

Programa

Part I. Fonaments de l'anàlisi de la interacció estratègica

Tema 1. Introducció a la teoria dels jocs no cooperatius

LLIÇÓ 1 Què és un joc simultani?
LLIÇÓ 2 Com es construeix un joc simultani?
LLIÇÓ 3 Dominància entre estratègies d'un jugador
LLIÇÓ 4 Una solució per als jocs simultanis basada en la dominància
LLIÇÓ 5 Equilibri de Nash d'un joc simultani
LLIÇÓ 6 Com es calculen tots els equilibris de Nash d'un joc simultani?
LLIÇÓ 7 Què és un joc seqüencial?
LLIÇÓ 8 Com es construeix un joc seqüencial?
LLIÇÓ 9 Transformació d'un joc seqüencial en un joc simultani
LLIÇÓ 10 L'equilibri de Nash d'un joc seqüencial
LLIÇÓ 11 La inducció cap enrere aplicada a jocs seqüencials
LLIÇÓ 12 L'equilibri perfecte en subjocs

Part II. Mercats amb molts compradors i pocs venedors

Tema 2. Funcions de demanda dels consumidors

LLIÇÓ 1 Béns, preus i mercats
LLIÇÓ 2 Funció d'utilitat i funció d'utilitat marginal d'un bé
LLIÇÓ 3 Funció de demanda d'un bé d'un consumidor preu acceptant
LLIÇÓ 4 Canvis d'una funció de demanda d'un bé d'un consumidor
LLIÇÓ 5 Funció de demanda de mercat d'un bé
LLIÇÓ 6 Excedent del consumidor calculat a partir d'una funció de demanda
LLIÇÓ 7 Elasticitat preu de la demanda entre dos punts d'una funció de demanda
LLIÇÓ 8 Elasticitat preu de la demanda a un punt d'una funció de demanda
LLIÇÓ 9 Elasticitat preu de la demanda i despesa dels consumidors
LLIÇÓ 10 Altres elasticitats de la demanda

Tema 3. Monopoli i duopoli

LLIÇÓ 1 Funcions de cost de producció d'un bé
LLIÇÓ 2 El mercat monopolístic (o monopoli)
LLIÇÓ 3 La solució del monopoli
LLIÇÓ 4 Discriminació de preus
LLIÇÓ 5 Competència potencial
LLIÇÓ 6 El duopoli de Cournot
LLIÇÓ 7 El duopoli d'Stackelberg

Part III. Mercats amb molts compradors i molts venedors

Tema 4. El mercat perfectament competitiu

LLIÇÓ 1 Funció d'oferta d'un productor preu acceptant
LLIÇÓ 2 Funció d'oferta de mercat
LLIÇÓ 3 Excedent del productor i excedent dels productors
LLIÇÓ 4 Trets del mercat perfectament competitiu

LLIÇÓ 5 Equilibri d'un mercat perfectament competitiu
LLIÇÓ 6 El Teorema de la mà invisible
LLIÇÓ 7 Modificacions de l'equilibri d'un mercat perfectament competitiu
LLIÇÓ 8 Control de preus i quantitats a un mercat perfectament competitiu
LLIÇÓ 9 Impost sobre la quantitat venuda a un mercat perfectament competitiu

APÈNDIX
LLIÇÓ 10 Problemes del mercat perfectament competitiu: externalitats
LLIÇÓ 11 Problemes del mercat perfectament competitiu: informació asimètrica
LLIÇÓ 12 Un exemple sobre la teoria del disseny de mecanismes

Bibliografia

Els apunts s'han d'estudiar amb bolígraf i paper, comprovant un mateix tot el que diuen els apunts. És essencial fer exercicis (no tots sinó els que es cregui oportú) per a comprovar que s'ha entès el que expliquen els apunts. S'aconsella complementar l'estudi dels apunts amb la lectura d'algun manual que porti per títol "Economía", "Introducción a la Economía", "Introducción a la Microeconomía" o algun de similar. Els següents són tres possibles candidats.

- Krugman, Paul i Wells, Robin (2006): *Introducción a la Economía: Microeconomía*, 1a edició. Editorial Reverté: Barcelona.
- Mankiw, N. Gregory (2007): *Principios de Economía*, 4a edició. Thomson: Madrid.
- Parkin, Michael (2004): *Economía*, 6a edició. Pearson Educación: Mèxic.

Avaluació

Hi ha dues convocatòries d'avaluació per a aprovar l'assignatura. En primera convocatòria l'estudiant ha de triar una de les dues següents opcions d'avaluació.

• Opció 1: la nota final es determina exclusivament realitzant l'examen final del dimecres 14 de gener del 2009 (12:00).

• Opció 2: la nota final es determina durant el curs realitzant exàmens parcials. De cada tema es farà un examen de tipus test amb 20 preguntes, 4 opcions per pregunta i penalització d'1/3 per error (dates: 6/10/08, 23/10/08, 20/11/08 i 15/12/08). Cada test representa el 10% de la nota final. Es faran dues proves escrites més, una dels temes 1 i 2 (30/10/08) i l'altra dels 3 i 4 (18/12/08). Cada prova escrita representa el 30% de la nota final. Cada prova escrita consistirà en exercicis numèrics, problemes per a analitzar i preguntes teòriques. Paral·lelament, intervencions encertades i de mèrit durant les classes es traduiran en punts addicionals a la nota final de curs.

En segona convocatòria la nota final es determina mitjançant l'examen final final del dissabte 27 de juny de 2009 (12:00). Els exàmens finals de les dues convocatòries consistiran en preguntes de tipus test, exercicis numèrics, problemes per a analitzar i preguntes teòriques.

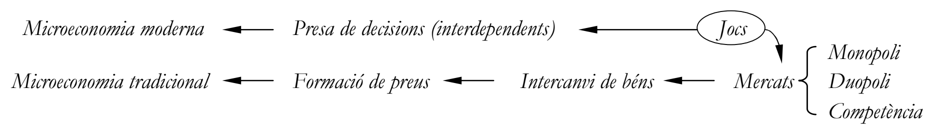
Introducció

La Microeconomia moderna és, en essència, una teoria de la decisió i, en particular, de la decisió presa tenint en compte els beneficis i costs que genera la decisió a fi d'aconseguir el màxim benefici de la decisió un cop s'han descomptat els costs. La Microeconomia moderna és heredera i continuadora de la Microeconomia tradicional, que fou, en essència, una teoria dels preus. El present curs de Microeconomia I s'organitza al voltant d'aquests dos conceptes: decisió i preus.

La Microeconomia moderna s'ocupa de tot tipus de decisions: individuals, col·lectives i estratègiques (= interdependents). El curs posa l'èmfasi en el tercer tipus de decisió: aquelles on el còmput del benefici net que genera la decisió per a qui l'ha pres depèn de les decisions d'altres agents. La Microeconomia moderna disposa d'una eina per a analitzar la presa de decisions interdependents: la teoria dels jocs. La teoria dels jocs permet analitzar pràcticament tot fenomen social que es vulgui explicar en termes de les decisions d'individus, ja que un joc és una representació abstracta del procés i del context en què es prenen decisions interdependents. Donada la rellevància de la teoria dels jocs per a analitzar la presa de decisions interdependents, el curs s'inicia presentant els fonaments de la teoria dels jocs.

La segona part del curs presenta els fonaments de la teoria dels preus, això és, s'expliquen els models bàsics sobre com es determinen i canvien els preus de béns (i serveis). La Microeconomia moderna conceptualitza els preus com a resultat de les decisions relatives a l'intercanvi de béns, és a dir, decisions relatives a la compra i venda de béns. Els preus expressen el cost (per al comprador) d'obtenir un bé i, alhora, el benefici (per al venedor) de desfer-se'n del bé. En general, els preus són resultat de decisions interdependents per part de compradors i venedors. La interacció organitzada entre compradors i venedors d'un bé s'anomena mercat del bé. Atesa la naturalesa interdependent de les decisions de compra i venda, els mercats es poden representar i conceptualitzar com a un tipus de joc i d'aquí la utilitat d'iniciar el curs amb la teoria dels jocs.

Al llarg del curs s'estudiarà com es determinen els preus a tres tipus de mercats, que han esdenvingut mercats de referència amb què comparar altres mercats: el mercat monopolístic (o monopoli), el mercat duopolístic (o duopoli) i el mercat de competència perfecta (o mercat competitiu). El que separa un mercat dels altres és el nombre de venedors: n'hi ha només un al monopoli; dos al duopoli; i "molts" al de competència. L'esquema següent serveix de resum de tot l'anterior.



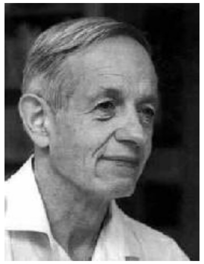
El problema de fons a analitzar amb els tres mercats anteriors consisteix a determinar com influeixen sobre els preus el nombre de venedors a un mercat. Com més petit és el nombre de venedors a un mercat, menor és la interdependència entre ells i, per tant, més capacitat té un venedor de prendre decisions sense veure's afectat pel que decideixen els demés venedors. Aquesta independència respecte dels altres venedors s'anomena "poder de mercat". En principi, sembla raonable expectar dels venedors que intentaran augmentar el seu poder de mercat. La qüestió que pretenem resoldre és doble: (i) com afecta la modificació del poder de mercat dels venedors als preus?; i (ii) com afecta aquesta modificació al benestar dels consumidors?

Tema 1. Introducció a la teoria dels jocs no cooperatius

Lliçons 1–12

John von Neumann (1903–1957)
http://en.wikipedia.org/wiki/Von_Neumann

Matemàtic estatunidenc nascut a Budapest. Va escriure amb l'economista Oskar Morgenstern el llibre *Theory of games and economic behavior* (1944), que posava els fonaments de la teoria dels jocs i la desenvolupava com a eina per a l'anàlisi econòmica.



John Forbes Nash, Jr. (1928)
http://en.wikipedia.org/wiki/John_Forbes_Nash

Matemàtic estatunidenc a qui es deu el concepte d'equilibri de Nash, la solució de referència dels jocs simultanis. Juntament amb Reinhard Selten (1930) i John Charles Harsanyi (1920-2000) va rebre al 1994 el *Premi en Ciències Econòmiques del Banc de Suècia* ("Premi Nobel d'Economia").

Reinhard Selten (1930)
http://en.wikipedia.org/wiki/Reinhard_Selten

Economista alemany nascut a Breslàvia. A ell es deu el concepte d'equilibri perfecte en subjocs, la solució de referència dels jocs seqüencials. Juntament amb John Nash (1928) i John Charles Harsanyi (1920-2000) va rebre al 1994 el *Premi en Ciències Econòmiques del Banc de Suècia* ("Premi Nobel d'Economia").

Lliçó 1. Què és un joc simultani?

DEFINICIÓ 1. Els individus d'un grup prenen decisions interdependents quan el resultat per a cada individu de les seves decisions depèn de les decisions dels altres individus.

- Gran part de les decisions que prenem cada dia són interdependents: trucar al telèfon mòbil d'algú, buscar un llibre a la biblioteca, descarregar arxius d'Internet, conduir… Els resultats per a cadascú de nosaltres d'aquestes decisions depenen de les decisions d'altres persones: si ens creuem amb algú que no respecta les normes de circulació és probable que tinguem un accident; el temps de descàrrega d'un arxiu és funció del nombre d'internautes que també demanen la descàrrega; trobar el llibre que busquem dependrà de si algú altre se l'ha emportat; i poder parlar amb algú per telèfon mòbil depèn del nombre d'usuaris que utilitzen la xarxa, de la gestió d'aquesta xarxa que fan les companyies de telefonia i de la decisió del destinatari d'atendre la trucada.

DEFINICIÓ 2. Un joc és un model matemàtic que permet representar i analitzar la presa de decisions interdependents. La teoria dels jocs és una branca de la teoria econòmica (i també de la matemàtica aplicada) que estudia la presa de decisions interdependents.

- Hi ha dos tipus de joc: cooperatius i no cooperatius. En aquest curs només s'estudiaran jocs no cooperatius i "joc" significarà sempre "joc no cooperatiu". A un joc no cooperatiu, els possibles acords entre els individus no són vinculants i, per tant, els individus tenen sempre plena llibertat per a prendre la decisió que vulguin.

- Hi ha dos tipus de joc no cooperatiu: els jocs simultanis i els jocs seqüencials. Als simultanis, els individus prenen decisions ignorant les decisions dels altres individus; als seqüencials, hi ha individus que, quan prenen decisions, saben les decisions que han pres altres individus. Els jocs simultanis són el tipus més simple de joc. Una línia de recerca a la teoria de jocs pretén reduir l'anàlisi de tots els jocs (tant cooperatius com no cooperatius) a l'anàlisi dels jocs simultanis.

- Un joc simultani està format per tres elements: un conjunt d'individus, cadascun dels quals ha de prendre una decisió; per a cada individu, el conjunt de decisions que pot prendre; i, per a cada individu, el resultat de la seva decisió. Les lletres de la paraula "joc" permeten recordar els seus elements: J = *jugadors*; O = *opcions* dels jugadors; i C = *conseqüències* per als jugadors.

EXEMPLE 3. Els jocs simultanis poden ser representats gràficament. La Fig. 1 mostra la representació gràfica d'un joc simultani.

DEFINICIÓ 4. Els individus que prenen decisions a un joc simultani s'anomenen jugadors.

- El joc de la Fig. 1 té dos jugadors. És costum numerar els jugadors i anomenar-los "jugador 1", "jugador 2", "jugador 3", etc.

		Jugador 2		
		c	*d*	*e*
Jugador 1	*a*	1 1	0 0	9 −1
	b	0 5	7 3	8 8

Fig. 1. Exemple d'un joc simultani

DEFINICIÓ 5. Estratègia d'un jugador d'un joc simultani és cadascuna de les decisions que el jugador pot prendre.

- Al joc de la Fig. 1, el jugador 1 té dues estratègies, anomenades *a* i *b*. Sense més informació, aquestes estratègies poden representar qualsevol cosa: pujar en ascensor o per les escales; anar a classe o al bar; comprar el diari o no comprar-lo; etc.

- Al joc de la Fig. 1, el jugador 2 té tres estratègies, anomenades *c*, *d* i *e*. La convenció a l'hora de representar un joc simultani amb dos jugadors és llistar les estratègies del jugador 1 en columna a l'esquerra i les del jugador 2 en fila a dalt. Així, la perspectiva del jugador posat a l'esquerra és horitzontal i la del jugador posat a dalt és vertical.

DEFINICIÓ 6. Una jugada a un joc simultani és una assignació a cada jugador d'una de les seves estratègies.

- Una jugada és una manera de combinar les decisions dels jugadors. Cada jugada expressa una forma de jugar el joc (= dir quina estratègia tria cada jugador).

- El joc de la Fig. 1 té sis jugades. Cada jugada del joc és representada per una casella. Per exemple, la casella superior esquerra es troba a la intersecció entre l'estratègia *a* del jugador 1 i l'estratègia *c* del jugador 2. Per tal motiu, aquesta casella representa la jugada on el jugador 1 tria *a* i el jugador 2 tria *c*. Atès que el jugador 1 té dues estratègies i el jugador 2 en té tres, el producte $2 \times 3 = 6$ dóna el total de jugades del joc.

- Les jugades s'expressen mitjançant vectors. El primer component del vector és l'estratègia del jugador 1 a la jugada; el segon component és l'estratègia del jugador 2; i així successivament quan hi ha més de dos jugadors. Per exemple, al joc de la Fig. 1, la jugada representada per la casella inferior dreta es correspondria amb la jugada (*b*, *e*). La jugada (*b*, *e*) és aquella on el jugador 1 tria *b* i el jugador 2 tria *e*. El vector (*c*, *e*) no és cap jugada, perquè una jugada combina una estratègia del jugador 1 amb una altra del jugador 2, i tant *c* com *e* són estratègies del jugador 2.

DEFINICIÓ 7. El pagament d'un jugador a una jugada és una avaluació numèrica de totes les conseqüències que resulten per al jugador quan es produeix la jugada. El terme $p_i(s)$ designarà el pagament del jugador *i* a la jugada *s*.

- El pagament d'un jugador quan es produeix una jugada mesura el que guanya o perd el jugador, en termes nets, com a conseqüència de les decisions que tots els jugadors prenen a la jugada. Els pagaments són mesures quantitatives dels resultats del joc.

- Les unitats dels pagaments resten, en principi, indefinides. La situació que representi el joc permetrà identificar en quines unitats es mesuren el pagaments: euros, quotes de mercat, anys de presó, notes d'una assignatura, unitats de "satisfacció"… Depenent de la interpretació dels pagaments, no cal que algú doni físicament els pagaments: si el resultat del joc representa plaer o dolor, un pagament 3 indicaria que el jugador experimenta "3 unitats de plaer" mentre que un pagament de –4 indicaria que el jugador experimenta "4 unitats de dolor".

- Al joc de la Fig. 1, els números a cada casella representen els pagaments dels jugadors. El primer número dels dos que hi ha a cada casella és el pagament del jugador que es posa a l'esquerra (en aquest cas, el jugador 1) en tant que el segon número és el pagament del jugador que apareix a dalt (el jugador 2). A tall d'exemple, el pagament $p_1(a, e)$ del jugador 1 a la jugada (*a*, *e*) és 9 i el pagament $p_2(a, e)$ del jugador 2 a la mateixa jugada (*a*, *e*) és –1. Això vol dir que si el jugador 1 tria *a* i el jugador 2 tria *e*, el jugador 1 rep 9 unitats i el jugador 2 en perd una.

DEFINICIÓ 8. Un joc simultani consisteix en tres elements:

- un conjunt finit i no buit d'individus que prenen decisions anomenats jugadors;
- per a cada jugador, un conjunt finit i no buit de decisions anomenades estratègies; i
- per a cada jugador i per a cada jugada, un número que representa el pagament que obté el jugador quan es juga la jugada.

Exercicis de la Lliçó 1

1. Escriu en forma de vector totes les jugades del joc de la Fig. 1.

2. Representa i llista en forma de vector totes les jugades d'un joc simultani: (i) amb dos jugadors on un jugador té quatre estratègies i l'altre en té només una; (ii) amb dos jugadors on tots dos tenen tres estratègies; i (iii) amb tres jugadors on cada jugador té dues estratègies.

3. Representa un joc simultani amb dos jugadors, un amb 4 estratègies i l'altre amb 2. Representa el joc canviant de posició les estratègies del jugador 1. Fes el mateix canvi als jocs de les Figs. 1 i 3.

4. Què diferencia una estratègia d'una jugada? I què tenen en comú?

5. Pot un joc simultani tenir, en total, més estratègies que jugades? I més jugades que estratègies? Cas que sí, posa exemples.

6. Representa el joc de la Fig. 1 canviant de posició els jugadors. Fes el mateix per al joc de la Fig. 3.

7. Representa un joc simultani amb tres jugadors on cada jugador té dues estratègies. Torna a representar el mateix joc posant un dels jugadors en totes les posicions possibles.

Lliçó 2. Com es construeix un joc simultani?

Aquesta lliçó il·lustra com representar cadascuna de les situacions que es descriuen als Exemples 1 i 2 mitjançant un joc simultani.

EXEMPLE 1. Els estudiants d'un curs de Microeconomia I fan un examen consistent en problemes numèrics. El professor observa que els dos únics estudiants que obtenen correctament les solucions lliuren fulls de respostes idèntics. Crida els estudiants i els informa que cadascú ha de decidir en aquell moment si acusar o no acusar l'altre estudiant de copiar. Si tots dos estudiants acusen l'altre, ambdós suspenen amb un 4. Si cap dels dos no acusa l'altre, el professor, tot i tenir sospites que algú ha copiat, no els pot suspendre, però pot ajustar la correcció per a què tots dos aprovin només amb un 5. I si només un dels dos acusa l'altre, qui acusa obté un 10 i qui no acusa obté un 0.

• **Pas 1 de 3**: <u>determinar els jugadors</u>. Tot i que hi ha tres persones involucrades (professor i dos estudiants), els qui han de prendre decisions són els estudiants. El professor posa les notes però no és lliure de posar qualssevol notes, ja que les decisions que prenen els estudiants determinen completament les notes que posa el professor. Només compten com a jugadors aquells agents que poden lliurement triar qualsevol de les opcions disponibles i el professor, tal i com es descriu la situació, no és lliure de posar la nota que vulgui un cop els estudiants prenen les seves decisions. Anomenem "jugador 1" i "jugador 2" als dos estudiants (també podríem haver-los anomenat "estudiant 1" i "estudiant 2").

		Jugador 2	
		A	*N*
Jugador 1	*A*		
	N		

Fig. 2. El joc de l'Exemple 1 sense pagaments

		Jugador 2	
		A	*N*
Jugador 1	*A*	4 4	10 0
	N	0 10	5 5

Fig. 3. El joc de l'Exemple 1

• **Pas 2 de 3**: <u>especificar les estratègies de cada jugador</u>. Tots dos jugadors tenen les mateixes dues estratègies: acusar o no acusar. És costum abreujar el nom de les estratègies. Anomenem *A* l'estratègia consistent en acusar i anomenem *N* l'estratègia consistent en no acusar. Un cop sabuts el nombre de jugadors i el conjunt d'estratègies de cada jugador, es pot representar la matriu del joc simultani. La Fig. 2 mostra aquesta matriu. Cada casella de la matriu representa una jugada del joc. El joc resultant tindrà, per tant, 4 jugades: (*A*, *A*), (*A*, *N*), (*N*, *A*) i (*N*, *N*). Les 4 jugades identifiquen tant les 4 maneres de jugar el joc com els 4 possibles resultats de jugar-lo.

• **Pas 3 de 3**: <u>assignar pagaments als jugadors a cada jugada</u>. Per a acabar de construir el joc, cal assignar pagaments als jugadors: cada jugada ha d'indicar quin pagament obté el jugador quan es realitza la jugada. A l'Exemple 1, els pagaments són notes. No és obligatori que els pagaments de tots els jugadors estiguin mesurats en les mateixes unitats: si la situació de

l'exemple fos tal que el professor fos un jugador més, els seus pagaments probablement estarien mesurats en altres unitats. Quan tots dos jugadors s'acusen mútuament, el resultat és que tots dos obtenen un 4. Això significa que el vector de pagaments de la jugada (*A*, *A*) és (4, 4), on el primer pagament correspon al jugador 1 i el segon correspon al jugador 2. Quan un acusa i l'altre no, qui acusa obté un 10 i qui és acusat obté un 0. D'aquí que el vector de pagaments de la jugada (*A*, *N*) sigui (10, 0) i el de la jugada (*N*, *A*) sigui (0, 10). Si ningú no acusa, la jugada resultant és (*N*, *N*) i el vector de pagaments és (5, 5). La Fig. 3 presenta el joc simultani obtingut.

- La construcció del joc de la Fig. 3 s'ha fet seguint el costum segons el qual la perspectiva del jugador situat a l'esquerra és horitzontal i la del situat a dalt és vertical. Així, si 1 tria *A* pot obtenir un 4 o un 10; i si tria *N*, un 0 o un 5. D'altra banda, si 2 tria *A*, pot obtenir un 4 o un 10; i si tria *N*, un 0 o un 5. També es podria haver posat el jugador 1 a dalt i el 2 a l'esquerra, però en aquest cas podria ser que alguns vectors de pagaments fossin diferents dels indicats a la Fig. 3 (Exercici 6 de la Lliçó 1).

- L'ordre en què es llisten les estratègies dels jugadors a les Figs. 2 i 3 és arbitrari: es tractaria del mateix joc si, per al jugador 1, en comptes de posar a dalt *A* i a baix *N*, les estratègies permutessin la posició. Però aleshores caldria reassignar els pagaments seguint el canvi en l'ordre de les estratègies (Exercici 3 de la Lliçó 1).

EXEMPLE 2. Un professor ha d'avaluar una estudiant mitjançant un examen escrit. El professor pot posar un examen fàcil (estratègia *F*) o difícil (estratègia *D*). L'estudiant pot estudiar (estratègia *E*) o no estudiar (estratègia *N*). La jugada més preferida pel professor és (*F*, *E*): ell el posa fàcil i ella estudia. Després vénen, per ordre, les jugades (*D*, *E*), (*D*, *N*) i (*F*, *N*). La preferència de l'estudiant sobre les jugades és, de més a menys: (*F*, *E*), (*F*, *N*), (*D*, *N*) i (*D*, *E*).

- **Pas 1 i Pas 2.** La matriu del joc que representaria l'Exemple 2 es mostra a la Fig. 4. En aquest cas, en comptes d'anomenar els jugadors 1 i 2, se'ls anomena "professor" i "estudiant". Es pot fer de les dues maneres, triant la que més convingui.

- **Pas 3.** L'Exemple 2 es diferencia de l'Exemple 1 en no especificar pagaments. Tot i així, podem associar un joc amb l'Exemple 2 sabent que el fet que un jugador prefereixi una jugada a una altra significa que el pagament de la primera jugada serà superior al de la segona. Per tant, <u>triarem, per a cada jugador, 4 números a l'atzar i els assignarem a les jugades respectant l'ordre de preferència dels jugadors per les jugades</u>.

		Estudiant	
		E	*N*
Professor	*F*		
	D		

Fig. 4. El joc de l'Exemple 2 sense pagaments

		Estudiant	
		E	*N*
Professor	*F*	4 4	1 3
	D	3 1	2 2

Fig. 5. Un joc associat amb l'Exemple 2

Triem, per al professor, el números 1, 2, 3 i 4. Assignem el valor més gran (el 4) com a pagament a la jugada més preferida del professor, (*F*, *E*). Prenguem el segon valor més gran (el 3) i assignem-lo a la segona jugada més preferida del professor, (*D*, *E*). I així successivament. Fem després el mateix en el cas de l'estudiant. Els números triats per a l'estudiant també han estat 1, 2, 3 i 4 però podríem haver estat uns altres. La Fig. 5 mostra el joc resultant.

Exercicis de la Lliçó 2

Representa cadascuna de les següents situacions com a joc simultani.

1. El dilema dels viatgers (Kaushik Basu). Una companyia aèria perd dues antiguitats idèntiques de dos viatgers. Un gerent de la companyia estima que el preu de l'antiguitat és de 1000 €, 2000 € o 3000 €. Reuneix els dos viatgers i els demana que anotin a un paper, per separat i sense consultar-se, un dels tres valors anteriors. El gerent els informa que si tots dos declaren el mateix preu, entendrà que diuen la veritat i rebran aquest preu com a indemnització. I afegeix que si indiquen preus diferents, assumirà que qui diu el preu més alt menteix. En tal cas, no s'indemnitzarà a qui entén que menteix i premiarà a l'altre viatger amb una indemnització que serà el triple del preu declarat.

2. (i) Un davanter ha de llençar dos penals, cadascun llençat a la dreta o a l'esquerra. El porter s'ha de llençar a la dreta o a l'esquerra. Hi ha gol si la pilota es llença en una direcció i el porter es llença en la contrària. Per cada gol aconseguit, el porter paga al davanter 100 €. Si el llençament no és gol, el davanter paga 100 € al porter. (ii) Com seria el joc si només es llencés un penal?

3. El viatger d'un tren decideix si comprar bitllet o no. L'interventor del tren decideix si demanar el bitllet al viatger o no. Quines creus que són les "preferències naturals" sobre les jugades de viatger i interventor? Representa la situació com a joc simultani amb les preferències sobre les jugades que has considerat "naturals".

4. L'Exemple 2 amb pagaments que no siguin 1, 2 3 i 4, i que siguin diferents per a cada jugador.

5. El joc de la revelació (Steven Brams). Tenim una persona i Déu. Déu decideix si revelar o no la seva existència a la persona. La persona decideix si creure o no en Déu. Déu prefereix que la persona cregui en la seva existència a que no cregui; i, cregui o no cregui, prefereix no revelar-se a revelar-se. La persona prefereix creure en Déu a no creure quan Déu es revela (prefereix una creença confirmada per l'evidència) i, es produeixi o no la revelació, prefereix creure en Déu a no creure.

6. Dos estudiants de Microeconomia I s'adonen que cap d'ells no està entenent res del que explica el professor. Ignorant què decideix l'altre, cadascú decideix si calla o si atura l'explicació del professor i pregunta el dubte. Si cap dels estudiants no pregunta, la mesura del seu benestar és –1. Quan només un dels dos pregunta, la resposta del professor resol el dubte i, com a conseqüència, tots dos augmenten tres unitats el seu benestar respecte de l'estat on cap dels dos no pregunta. Però qui pregunta sent tanta vergonya per haver preguntat que, a banda del benefici que obté per resoldre el dubte, experimenta una pèrdua afegida de quatre unitats. I si tots dos pregunten es neutralitza parcialment "l'efecte vergonya" i cada estudiant augmenta dues unitats el seu benestar respecte de l'estat on cap dels dos no pregunta.

7. Dos estudiants comparteixen pis. El pis necessita neteja i tots dos han de decidir si fer neteja pel seu compte o no. El pitjor per a tots dos és que no es faci neteja. El millor per a cada estudiant és no fer neteja i que la faci l'altre. I si un fa neteja prefereix que l'altre s'hi afegeixi a que no.

Lliçó 3. Dominància entre estratègies d'un jugador

DEFINICIÓ 1. A un joc simultani amb dos jugadors, anomenats *i* i *j*, l'estratègia *a* del jugador *i* domina l'estratègia *b* del mateix jugador si, per a tota estratègia *c* del jugador *j*, la jugada (*a*, *c*) dóna al jugador *i* un pagament més gran que la jugada (*b*, *c*); això és, *a* domina *b* si, per a tota estratègia *c* del jugador *j*, $p_i(a, c) > p_i(b, c)$.

- Que *a* domini *b* significa que, jugui el que jugui l'altre jugador, canviar de l'estratègia *a* a l'estratègia *b* fa sempre disminuir el pagament del jugador que tria entre *a* i *b*.

- Com a il·lustració, al joc de la Fig. 1, l'estratègia *c* del jugador 2 domina l'estratègia *d* del mateix jugador. La raó és que, triï l'estratègia que triï el jugador 1, el jugador 2 obté sempre un pagament més gran triant *c* que triant *d*. Comprovem-ho.
  • Si el jugador 1 tria *b*, escollir *c* representa per al jugador 2 obtenir un pagament de 5, en tant que escollir *d* representa per a 2 obtenir només 3. Per tant, quan 1 tria *b*, és millor per al jugador triar *c* que triar *d* (observa que, si 1 tria *b*, la millor opció per a 2 és triar *e*, que proporciona un pagament de 8). En resum, $p_2(b, c) > p_2(b, d)$.
  • Si el jugador 1 tria *a*, escollir *c* torna a ser millor per a 2 que escollir *d*: donat *a*, escollir *c* fa que 2 obtingui un pagament d'1 i escollir *d* fa que el pagament de 2 sigui 0. Així que $p_2(a, c) > p_2(a, d)$. Per tant, triï 1 el que triï (ja sigui *a* o *b*), *c* és millor que *d* per a 2. Això vol dir que *c* domina *d*.

PROPOSICIÓ 2. *La relació de dominància entre estratègies d'un jugador és*

- *irreflexiva: cap estratègia no es domina a sí mateixa;*
- *asimètrica: si l'estratègia a domina l'estratègia b aleshores b no domina a; i*
- *transitiva: si a domina b i b domina c aleshores a domina c.*

DEFINICIÓ 3. A un joc simultani amb dos jugadors, una estratègia d'un jugador és una estratègia dominant si l'estratègia domina totes les altres estratègies del jugador.

- Que un jugador *i* tingui una estratègia dominant significa que, faci el que faci el jugador $j \neq i$, triar l'estratègia dominant sempre proporcionarà a *i* més pagament que qualsevol altra estratègia. Tenir una estratègia dominant vol dir que la millor elecció no depèn de l'elecció de l'oponent: l'estratègia dominant és sempre la millor elecció.

- Per exemple, al joc de la Fig. 1, el jugador 1 no té cap estratègia dominant: si el jugador 2 tria *c*, el millor per a 1 és triar *a* (si tria *a* obté 1 i si tria *b* obté 0); però si 2 tria *d*, el millor per a 1 és triar *b* (si tria *a* obté 0 i si tria *b* obté 7). En conseqüència, 1 no té cap estratègia que, faci el que faci 2, li proporcioni més pagament que qualsevol altra estratègia: la millor elecció per al jugador 1 depèn del que escull el jugador 2.

- Al mateix joc de la Fig. 1, el jugador 2 tampoc no té cap estratègia dominant: si el jugador 1 tria *a*, el millor per a 2 és triar *c* (si tria *c* obté 1, si tria *d* obté 0 i si tria *d* obté –1); però si 1 tria *b*, el millor per a 2 és triar *e* (si tria *c* obté 5, si tria *d* obté 3 i si tria *e* obté 8). Per tant, 2 no té cap estratègia que, faci el que faci 1, li proporcioni més pagament que qualsevol altra estratègia. Això significa que la millor elecció per al jugador 2 depèn del que escull el jugador 1.

- Si, al joc de la Fig. 1, el pagament del jugador 1 a la jugada (a, d) fos 8 en comptes de 0, aleshores a seria una estratègia dominant per al jugador 1. Al joc de la Fig. 3, A és una estratègia dominant per al jugador 2, ja que $p_2(A, A) > p_2(A, N)$ i $p_2(N, A) > p_2(N, N)$. Que $p_2(A, A) > p_2(A, N)$ vol dir que és millor per a 2 triar A que triar N quan 1 tria A, i $p_2(N, A) > p_2(N, N)$ vol dir que és millor per a 2 triar A que triar N quan 1 tria N. Així, trïi el que trïi 1, A és millor per a 2 que qualsevol altra estratègia. Això és, A és una estratègia dominant per al jugador 2. Comprova que A també és dominant per a 1.

PROPOSICIÓ 4. *Un jugador d'un joc simultani amb dos jugadors <u>no pot tenir més d'una estratègia dominant</u>: o en té una o no en té cap.*

- *Demostració*. La demostració és per reducció a l'absurd: assumim que un jugador té dues estratègies dominants i tractem d'arribar a una contradicció. Suposem que a i b són totes dues estratègies dominants d'un jugador. Seleccionem arbitràriament una estratègia de l'altre jugador. Sigui c aquesta estratègia. Atès que a és una estratègia dominant, a domina b. Per tant, el pagament del jugador a la jugada (a, c) és més gran que el seu pagament a la jugada (b, c). Però que b sigui estratègia dominant implica que b domina a i, en conseqüència, el pagament del jugador a la jugada (b, c) és més gran que el seu pagament a la jugada (a, c): contradicció.■

DEFINICIÓ 5. A un joc simultani amb 2 jugadors, una estratègia a d'un jugador és una <u>estratègia dominada</u> si existeix alguna altra estratègia b del mateix jugador tal que l'estratègia b domina l'estratègia a.

- Que una estratègia sigui <u>dominant</u> vol dir que aquesta estratègia és la <u>millor</u> estratègia de què disposa el jugador. En canvi, que una estratègia sigui <u>dominada</u> vol dir que aquesta estratègia <u>mai no és una "bona" opció</u>, ja que hi ha una altra que sempre proporciona al jugador un pagament més gran.

- Per a un jugador que vulgui obtenir el pagament més alt possible, tot porta a jugar una estratègia dominant i res (en principi) no justifica jugar una estratègia dominada.

- Al joc de la Fig. 1, c domina d. Per aquesta raó, d és una estratègia dominada. D'altra banda, ni c domina e ni tampoc d domina e. D'aquí resulta que e no és una estratègia dominada. Tampoc no és c una estratègia dominada, ja que ni d domina c ni e domina c. Així, 2 té una estratègia dominada (d) i, atès que ni c domina e ni e domina c, 2 no té cap estratègia dominant. En el cas del jugador 1, $p_1(a, c) > p_1(b, c)$ –això vol dir que a és millor que b quan es juga c– però $p_1(a, d) < p_1(b, d)$ –b és millor que a quan es juga d–. Per tant, ni a domina b ni b domina a i 1 no té estratègies dominades ni dominants.

PROPOSICIÓ 6. *Un jugador d'un joc simultani amb 2 jugadors <u>no pot tenir totes les estratègies dominades</u>: si el jugador té n estratègies, el nombre mínim d'estratègies dominades és 0 i el màxim és $n-1$.*

DEFINICIÓ 7. <u>Quan hi ha més de 2 jugadors</u>, l'estratègia a d'un jugador <u>domina</u> l'estratègia b del <u>mateix</u> jugador si, per a <u>tota</u> assignació c d'estratègies a la resta de jugadors, la jugada (a, c) dóna al jugador un pagament <u>més gran</u> que la jugada (b, c).

Jugador 1 \ Jugador 2	c	d	c	d	c	d
a	0 1 5	0 0 0	0 3 0	0 2 3	0 2 1	1 1 4
b	1 2 0	0 1 0	0 2 1	0 1 2	0 4 2	0 3 3
Jugador 3	e		f		g	

Fig. 6. Un joc simultani amb tres jugadors

- Al joc de la Fig. 6, el jugador 1 tria fila (estratègies a o b), el jugador 2 tria columna (estratègies c o d) i el jugador 3 tria matriu (estratègies e, f o g). El primer número a cada casella és el pagament del jugador 1; el segon, el del jugador 2; i el tercer, el del jugador 3. Per exemple, si 1 tria b, 2 tria c i 3 tria g, es produeix la jugada (b, c, g); en aquesta jugada, 1 obté 0, 2 obté 4 i 3 obté 2.

- Considerem les estratègies a i b del jugador 1. Per a determinar si a domina b, cal considerar totes les maneres en què la resta de jugadors poden jugar el joc. Aquestes maneres coincidirien amb les jugades que resultarien si només juguessin els jugadors 2 i 3. Atès que 2 pot triar entre dues estratègies i 3 pot triar entre tres estratègies, els jugadors 2 i 3 poden jugar de sis maneres diferents: (c, e), (c, f), (c, g), (d, e), (d, f) i (d, g), on el primer component identifica l'estratègia del jugador 2 i el segon la del 3. Per a cada jugador, anomenem <u>jugada parcial</u> a cadascuna de les maneres de jugar el joc que tenen els rivals del jugador. Les 6 maneres anteriors serien jugades parcials.

Jugador 1 \ Jugador 2	c	d	c	d	c	d
a	0 1 5	0 0 0	0 3 0	0 2 3	0 2 1	1 1 4
b	1 2 0	0 1 0	0 2 1	0 1 2	0 4 2	0 3 3
Jugador 3	e		f		g	

Fig. 7. Per a què a domini b cal, per a cada fletxa, que el valor inicial sigui més gran que el final

- Per a què a domini b cal que la jugada obtinguda d'afegir a a les sis jugades parcials anteriors proporcioni al jugador 1 un pagament més gran que la jugada obtinguda d'afegir b. De manera equivalent, a domina b si se satisfan sis desigualtats: $p_1(a, c, e) > p_1(b, c, e)$; $p_1(a, c, f) > p_1(b, c, f)$; $p_1(a, c, g) > p_1(b, c, g)$; $p_1(a, d, e) > p_1(b, d, e)$; $p_1(a, d, f) > p_1(b, d, f)$; i $p_1(a, d, g) > p_1(b, d, g)$. Gràficament, es tracta de comprovar que <u>cada</u> número del que surten les fletxes de la Fig. 7 és més gran que el número al que s'adrecen. És obvi que a no domina b. L'estratègia b dominaria a si cada número al que s'adrecen les fletxes fos més gran que cada número del qual surten. Clarament, b no domina a.

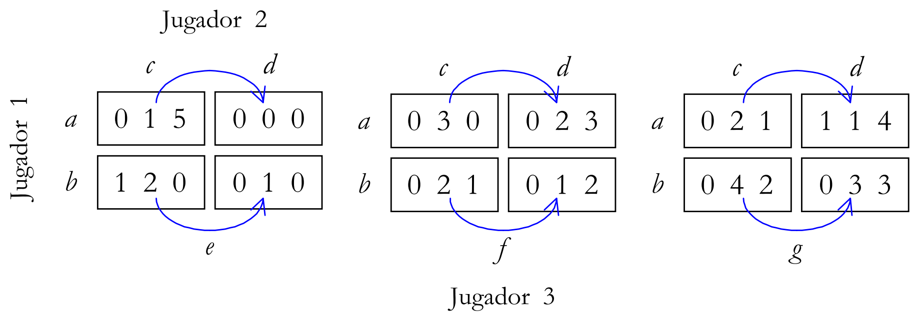


Fig. 8. Per a què c domini d cal, per a cada fletxa, que el valor inicial sigui més gran que el final

- Si considerem les estratègies c i d del jugador, un argument similar mostra que c domina b si se satisfan les 6 desigualtats següents: $p_2(a, c, e) > p_2(a, d, e)$; $p_2(a, c, f) > p_2(a, d, f)$; $p_2(a, c, g) > p_2(a, d, g)$; $p_2(b, c, e) > p_2(b, d, e)$; $p_2(b, c, f) > p_2(b, d, f)$; i $p_2(b, c, g) > p_2(b, d, g)$. La Fig. 8 mostra què signifiquen aquestes condicions gràficament: per a què c domini d cal que, per a <u>tota</u> fletxa, el número del que parteix la fletxa sigui més gran que el número al qual arriba la fletxa. En aquest cas, c domina d: per a <u>cada</u> jugada parcial dels rivals, per al jugador 2 triar c <u>sempre</u> dóna <u>més</u> pagament que triar d.

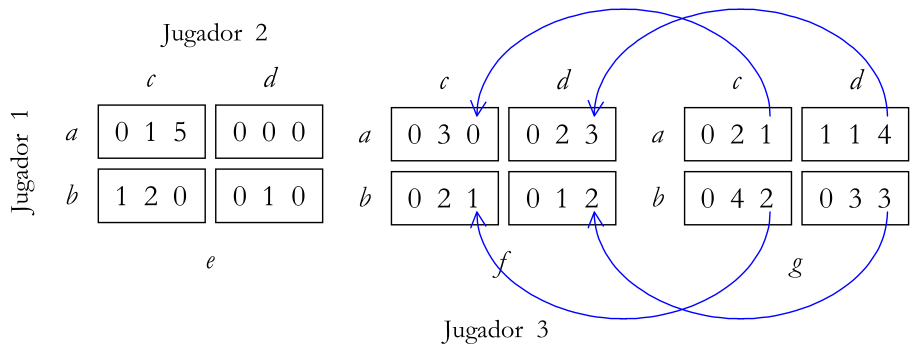


Fig. 9. Per a què g domini f cal, per a cada fletxa, que el valor inicial sigui més gran que el final

- En el cas del jugador 3, triem només dues estratègies; per exemple, f i g. En aquest cas, els rivals de 3 només poden jugar de 4 maneres: les jugades parcials serien (a, c), (a, d), (b, c) i (b, d). Ara, g domina f si se satisfan les 6 desigualtats següents (f domina g si se satisfan les desigualtats inverses): $p_3(a, c, g) > p_3(a, c, f)$; $p_3(a, d, g) > p_3(a, d, f)$; $p_3(b, c, g) > p_3(b, c, f)$; i $p_3(b, d, g) > p_3(b, d, f)$. La Fig. 9 mostra què signifiquen aquestes condicions gràficament: per a què g domini f cal que, per a <u>tota</u> fletxa, el número del que parteix la fletxa sigui més gran que el número al qual arriba la fletxa. És clar que g domina f.

REMARCA 8. Les definicions d'estratègia dominant i dominada donades per a jocs amb 2 jugadors són vàlides per a jocs simultanis amb més de dos jugadors. Les Proposicions 2, 4 i 6 també són vàlides per a jocs amb més de dos jugadors.

Exercicis de la Lliçó 3

1. Comprova que, al joc de la Fig. 1, ni c ni e són estratègies dominades.

2. Demostra la Proposició 2.

3. Al joc de la Fig. 1, modifica un pagament del jugador 2 per a què el jugador 1 tingui una estratègia dominant.

4. Al joc de la Fig. 1, modifica un pagament del jugador 1 per a què el jugador 1 tingui una estratègia dominant.

5. Construeix un joc simultani amb dos jugadors i tres estratègies cadascun on: (i) totes les estratègies d'un dels jugadors són dominants; (ii) totes les estratègies d'un dels jugadors són dominades; (iii) cada jugador té dues estratègies dominades; (iv) un jugador té dues estratègies dominades i l'altre té una de dominant; (v) un jugador té dues estratègies dominades i l'altre només una; (vi) tots dos tenen una estratègia dominada; (vii) tots dos tenen una estratègia dominant; (viii) cap jugador no té cap estratègia dominant però tots dos tenen una de dominada; (ix) cap jugador no té alguna estratègia dominada però tots dos tenen una de dominant; (x) cap jugador no té alguna estratègia dominant.

6. Construeix un joc simultani on un jugador no té cap estratègia dominada i on l'altre jugador té totes les seves estratègies dominades tret d'una.

7. Demostra que no pot ser que totes les estratègies d'un jugador d'un joc simultani siguin estratègies dominades.

8. Obté les estratègies dominants i dominades a cada joc construït als exercicis de la Lliçó 2.

9. Determina totes les estratègies dominants i dominades als següents jocs.

1 \ 2	c	d
a	4 5	4 5
b	4 5	4 5

(i)

1 \ 2	c	d
a	1 1	1 0
b	1 0	0 0

(ii)

1 \ 2	c	d
a	2 5	3 4
b	0 –1	6 0

(iii)

1 \ 2	c	d
a	1 1	1 1
b	1 1	1 1

(iv)

1 \ 2	c	d
a	0 1	4 0
b	2 0	0 3

(v)

1 \ 2	c	d
a	1 4	2 3
b	3 2	4 1

(vi)

10. Determina totes les estratègies dominants i dominades al joc de la Fig. 6 si, a cada casella, es permuten el segon i el tercer pagaments.

Lliçó 4. Una solució per als jocs simultanis basada en la dominància

DEFINICIÓ 1. Un jugador d'un joc es diu <u>racional</u> si tria la seva estratègia amb l'objectiu d'aconseguir el pagament més alt possible.

DEFINICIÓ 2. Una <u>solució</u> per als jocs simultanis és una regla que, assumint els jugadors racionals, assigna a cada joc simultani un conjunt de jugades del joc.

- La interpretació és que el conjunt de jugades que selecciona una solució expressa les formes "raonables" de jugar el joc per part de jugadors racionals.

- Les jugades que selecciona una solució a un joc són la <u>predicció</u> que realitza la solució sobre com jugadors racionals jugaran el joc.

DEFINICIÓ 3. L'<u>eliminació successiva d'estratègies dominades</u> d'un joc simultani consisteix en: (i) per a cada jugador, eliminar <u>totes</u> les seves estratègies dominades; (ii) en el joc que resulta després d'aplicar el pas (i), tornar a eliminar, per a cada jugador, totes les seves estratègies dominades; (iii) en el joc que resulta després d'aplicar el pas (ii), tornar a eliminar, per a cada jugador, totes les seves estratègies dominades; i (iv) així successivament fins que s'obtingui un joc on cap jugador no tingui cap estratègia dominada.

PROPOSICIÓ 4. *L'eliminació successiva d'estratègies dominades pot no eliminar cap estratègia d'un jugador però en cap cas les pot eliminar totes.*

DEFINICIÓ 5. Una jugada d'un joc simultani s'anomena <u>admissible</u> si sobreviu l'eliminació successiva d'estratègies dominades.

EXEMPLE 6. Al joc de la Fig. 1, el jugador 1 no té cap estratègia dominada. En canvi, el jugador 2 en té una: *d*. Si *d* s'elimina, resulta el joc de la Fig. 10. En aquest joc, el jugador 2 no té cap estratègia dominada, però el jugador ara en té una: *b*. Eliminada *b*, s'obté el joc de la Fig. 11. En aquest joc, el jugador 1 només té una estratègia i, per tant, no pot ser dominada. D'altra banda, *e* esdevé una estratègia dominada pel jugador 2. Després d'eliminar *e*, resulta el joc de la Fig. 12, on tots dos jugadors tenen una única estratègia. Això posa fi al procés d'eliminació d'estratègies. En ser la jugada (*a*, *c*) l'única que sobreviu l'eliminació successiva d'estratègies dominades, (*a*, *c*) és l'única jugada admissible del joc de la Fig. 1.

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*e*
a	1 1	9 −1
b	0 5	8 8

Fig. 10. Primera etapa d'eliminació

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*e*
a	1 1	9 −1

Fig. 11. Segona etapa

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*
a	1 1

Fig. 12. Tercera etapa

EXEMPLE 7. Al joc de la Fig. 6, s'eliminarien inicialment *d* i *f*, totes dues alhora. S'obtindria el joc de la Fig. 13, on no es poden eliminar més estratègies. D'aquí resulta que les jugades (*a*, *c*, *e*), (*a*, *c*, *g*), (*b*, *c*, *e*) i (*b*, *c*, *g*) són les jugades admissibles del joc de la Fig. 6.

Jugador 3: *e*

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*
a	0 1 5
b	1 2 0

Jugador 3: *g*

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*
a	0 2 1
b	0 4 2

Fig. 13. Jugades admissibles del joc de la Fig. 6

Jugador 1 \ Jugador 2	*d*	*e*	*f*
a	5 5	0 4	4 7
b	7 1	1 2	5 0
c	6 4	0 2	8 3

Fig. 14

REMARCA 8. <u>Les jugades admissibles constitueixen una solució per als jocs simultanis</u>: la solució que assigna a cada joc el conjunt de les seves jugades admissibles.

- Què justifica considerar com a solució les jugades admissibles? D'entrada, no sembla raonable que les jugades que contenen alguna estratègia dominada siguin escollides per una solució. Per exemple, al joc de la Fig. 1, no sembla raonable que una solució inclogui les jugades (*a*, *d*) o (*b*, *d*), perquè *d* és dominada per *c*. Un jugador racional no faria cas de la recomanació de jugar *d*, atès que *c* és sempre millor que *d*. Per tant, *d* és una estratègia que no hi ha motiu per a triar i eliminar-la no hauria de canviar res per al jugador 2.

- El següent pas del raonament inclou als propis jugadors. Si un jugador sap que els seus oponents són racionals, sap també que no triaran estratègies dominades i, en conseqüència, pot assumir que les estratègies dominades dels oponents són com si no existissin. En el cas del joc de la Fig. 1, si 1 sap que 2 és racional, 1 conclourà que 2 mai no triarà *d* i, així, cap jugada on *d* es juga és, a la pràctica, possible. En particular, 1 sap que no pot aspirar a obtenir el pagament 7, perquè obtenir-lo requereix que 2 es comporti irracionalment triant l'estratègia dominada *d*.

- Els arguments anteriors justifiquen que els jugadors del joc de la Fig. 1 considerin que el joc que realment juguen és el de la Fig. 10. En aquest punt, podem tornar a aplicar el mateix raonament al joc de la Fig. 10. En aquest joc, *b* és dominada i 1 mai no la jugarà. El jugador 2, anticipant això, s'adona que el joc rellevant per a ell és el de la Fig. 11, on *e* és dominada. Tot plegat, condueix a l'única jugada admissible (*a*, *c*).

PROPOSICIÓ 9. *Tot joc simultani té almenys una jugada admissible però també és possible que totes les jugades d'un joc simultani siguin admissibles.*

PROPOSICIÓ 10. *Si un jugador té una estratègia dominant aleshores aquesta és l'única estratègia del jugador que és part d'alguna jugada admissible.*

- *Demostració*. Si un jugador té una estratègia dominant aleshores totes les altres estratègies són dominades i s'eliminen en la primera etapa del procés d'eliminació d'estratègies dominades. Això implica eliminar totes les jugades on no surt l'estratègia dominant del jugador. Com a resultat, per la Proposició 9, totes les jugades admissibles inclouen només l'estratègia dominant del jugador.■

REMARCA 11. Si construïm un joc simultani a l'atzar (amb tants jugadors con vulguem i tantes estratègies per a cada jugador com desitgem), és pràcticament segur que cap jugador no tindrà cap estratègia dominada (ni, per tant, cap estratègia dominant).

- La Remarca 11 evidencia que la solució que defineixen les jugades admissibles no és, en general, de gaire ajuda. La utilitat d'una solució rau en la seva capacitat de simplificar el problema d'elecció d'estratègia dels jugadors. Però si una solució diu que, en un determinat joc, totes les jugades poden succeir, llavors la solució, al menys per a aquell joc, és trivial: tot és solució. Això passa, per exemple, al joc de la Fig. 5, on totes les jugades són admissibles. La Remarca 11 diu que casos com el joc de la Fig. 1 (que només té una jugada admissible i on la solució associada amb les jugades admissibles fa una predicció/recomenació precisa) són excepcionals.

Exercicis de la Lliçó 4

1. Imagina que un jugador té una estratègia dominant. Significa això que totes les jugades on es juga l'estratègia dominant són admissibles? Si no és així, posa un exemple.

2. Obté totes les jugades admissibles dels següents jocs i del joc de la Fig. 14.

1 \ 2	e	f	g	h
a	4 7	0 0	−2 8	9 7
b	5 0	2 3	−1 4	9 3
c	3 1	3 2	3 1	9 0
d	0 0	5 1	0 −1	9 −2

1 \ 2	e	f	g	h
a	0 5	1 1	1 1	2 1
b	1 1	3 0	0 3	1 2
c	0 5	1 1	1 1	2 1
d	2 2	3 6	4 3	1 2

3. Construeix un joc simultani amb tres jugadors i tres estratègies cadascun tal que: (i) hi ha una única jugada admissible; i (ii) a cada etapa del procés d'eliminació d'estratègies dominades s'elimina només una estratègia.

4. Considera el joc (i). (a) Dóna un valor a x que faci que b sigui dominant. (b) Dóna un valor a x que faci que b sigui dominada. (c) Dóna valors a x i y per a què (b, c) sigui l'única jugada admissible. (d) Dóna valors a x i y per a què (b, c) no sigui admissible.

1 \ 2	c	d
a	0 5	1 1
b	x y	3 0

(i)

1 \ 2	c	d
a	1 1	y 1
b	0 x	1 2

(ii)

1 \ 2	c	d
a	x y	y x
b	0 0	1 1

(iii)

5. Contesta a les mateixes preguntes que a l'Exercici 4 però considerant els jocs (ii) i (iii).

6. Dóna valors a x i y als jocs (i), (ii), (iii) per a què: (a) només hi hagi una jugada admissible; (b) només hi hagi tres jugades admissibles; i (c) totes les jugades siguin admissibles.

Lliçó 5. Equilibri de Nash d'un joc simultani

DEFINICIÓ 1. A un joc simultani amb 2 jugadors, i i j, l'estratègia a del jugador i és una millor resposta a l'estratègia b del jugador j si, per a tota estratègia c del jugador i, $p_i(a, b) \geq p_i(c, b)$.

- De manera equivalent, l'estratègia a del jugador i és una millor resposta a l'estratègia b del jugador j si no existeix cap altra estratègia c del jugador i tal que $p_i(c, b) > p_i(a, b)$. Això diu que a és una millor resposta a b si, donat que b es tria, el jugador que tria a no pot augmentar el seu pagament canviant l'estratègia a per una altra estratègia.

- Quan a és una millor resposta a b, mentre b es jugui, el jugador que tria a no necessita considerar jugar una estratègia diferent d'a: si el rival tria b, el jugador que tria a ja aconsegueix, triant a, el màxim pagament que és possible quan es juga b. A la Fig. 1, per exemple, d no és una millor resposta a a: donat a, c dóna més pagament a 2 que d. En canvi, tant c com d són millors respostes a b al joc (ii) de l'Exercici 9 de la Lliçó 3.

PROPOSICIÓ 2. Si l'estràtegia a del jugador i domina l'estratègia b del mateix jugador llavors b no pot ser una millor resposta a cap estratègia del jugador j.

PROPOSICIÓ 3. Si l'estràtegia a del jugador i és una estratègia dominant aleshores a és l'única millor resposta a cada estratègia del jugador j.

DEFINICIÓ 4. Un equilibri de Nash d'un joc simultani amb dos jugadors és una jugada (a, b) tal que: (i) a és una millor resposta a b; i (ii) b és una millor resposta a a.

- Quan es juga una jugada que és un equilibri de Nash cap dels jugadors no augmenta el seu pagament triant una estratègia diferent. Per tant, quan es juga un equilibri de Nash cap dels jugadors no té incentiu a canviar d'estratègia. En aquest sentit, un equilibri de Nash és una jugada estable: donat el que fa el rival, cap jugador no pot augmentar el pagament que obté canviant la seva estratègia de manera unilateral (però és possible que tots dos l'augmentin canviant a la vegada d'estratègia: Fig. 3).

- A la inversa, una jugada que no és equilibri de Nash representa una situació inestable, perquè algun dels jugadors pot augmentar el seu pagament si l'altre jugador tria la seva part de l'equilibri. Això indica que una solució raonable dels jocs simultanis només pot escollir jugades que siguin equilibris de Nash, atès que recomanar una jugada que no ho sigui dóna incentiu a algun jugador a no seguir la recomanació.

REMARCA 5. Per a què una jugada no sigui equilibri de Nash n'hi ha prou que un jugador augmenti el seu pagament canviant d'estratègia quan l'altre jugador juga l'estratègia que li correspon a la jugada; això és, n'hi ha prou que un jugador no estigui jugant una millor resposta a la jugada. En canvi, per a demostrar que una jugada és equilibri de Nash cal comprovar que no hi ha cap jugador que guanyi canviant d'estratègia quan l'altre jugador no canvia; això és, cal demostrar que tots els jugadors estan jugant una millor resposta. En resum, és més fàcil mostrar que una jugada no és un equilibri de Nash que mostrar que és un equilibri de Nash.

EXEMPLE 6. És la jugada (b, e) del joc de la Fig. 1 un equilibri de Nash? Per a ser-ho, cal: (i) que, donat b, el jugador 2 no augmenti el seu pagament reemplaçant e per una altra estratègia; i (ii) que, donat e, el jugador 1 no augmenti el seu pagament reemplaçant b per una altra estratègia. D'una banda, donat b, el jugador 2 no augmenta el seu pagament canviant d'estratègia: si 2 tria c, obté el pagament $p_2(b, c) = 5$; si tria d, obté $p_2(b, d) = 3$; i si tria e, obté $p_2(b, e) = 8$. Per tant, e és millor resposta a b i es compleix la condició (i). D'altra banda, b no és millor resposta a e, atès que $p_1(a, e) = 9 > 8 = p_1(b, e)$. Així, la condició (ii) no es compleix i (b, e) no és equilibri de Nash: tot i que e és el millor que 2 pot fer en resposta a b, b no és el millor que 1 pot fer en resposta a e.

- El fet que (b, e) no sigui un equilibri de Nash implica que, si els jugadors es posessin d'acord sobre com jugar el joc, difícilment acordarien jugar (b, e): si 1 expecta que 2 jugui e, el millor per a 1 no és triar b sinó a. Això fa que el jugador 1 no tingui incentiu a respectar el possible acord de jugar (b, e). Si un tal acord entre 1 i 2 sobre què jugar ha de ser estable, és necessari que sigui un equilibri de Nash.

EXEMPLE 7. La jugada (a, c) del joc de la Fig. 1 és un equilibri de Nash. En primer lloc, a és una millor resposta a c: si 1 canvia d'a a b mentre 2 juga c, el pagament d'1 disminueix d'1 a 0. I, en segon lloc, c és una millor resposta a a: si 2 canvia de c a d mentre 1 juga a, el pagament de 2 disminueix d'1 a 0; i si 2 canvia de c a e mentre 1 juga a, el pagament de 2 disminueix d'1 a –1. En resum: donat a, 2 no té incentiu a triar una estratègia diferent de c i, donat c, 1 no té incentiu a triar una estratègia diferent d'a. A la jugada (a, c), cada jugador està triant el millor donat el que fa l'altre, que és el que defineix un equilibri de Nash.

PROPOSICIÓ 8. *No tot joc simultani amb dos jugadors té algun equilibri de Nash* (Fig. 18).

- La Proposició 8 assenyala una limitació del concepte d'equilibri de Nash: un joc simultani pot no tenir cap equilibri de Nash. Aquest tret diferencia la solució basada en els equilibris de Nash de la solució basada en les jugades admissibles, ja que tot joc simultani té almenys una jugada admissible.

PROPOSICIÓ 9. *Hi ha jocs simultanis amb 2 jugadors que tenen més d'un equilibri de Nash* (Fig. 5).

- La Proposició 9 mostra una segona limitació del concepte d'equilibri de Nash: per a jocs simultanis on existeix algun equilibri de Nash, l'equilibri no és sempre únic. Aquest és un tret en comú amb la solució basada en les jugades admissibles.

PROPOSICIÓ 10. *Els pagaments de tots els jugadors a una jugada que no és equilibri de Nash d'un joc simultani amb 2 jugadors poden ser superiors als seus pagaments a un equilibri de Nash del mateix joc.*

- *Demostració*. L'únic equilibri de Nash del joc de la Fig. 3 és la jugada (A, A). Però en aquesta jugada tots dos jugadors obtenen un pagament més petit que a la jugada (N, N), que no és equilibri de Nash.■

- Per la Proposició 10, un equilibri de Nash no garanteix arribar a un "bon" resultat des d'un punt de vista col·lectiu.

PROPOSICIÓ 11. *Tot equilibri de Nash d'un joc simultani amb 2 jugadors és una jugada admissible*.

- *Demostració*. Sigui $s = (s_i, s_j)$ un equilibri de Nash d'un joc amb jugadors i i j. Hi ha dues alternatives: o bé s sobreviu l'eliminació successiva d'estratègies dominades o bé s no sobreviu l'eliminació. Suposem que no sobreviu. Si derivem una contradicció d'aquesta assumpció, provarem que la segona opció no és possible i, per tant, quedarà només la primera i haurem demostrat el que volem: si s és equilibri de Nash, aleshores s sobreviu l'eliminació i, en conseqüència, s és una jugada admissible. Però si s no sobreviu l'eliminació és perquè per a algun dels jugadors, sigui per exemple el jugador i, l'estratègia s_i que i juga a la jugada s és dominada per alguna altra estratègia a del jugador i. Això implica que, donada l'estratègia s_j de j a la jugada s, triar a és millor per a i que triar s_i. D'aquí resulta que s_i no és millor resposta a s_j i, per tant, s no és un equilibri de Nash, contradient-se la hipotèsi que s és un equilibri de Nash.■

PROPOSICIÓ 12. *No tota jugada admissible d'un joc simultani amb 2 jugadors és equilibri de Nash*.

- *Demostració*. Al joc de cara i creu (Fig. 18) cap jugador no té estratègies dominades. Així, totes les jugades són admissibles. Però el joc no té cap equilibri de Nash. Per tant, ser una jugada admissible no implica ser un equilibri de Nash.■

- La Proposició 12 fa evident que la solució basada en els equilibris de Nash és un refinament de la solució basada en les jugades admissibles: per a tot joc simultani amb dos jugadors, els equilibris de Nash són un subconjunt de les jugades admissibles. Per tant, els equilibris de Nash representen una solució més exigent (imposa més condicions per a què una jugada sigui solució) que les jugades admissibles.

REMARCA 13. S'han proposat moltes més solucions per als jocs simultanis, però pràcticament totes elles són refinaments de l'equilibri de Nash, que ha servit de punt de partida per a definir solucions més restrictives (= que seleccionen menys jugades com a raonables). D'altra banda, hi ha certs jocs molt simples que han servit per a posar a prova certes propietats que sembla raonable exigir a una solució. A continuació es presenten un quants d'aquests jocs.

EXEMPLE 14. El joc de cara i creu, Fig. 18. Dos jugadors decideixen alhora si mostrar la cara o la creu d'una moneda. Si les monedes mostren el mateix, el jugador 1 se les emporta; si no, se les emporta 2. Aquest joc no té cap equilibri de Nash: si 1 tria cara, el millor per a 2 és mostrar creu; però si 2 mostra creu, el millor per a 1 és mostrar creu; però si 1 mostra creu, el millor per a 2 és mostrar cara; però si 2 mostra cara, el millor per a 1 és mostrar cara; però 1 si tria cara…
http://en.wikipedia.org/wiki/Matching_pennies

EXEMPLE 15. La batalla dels sexes, Fig. 19. Ell, reusenc, i ella, tarragonina, han de decidir si passar el diumenge al Nou Estadi veient com perd el Nàstic o gaudint d'una obra al Teatre Bartrina. Com viuen a ciutats diferents, van acordar amb antelació on es trobarien. Però arriba diumenge i ningú no se'n recorda del que van acordar. Tots dos prefereixen estar junts (ja sigui al futbol o al teatre) a estar separats, però ell prefereix estar junts al futbol i ella junts al teatre.
http://en.wikipedia.org/wiki/Battle_of_the_sexes_%28game_theory%29

EXEMPLE 16. El dilema del presoner, Fig. 20. La policia ha detingut dos sospitosos de cometre un crim, que són separats i informats que si només un acusa l'altre, l'acusat rebrà la pena màxima (9 anys de presó) i l'acusador serà absolt; que si cap no acusa, sobre tots dos recaurà la pena inferior (1 any); i que si tots dos s'acusen, suportaran una pena intermèdia (4 anys).
http://en.wikipedia.org/wiki/Prisoner%27s_dilemma

EXEMPLE 17. El joc del gallina, Fig. 21. Hi ha un estudiant a un extrem del passadís principal d'una facultat i un segon estudiant a l'altre extrem. Engegen a córrer l'un contra l'altre i han de decidir si ser valents (i mantenir rumb de col·lisió) o ser cobards (i apartar-se). El millor resultat per a cada un és ser valent i que l'altre sigui cobard; si això no pot ser, el millor és que tots dos siguin cobards; i el pitjor de tot és que tots dos siguin valents i s'esclafin els caps en el xoc.
http://en.wikipedia.org/wiki/Chicken_%28game%29

EXEMPLE 18. El joc de la caça, Fig. 22 (*Jean-Jacques Rousseau*). Dos caçadors decideixen si anar a caçar un cérvol o una llebre. Un caçador no necessita ajuda per a caçar tot sol una llebre, però necessita la col·laboració de l'altre caçador per a caçar un cérvol. Aquest joc té en comú amb el joc del gallina que la mateixa estratègia pot portar tant al millor com al pitjor pagament.
http://en.wikipedia.org/wiki/Stag_hunt

- El joc de la caça il·lustra el conflicte que hi ha entre dues propietats desitjables de les solucions (i, en especial, de les solucions basades en els equilibris de Nash). La propietat 1 estableix que les jugades que siguin solució han d'atorgar als jugadors el màxim pagament possible. La propietat 2 estableix que les jugades que siguin solució no han de ser "arriscades".

- El joc de la caça té dos equilibris de Nash: (*cérvol*, *cérvol*) i (*llebre*, *llebre*). El primer expressa cooperació entre els caçadors; el segon, no cooperació. La propietat 1 portaria a escollir com a solució el primer equilibri, perquè tots dos jugadors obtenen un pagament més gran al primer que al segon equilibri. Però la propietat 2 portaria a escollir com a solució el segon equilibri, perquè amb l'estratègia *cérvol* cada jugador s'arrisca a obtenir el pitjor pagament (0), mentre que amb l'estratègia *llebre* cada jugador s'assegura un pagament intermedi (2). La recomanació basada en la propietat 2 esdevé més defensable com més proper estigui el pagament intermedi al superior i més distància hi hagi entre els pagaments superior e inferior (per exemple, si reemplacem els pagaments 2 i 3 per, respectivament, 999.999 i 1 milió).

EXEMPLE 19. El joc de la coordinació, Fig. 23. Alguns dels jocs anteriors (com la batalla dels sexes) es poden veure com a jocs de coordinació. El de la Fig. 23 és un joc de coordinació pur en el sentit que no hi ha conflicte perquè un jugador prefereixi un equilibri a un altre. El joc de la Fig. 23 té autèntic interès quan els jugador no poden prèviament comunicar-se.
http://en.wikipedia.org/wiki/Coordination_game

DEFINICIÓ 20. Quan hi ha més de 2 jugadors, una estratègia a d'un jugador i és una millor resposta a la jugada parcial b de la resta de jugadors del joc si, per a tota estratègia c del jugador i, $p_i(a, b) \geq p_i(c, b)$.

- Per exemple, al joc de la Fig. 6, l'estratègia b del jugador 1 no és una millor resposta a la jugada parcial (d, g) dels jugadors 2 i 3, perquè si 2 i 3 trien (d, g) és millor per al jugador 1 triar a (i emportar-se el pagament 1 de la jugada resultant (a, d, g)) que triar b (cas en què 1 s'emporta el pagament 0 resultant de la jugada (b, d, g)). En canvi, b sí és una millor resposta a (c, g), perquè $p_3(b, c, g) = p_3(a, c, g) = 0$: el màxim pagament que el jugador 1 pot assolir quan els rivals juguen (c, g) s'aconsegueix triant tant b com a.

- Tanmateix, es pot definir que l'estratègia a del jugador i és una millor resposta a la jugada parcial b de la resta de jugadors si no existeix cap estratègia c del jugador i tal que $p_i(c, b) > p_i(a, b)$. Amb aquesta definició equivalent, b al joc de la Fig. 6 és una millor resposta a (c, g) perquè canviant de b a una altra estratègia (en aquest joc, només és possible canviar a a), el pagament d'1 no augmenta.

DEFINICIÓ 21. Amb més de 2 jugadors, un equilibri de Nash d'un joc simultani és una jugada tal que cada estratègia de la jugada és una millor resposta a la resta d'estratègies de la jugada.

- Per exemple, la jugada (b, c, g) de la Fig. 6 és un equilibri de Nash perquè se satisfan 3 condicions. Primer, b és una millor resposta a (c, g). Segon, c és una millor resposta a (b, g). I tercer, g és una millor resposta a (b, c). Per tant, si els jugadors estiguessin d'acord en jugar (b, c, g), cap d'ells no incrementaria el seu pagament canviant d'estratègia mentre els altres dos mantinguessin les seves estratègies a la jugada.

REMARCA 22. Les Proposicions 2, 3, 8, 9, 10, 11 i 12 són totes vàlides per a jocs simultanis amb més de 2 jugadors.

1 \ 2	*cara*	*creu*
cara	1 −1	−1 1
creu	−1 1	1 −1

Fig. 18. Joc de cara i creu

ell \ *ella*	*futbol*	*teatre*
futbol	3 1	0 0
teatre	0 0	1 3

Fig. 19. Batalla dels sexes

1 \ 2	*acusar*	*callar*
acusar	−4 −4	0 −9
callar	−9 0	−1 −1

Fig. 20. Dilema del presoner

1 \ 2	*valent*	*cobard*
valent	−2 −2	1 −1
cobard	−1 1	0 0

Fig. 21. Joc del gallina

1 \ 2	*cérvol*	*llebre*
cérvol	3 3	1 2
llebre	2 1	2 2

Fig. 22. Joc de la caça

1 \ 2	*c*	*d*
a	1 1	0 0
b	0 0	1 1

Fig. 23. Joc de coordinació

Exercicis de la Lliçó 5

1. Pot una estratègia dominant ser part d'un equilibri de Nash? I una estratègia dominada?

2. Implica un equilibri de Nash que cada jugador obté el pagament més gran que té al joc?

3. Demostra les Proposicions 2 i 3. Demostra les Proposicions 8 i 9 quan hi ha 3 jugadors.

4. Calcula els equilibris de Nash dels jocs de les Figs. 3, 5, 6, 14 i 18-23; dels jocs de l'Exercici 9 de la Lliçó 3; i dels jocs de l'Exercici 2 de la Lliçó 4.

5. Hi ha algun joc simultani on tots els jugadors rebin el pagament més petit a algun equilibri de Nash? I el més gran? Construeix exemples en cas de resposta afirmativa.

Lliçó 6. Com es calculen tots els equilibris de Nash d'un joc simultani?

Hi ha almenys dues maneres de calcular els equilibris de Nash d'un joc simultani.

• **Procediment 1.** Es procedeix jugada a jugada comprovant si la jugada satisfà les condicions per a ser un equilibri de Nash. Les jugades que no satisfacin alguna de les condicions es van marcant. Al final de procés, les jugades no marcades són els equilibris de Nash. Aquest procediment és més útil quan el joc té relativament poques jugades.

• **Procediment 2.** Es procedeix jugador a jugador: fixades successivament les estratègies dels altres jugadors, marquem les jugades en què el jugador no està fent una millor resposta a les estratègies fixades del altres. Les jugades marcades no poden ser equilibris de Nash. La diferència amb l'altre procediment és que, d'una tacada, es poden eliminar moltes jugades com a candidats a equilibris de Nash. No cal procedir fins a l'últim jugador perquè és possible que, després de considerar uns quants jugadors, el nombre de jugades que són candidates a ser equilibri de Nash sigui prou reduït com per a aplicar el Procediment 1.

EXEMPLE 1. Calculem els equilibris de Nash del joc de la Fig. 1 seguint el procediment 1. Hi ha 6 jugades. Es poden considerar en qualsevol ordre. Jugada 1: (*b*, *e*). Aquesta jugada no és equilibri de Nash perquè *b* no és millor resposta a *e*. Descobert aquest fet ja no cal comprovar si *e* és millor resposta a *b*: ho sigui o no, (*b*, *e*) no pot ser equilibri de Nash. Jugada 2: (*b*, *d*). No és equilibri de Nash perquè *d* no és millor resposta a *b*. Jugada 3: (*b*, *c*). No és equilibri de Nash tant perquè *c* no és millor resposta a *b* com perquè *a* no és millor resposta a *c*. Jugada 4: (*a*, *e*). No és equilibri de Nash perquè *e* no és millor resposta a *a*. Jugada 5: (*a*, *d*). No és equilibri de Nash tant perquè *d* no és millor resposta a *a* com perquè *a* no és millor resposta a *d*. Jugada 6: (*a*, *c*). És equilibri de Nash perquè *a* és millor resposta a *c* i, a la vegada, *c* és millor resposta a *a*.

EXEMPLE 2. Tornem a calcular els equilibris de Nash del joc de la Fig. 1 però seguint el procediment 2. És més convenient començar pel jugador 2 (per què?) i fixar les estratègies del jugador 1. Fixem *a*. Trobem les millors respostes a *a*. Només n'hi ha una: *c*. Per tant, descartem (*a*, *d*) i (*a*, *e*) com a equilibris de Nash, tal i com s'indica a la Fig. 24. Ara fixem *b*. Atès que la millor resposta a *b* és *e*, descartem (*b*, *c*) i (*b*, *d*) com a equilibris de Nash. La Fig. 25 mostra que, després de considerar el jugador 2, només hi ha dues jugades que poden ser equilibris de Nash. Ara procedim amb el jugador 1, fixant les estratègies del jugador 2. No cal preocupar-se per fixar *d*, perquè hem descobert que no hi ha cap equilibri de Nash on es jugui *d*. Si fixem *e*, la millor resposta és *a*. Per tant, descartem la jugada (*b*, *e*). I si fixem *c*, *a* és la millor resposta. Donat que (*a*, *c*) és l'única jugada no marcada, (*a*, *c*) és l'únic equilibri de Nash del joc.

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*d*	*e*
a	1 1	~~0 0~~	~~9 –1~~
b	0 5	7 3	8 8

Fig. 24

Jugador 1 \ Jugador 2	*c*	*d*	*e*
a	1 1	~~0 0~~	~~9 –1~~
b	~~0 5~~	~~7 3~~	8 8

Fig. 25

EXEMPLE 3. Calculem els equilibris de Nash del joc de la Fig. 6 seguint el procediment 2. Comencem pel jugador 3 (en general, no és indiferent per quin jugador començar: amb uns es poden eliminar més jugades que amb d'altres). Fixem una jugada parcial que involucri els altres jugadors, 1 i 2. Aquestes jugades parcials són 4: (*a*, *c*), (*a*, *d*), (*b*, *c*) i (*b*, *d*). Són justament les jugades parcials que es troben a cadascuna de les tres matrius.

- Comencem per (*a*, *d*), jugada parcial que pot associar-se amb la casella superior dreta de cada matriu, perquè totes les jugades on es juga *a* i *d* es troben a la casella superior dreta de les tres matrius. La millor resposta a (*a*, *d*) és *g*, ja que $p_3(a, d, g) = 4 > 3 = p_3(a, d, f)$ i $p_3(a, d, g) = 4 > 0 = p_3(a, d, e)$. Per tant, eliminem com a candidats a equilibri de Nash les jugades (*a*, *d*, *e*) i (*a*, *d*, *f*), identificades a la Fig. 26 amb ①.

- Continuem amb (*b*, *d*), jugada parcial que pot associar-se amb la casella inferior dreta de cada matriu. La millor resposta a (*b*, *d*) és *g*. Per aquest motiu, eliminem les jugades (*b*, *d*, *e*) i (*b*, *d*, *f*), identificades a la Fig. 26 amb ②.

- Prosseguim amb (*b*, *c*), jugada parcial que pot associar-se amb la casella inferior esquerra de cada matriu. La millor resposta a (*b*, *c*) és *g*. Així, eliminem les jugades (*b*, *c*, *e*) i (*b*, *c*, *f*), identificades a la Fig. 26 amb ③.

- Finalitzem amb (*a*, *c*), jugada parcial que pot associar-se amb la casella superior esquerra de cada matriu. La millor resposta a (*a*, *c*) és *e*. Això implica eliminar les jugades (*a*, *c*, *f*) i (*a*, *c*, *g*), identificades a la Fig. 26 amb ④.

- Les jugades no marcades a la Fig. 26 són els candidats a ser equilibri de Nash un cop s'han considerat les restriccions que imposa el jugador 3. Podríem prosseguir amb els jugadors 1 i 2, però com que només hi ha 4 jugades, pot aplicar-se el Procediment 1. L'únic equilibri de Nash és (*b*, *c*, *g*): a (*a*, *c*, *e*) i (*b*, *d*, *g*) el jugador 1 no tria una millor resposta; i a (*a*, *d*, g) és el jugador 2 que no tria una millor resposta.

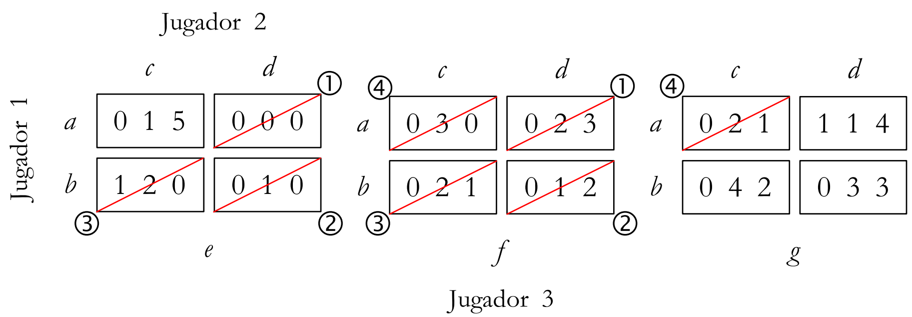


Fig. 26. Eliminant candidats a ser equilibri de Nash

Exercicis de la Lliçó 6

1. Representa cadascuna de les següents situacions com a joc simultani i obté els equilibris de Nash.

(i) Dues empreses rivals decideixen si fer o no una campanya de publicitat. Si una empresa fa la campanya i l'altra no, qui la fa duplica el benefici que té quan ningú no fa publicitat i qui no la fa obté la quarta part del benefici que té quan ningú no fa publicitat. Si les dues fan publicitat, el benefici de cadascuna és la meitat del benefici que tenen quan ningú no fa publicitat.

(ii) Un nou mercat d'un servei s'acaba de crear i les dues primeres empreses que hi formen part han de decidir, ignorant el que decideix la rival, si establir un preu alt o un preu baix del servei. Si totes dues fixen un preu baix, el benefici de cadascuna és 0; si és alt, totes dues obtenen un benefici d'1; i si una fixa un preu alt i l'altra un preu baix, qui fixa el preu alt té un benefici negatiu i qui fixa el preu baix duplica el benefici obtingut quan tothom fixa un preu alt.

(iii) Un país només té dues cadenes de televisió, Puf i Paf, que han de decidir si programar, en una determinada franja horària, esports o pel·lícula. Si ambdues programen esports, Paf s'emporta el 60% de l'audiència i Puf el 40% restant. Si programen pel·lícula, el resultat s'inverteix. Si Paf programa pel·lícula i Puf esports, Paf aconsegueix el 55%. En el cas restant, l'audiència es reparteix al 50%.

(iv) El professor P s'ha de sotmetre a una enquesta docent que respon el delegat D del curs. P pot ser dur o tou amb els estudiants i D pot revelar una opinió favorable o desfavorable. D prefereix que P sigui tou a dur i, sigui P dur o tou, prefereix donar una opinió favorable. P prefereix que D manifesti una opinió favorable a una desfavorable i, sigui favorable o no, prefereix ser dur a tou.

2. <u>Política antiterrorista</u> (Jack Hirshleifer i Amihai Glazer). La política tradicional del país P ha estat no cedir al xantatge de terroristes. Un grup terrorista ha segrestat ciutadans de P i exigeix al govern de P el pagament d'un rescat, al·legant que si el govern no paga, assassinaran els segrestats. El grup decideix, ignorant què farà el govern de P, si allibera o assassina els segrestats. El govern de P ha de decidir, ignorant què farà el grup terrorista, si pagar o no. El govern prefereix primer de tot l'alliberament dels ciutadans i, en segon lloc, prefereix no pagar a pagar. Obté els equilibris de Nash en els següents casos.

(a) Els terroristes prefereixen no complir a complir l'amenaça (prefereixen alliberar a assasinar) però sempre prefereixen rebre el pagament a no rebre'l.

(b) El terroristes prefereixen obtenir el pagament a no rebre'l i, passi el que passi, prefereixen liquidar els segrestats a no fer-ho.

(c) Com a (b) amb la diferència que els terroristes prefereixen alliberar els segrestats a liquidar-los.

3. Hi ha un professor i dos estudiants (ell i ella). Ell decideix si copiar o no d'ella durant un examen. Ella decideix si es deixa copiar o no. El professor decideix si posa o no un parany a l'examen per a descobrir si algú ha copiat. Ella obté un 9 a l'examen tret del casos on el professor posa un parany i ell copia; en aquests casos, ella obté un 0. Ell obté un 0 excepte en tres casos: si no copia i el professor posa el parany; si copia quan ella es deixa i el professor no posa el parany; i si no copia quan ella no es deixa i el professor no posa el parany. En aquests tres casos, ell obté un 5. El pagament més alt per al professor resulta quan: posa el parany, ell copia i ella es deixa; i no el posa i ell no copia. El pagament més baix del professor l'obté quan posa el parany, ell copia i ella no es deixa. A la resta de casos, el professor obté un pagament intermedi.

4. Al darrer segon d'un partit de futbol un davanter ha de llençar un penal: a la dreta, a l'esquerra o al centre. El porter ha de decidir si llençar-se a la dreta, a l'esquerra o al centre. Hi ha gol si el xut no es llença en la mateixa direcció que es llença el porter. Considera els 4 casos següents:

(i) abans de llençar-se el penal, el resultat és 0-0;
(ii) 1-0 a favor de l'equip del porter;
(iii) 0-1 a favor de l'equip del davanter; i
(iv) 2-0 a favor de l'equip del porter.

5. A un episodi de la temporada 2 de la sèrie "Criminal minds" un home segresta tres noies i diu que les matarà a totes si alguna d'elles no lleva la vida a alguna altra.

6. Troba un joc simultani amb tres jugadors i dues estratègies cadascun que:

(i) no tingui cap equilibri de Nash;
(ii) només tingui un equilibri de Nash;
(iii) tingui més jugades admissibles que equilibris de Nash; i
(iv) tingui menys jugades admissibles que equilibris de Nash.

7. Troba els equilibris de Nash dels jocs dels exercicis de la Lliçó 2.

8. Considera els jocs (i), (ii) i (iii) de l'Exercici 4 de la Lliçó 4.

- *A (i), determina un valor d'x i un altre d'y que facin que (c, d) sigui equilibri de Nash. Fes el mateix per a què (c, d) no sigui equilibri de Nash.*
- *A (ii), determina un valor d'x que faci que (b, c) sigui equilibri de Nash i un altre que faci que no ho sigui.*
- *A (ii), determina un valor d'y que faci que (a, d) sigui equilibri de Nash i un altre que faci que no ho sigui.*
- *A (iii), determina un valor d'x i un altre d'y que facin que: (a) (a, c) sigui equilibri de Nash i (a, d) no ho sigui; (b) (a, c) no sigui equilibri de Nash i (a, d) sí que ho sigui; (c) (a, c) i (a, d) no siguin equilibris de Nash; i (d) (a, c) i (a, d) siguin tots dos equilibris de Nash.*

9. Representa com a joc simultani el joc de pedra, paper i tisores. Troba els equilibris de Nash.

10. Representa com a joc simultani el joc de pedra, paper i tisores amb 3 jugadors. Troba els equilibris de Nash.

11. És possible que a un joc simultani totes les jugades siguin equilibri de Nash? Cas que sí, indica un exemple.

Lliçó 7. Què és un joc seqüencial?

Un joc simultani s'entén que representa situacions on l'ordre en què els jugadors juguen no té cap rellevància: en la mesura que cap jugador no sap si els altres han jugat, que un triï abans o després és irrellevant. De fet, a un joc simultani és *com si* els jugadors decidissin simultàniament i d'aquí el nom de joc simultani.

Els jocs seqüencials incorporen com a element que descriu la situació de presa de decisions interdependents l'ordre temporal en què aquestes decisions es produeixen. La inclusió de l'ordre en què els jugadors juguen pot crear una diferència substancial en el joc. Per exemple, quan s'ha de llençar un penal, no és el mateix que davanter i porter hagin de decidir al mateix temps on xutar la pilota i on llençar-se, respectivament, que un dels dos sàpiga què ha fet l'altre i aleshores prengui la decisió. Justament, en el procés de llençament d'un penal, porter i davanter intenten que l'altre s'avanci en la decisió i aconseguir així l'avantatge que els porti a aconseguir el resultat més favorable.

La definició formal de joc seqüencial és més complexa que la d'un joc simultani, perquè a més d'especificar en quin ordre juguen els jugadors cal indicar, per a cada jugador, quines decisions observa dels que han jugat abans. En la resta de lliçons es considerarà un tipus particular de joc seqüencial. I com als jocs simultanis, se suposarà que els jugadors són racionals.

DEFINICIÓ 1. Un joc seqüencial és amb informació perfecta si, en el moment de decidir què jugar, un jugador sap què han jugat tots els jugadors que han jugat abans que ell. D'ara endavant, "joc seqüencial" voldrà dir "joc seqüencial amb informació perfecta".

En comptes de presentar la definició formal d'un joc seqüencial, és més convenient explicar com és seguint un exemple. La Fig. 27 mostra la representació gràfica d'un joc seqüencial.

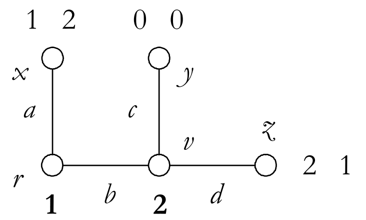


Fig. 27. Exemple d'un joc seqüencial

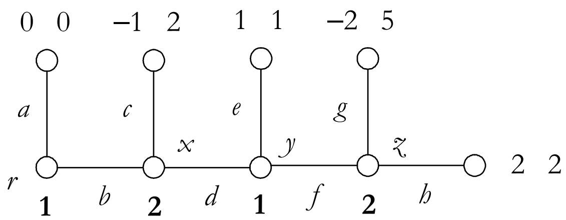


Fig. 28. Un altre joc seqüencial

- Un joc seqüencial es representa mitjançant una seqüència ordenada de nodes en forma d'arbre. Cada node indica un moment del temps. Els nodes del joc a la Fig. 27 es representen mitjançant cercles. Hi ha dos tipus de nodes: els de decisió i els terminals.

- Els nodes de decisió representen moments del temps on algun jugador ha de prendre una decisió. A la Fig. 27, els nodes de decisió són r i v. El joc comença a un node inicial, anomenat arrel del joc. A la Fig. 27, el node r és l'arrel. Cada node de decisió s'assigna a un jugador, que és el jugador que ha de prendre una decisió al node. L'arrel s'ha assignat al jugador 1 i el node v al jugador 2.

- De cada node de decisió surten branques que connecten aquest node amb altres nodes. Cada branca que surt d'un node s'anomena acció i identifica una decisió que es pot prendre al node. El jugador assignat a un node només pot escollir una de les accions disponibles al node. A la Fig. 27, del node r surten dues branques, anomenades a i b. Per tant, el joc s'inicia al node r, on el jugador 1 juga primer i ha de triar una de dues accions, a o b. El segon node de decisió, el node v, s'assigna el jugador 2, que ha de triar una de dues accions, c o d. Observa que 2 juga només si 1 tria b.

- Els nodes que no són de decisió s'anomenen nodes terminals. Els nodes terminals assenyalen el final del joc. A la Fig. 27, els nodes terminals són x, y i z. El que distingeix els nodes terminals dels de decisió és que els terminals no estan assignats a cap jugador, perquè als nodes terminals no cal prendre cap decisió. Cada node terminal té assignat números. Aquests números són els pagaments de tots els jugadors. Seguint la convenció dels jocs simultanis, el primer número expressa el pagament del jugador 1 i el segon, el pagament del jugador 2. Així, nodes de decisió, nodes terminals, accions, jugadors i pagaments defineixen un joc seqüencial.

- La interpretació del joc de la Fig. 27 és la següent. El node r representa el moment d'inici del joc. Atès que r s'assigna al jugador 1, el jugador 1 és el primer en prendre una decisió: o tria l'acció a o tria l'acció b. Si tria l'acció a, s'arriba al node terminal x, on el joc s'acaba i es generen els pagaments per a tots jugadors, hagin jugat o no. A la Fig. 27, si el jugador 1 tria l'acció a al node r, el jugador 1 rep el pagament 1 i el jugador 2 rep el pagament 2. En canvi, si 1 tria l'acció b al node r, s'arriba al node de decisió v i, per conseguënt, el joc continua. Atès que el jugador 2 està assignat al node v, 2 ha de prendre una decisió: o tria l'acció c o tria l'acció d. Totes dues accions posen fi al joc, ja que totes dues accions condueixen a un node terminal. Si 2 tria c, s'arriba al node terminal y i tots dos jugadors obtenen un pagament de 0. Per contra, si 2 tria d, s'arriba al node terminal z, on el jugador 1 rep 2 i el jugador 2 rep 1.

REMARCA 2. A un joc simultani, cada jugador juga i, a més, juga només un cop. A un joc seqüencial, no sempre tots els jugadors juguen i és possible que un jugador jugui més d'un cop.

- Al joc de la Fig. 27, si 1 tria a al node r, el joc s'acaba i 2 no juga. Al joc de la Fig. 28, si 1 tria b a r i, a continuació, 2 tria d a x, s'arriba al node de decisió y, on 1 torna a jugar.

DEFINICIÓ 3. Una acció d'un jugador a un joc seqüencial és tota decisió que pot ser presa a un node de decisió (cadascuna d'aquestes decisions està associada amb una branca al node de decisió).

DEFINICIÓ 4. Una estratègia d'un jugador a un joc seqüencial és una assignació d'una acció a cada node de decisió del jugador. Per tant, si a un jugador li corresponen n nodes, una estratègia serà per a ell una seqüència d'n accions: un pla que indica què triar a cada node.

- Al joc de la Fig. 27, el jugador 1 té assignat només un node. El jugador tindrà tantes accions com branques surtin del node. Així, {*a*, *b*} és el conjunt d'accions del jugador 1. En canvi, al joc de la Fig. 27, 1 té assignats dos nodes, *r* i *y*. El seu conjunt d'accions és la unió de les accions a cada node: {*a*, *b*, *e*, *f*}.

- Atès que el jugador 1 del joc de la Fig. 27 té només un node, el conjunt d'estratègies del jugador 1 serà el conjunt de maneres de triar accions al node. Això fa que el conjunt d'estratègies d'1 sigui {*a*, *b*}. D'altra banda, en tenir el jugador 1 del joc de la Fig. 28 dos nodes, *r* i *y*, el conjunt d'estratègies d'1 consisteix en el conjunt de maneres de triar accions als dos nodes. Una estratègia indicarà què triar al node *r* i què triar al node *y*. Cada estratègia pot representar-se mitjançant un parell d'accions (α, β), on α és una acció a un node del jugador i β és una acció a l'altre node del jugador. Així, el conjunt d'estratègies d'1 al joc de la Fig. 28 consta de quatre elements, que són (*a*, *e*), (*a*, *f*), (*b*, *e*) i (*b*, *f*). Les estratègies del tipus (α, β) de vegades s'abreujaran com αβ.

REMARCA 5. Quan un jugador d'un joc seqüencial només té assignat un node, el seu conjunt d'accions és igual al seu conjunt d'estratègies.

- Una estratègia és un pla d'acció total a un joc. Cada estratègia d'un jugador indica què triaria el jugador a cadascun dels seus nodes, s'arribi al node o no. Una estratègia diu al jugador què fer en cada possible situació en què es pugui trobar el jugador. Atès que hi ha situacions que no s'esdevindran, en general hi haurà parts d'una estratègia que no s'hauran (ni es podran) implementar.

- Per exemple, un estudiant pot tenir decidit a l'inici d'un curs de Microeconomia I què fer si aprova i què fer si no aprova: si aprova, se'n va de vacances; si no, es queda a casa estudiant. Aquest pla que cobreix totes les contingències és una estratègia. Naturalment, després només una de les dues possibilitats es realitzarà i, per consegüent, només una part de l'estratègia "es jugarà": o anar-se'n o quedar-se.

- Als jocs simultanis, una estratègia és un pla que sempre s'executa completament. Als seqüencials, una estratègia és un pla format per un seguit de decisions potencials, algunes d'elles portades a la pràctica i d'altres que no es podran executar.

- Considerem l'estratègia (*a*, *f*) del jugador 1 al joc de la Fig. 28. Un podria preguntar-se: per què planejar què faràs al node *y* si abans prens una acció, l'acció *a*, que fa impossible arribar al node *y*? La raó és que per a què el jugador 1 triï *a* al node *r* ha de comparar què expecta obtenir de triar *a* amb què expecta de triar *b*. I si tria *b*, arribar a *y* és possible, de forma que cal tenir previst què fer si el joc assoleix el node *y*. La importància de fer una planificació completa de possibles decisions s'evidenciarà quan parlem de les solucions per als jocs seqüencials: per a esbrinar si una acció a un node és el millor per a un jugador, cal analitzar què passaria si passés el que no passa.

DEFINICIÓ 6. Com als jocs simultanis, una jugada d'un joc seqüencial és una assignació a cada jugador d'una de les seves estratègies.

REMARCA 7. Als jocs seqüencials és menys immediat que als jocs simultanis determinar els pagaments resultants d'una jugada.

- Als jocs simultanis, per a determinar els pagaments d'una jugada, n'hi ha prou amb identificar la casella associada amb la jugada. Als jocs seqüencials, per a determinar els pagaments d'una jugada, cal traçar el camí que la jugada segueix al llarg del joc.

- A tall d'exemple, la Fig. 29 mostra com trobar els pagaments de la jugada (*be*, *ch*) al joc de la Fig. 28: simplement marquem amb una fletxa les accions que conformen la jugada (*b* al node *r*, *e* al node *y*, *c* al node *x* i *h* al node *z*) i seguim les fletxes fins que arribem a un node terminal. Els pagaments d'aquest node són els pagaments que s'obtenen si es juga la jugada. En el cas de (*be*, *ch*), el vector de pagaments és (–1, 2). Observa que totes les jugades que continguin les accions *b* i *c* portaran al mateix vector (–1, 2) de pagaments: (*be*, *ch*), (*be*, *cg*), (*bf*, *ch*) i (*bf*, *cg*). A cadascuna d'aquestes jugades, 1 tria *b* a *r* i després 2 tria *c* a *x*, posant fi al joc.

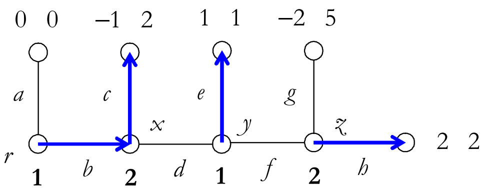


Fig. 29. Trobant els pagaments de la jugada (*be*, *ch*)

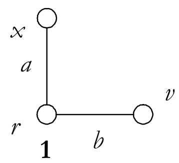


Fig. 30

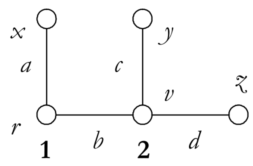
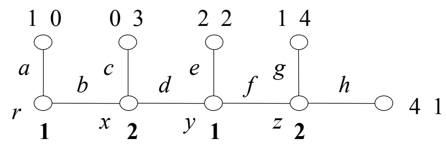


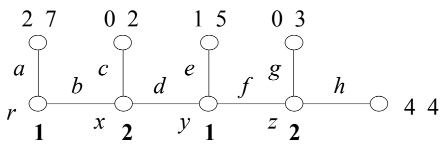
Fig. 31

Exercicis de la Lliçó 7

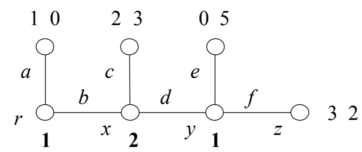
1. Determina les accions i les estratègies de cada jugador als següents jocs seqüencials. Indica totes les jugades dels jocs (iv) i (v).



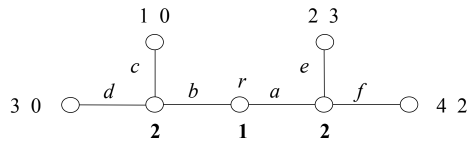
(i)



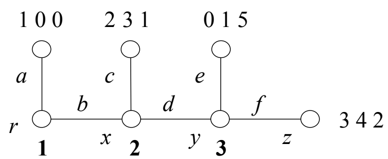
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

2. Pot un jugador d'un joc seqüencial tenir més accions que estratègies? I més estratègies que accions? Per què?

3. Identifica els nodes de decisió i els terminals als jocs (i), (ii), (iii), (iv) i (v). Al cas del joc (v), com canviarien les estratègies dels jugadors si els jugadors 2 i 3 permutessin els seus pagaments?

4. Determina totes les jugades que, al joc (i), porten al vector de pagaments (0, 3). Fes el mateix per al joc (ii) i el mateix vector. Fes el mateix per al joc (iii) i els vectors (3, 2) i (1, 0).

5. Al joc (i), indica les accions i estratègies del dos jugadors si el node z fos l'arrel del joc. Fes el mateix si l'arrel fos el node x.

Lliçó 8. Com es construeix un joc seqüencial?

EXEMPLE 1. Una estudiant de Microeconomia I ha de decidir si fa una consulta al professor. Si decideix fer-la, el professor observa des del seu despatx que l'estudiant s'apropa i aleshores ha de decidir si fugir del despatx per una porta lateral o atendre l'estudiant. L'estudiant vol per damunt de tot que el professor l'atengui, però el que menys prefereix és presentar-se al despatx i que el professor no hi sigui. El professor vol primer de tot que l'estudiant no faci la consulta i, en segon lloc, s'estima més atendre l'estudiant si ella ha decidit fer la consulta.

➤ El procediment per a transformar una situació on es prenen seqüencialment decisions interdependents és menys mecànic que el procediment en el cas dels jocs simultanis. Primer de tot cal establir si la manera apropiada de representar-la és mitjançant un joc simultani o un joc seqüencial (tot i això, la Lliçó 9 mostra que totes aquests situacions de presa de decisions interdependents poden ser representades com a joc simultani). A l'Exemple 1, el professor observa la decisió de l'estudiant i tria a continuació. Per tant, un jugador juga abans que l'altre i aquest segon juga sabent què ha fet el primer. Això fa que la situació sigui susceptible de ser representada com a joc seqüencial.

➤ Atès que representarem la situació com a joc seqüencial, cal determinar el nombre de jugadors, quantes vegades poden ser cridats a jugar cadascú i, en cada cas en què poden ser cridats, de quantes accions disposen en el moment de jugar. Amb aquesta informació s'ha de construir l'arbre de decisió que defineix el joc.

➤ A l'Exemple 1, hi ha dos jugadors, l'estudiant (jugador 1) i el professor (el jugador 2). Atès que l'estudiant decideix inicialment, l'arrel s'assigna a l'estudiant. De l'arrel surten dues branques representant les dues accions de què disposa l'estudiant, a = no fer la consulta i b = fer la consulta. Després de donar noms, x i v, als nodes connectats amb l'arrel a través de les accions a i b, resulta la Fig. 30, que mostra l'estat inicial de construcció del joc.

➤ L'estudiant ja no torna a jugar. Cal determinar si els dos nodes construïts a partir de les accions de l'estudiant són terminals o de decisió. Si l'estudiant tria no fer la consulta (acció a) el joc s'acaba, ja que el professor és cridat a prendre una decisió sobre si fugir (acció c) o atendre l'estudiant (acció d) només quan l'estudiant tria fer la consulta (acció b). Per tant, x és un node terminal i v és un node de decisió assignat al professor. Del node v surten dues branques, que representen les accions c i d del professor. Atès que el professor tampoc no torna a jugar, els nodes als que porten c i d (nodes y i z) són tots dos terminals. Això finalitza la construcció de l'arbre de decisions. Aquesta etapa del procés de construcció del joc es mostra a la Fig. 31.

➤ L'última etapa del procés consisteix en assignar els pagaments als nodes terminals. L'Exemple 1 no indica els pagaments. Però, com a l'Exemple 2 de la Lliçó 2, podem associar pagaments amb als nodes terminals basant-nos en l'ordre de preferència dels jugadors pels nodes terminals (que expressen resultats del joc). L'estudiant vol per damunt de tot que el professor l'atengui. Això significa assolir el node z, ja que aquest node s'assoleix només quan l'estudiant decideix fer la consulta i el professor l'atén. Per tant, z és el node terminal (o resultat) més preferit per l'estudiant. El node terminal menys preferit és y, que correspon a la seqüència de decisions on ella decideix fer la consulta i el professor fuig. En resum, de més a menys, la preferència de l'estudiant sobre els nodes terminals és $z \rightarrow x \rightarrow y$. Triem tres números i assignem-los respectant aquest ordre. Si triem 0, 1 i 2, el pagament de l'estudiant a z és 2, a x és 1 i a y és 0.

➤ Faríem el mateix per al professor. La seva preferència, de més a menys, seria $x \rightarrow z \rightarrow y$. Si triem també 0, 1 i 2 (podríem triar altres valors), el pagament del professor a x és 2, a z és 1 i a y és 0. El joc resultant és el de la Fig. 27, on l'estudiant és el jugador 1 i el professor és el jugador 2 (i els pagaments s'indiquen seguint aquesta tria de valors).

Exercicis de la Lliçó 8

1. Representa cada situació com a joc seqüencial.

(i) Hi ha classe de Microeconomia I un cert dia d'11 a 13. Un examen d'una hora s'ha de realitzar durant la sessió i la qüestió és si fer-lo d'11 a 12 i després fer classe o fer primer classe i després fer l'examen de 12 a 13. El professor decideix a les 11 si fer l'examen ja o fer-lo a les 12. Si l'examen es fa immediatament, el curs en bloc decideix si assistir a classe a les 12 o no. El que el curs s'estima més és fer l'examen a les 11 i no assistir a classe després; el que menys, fer-lo a les 12. Per al professor, el millor és complaure al curs fent l'examen a les 11 i el pitjor és accedir a fer-lo a les 11 i que després no assisteixi ningú a classe.

(ii) El joc de pedra, paper i tisores on un jugador mostra abans que l'altre què ha escollit i el segon jugador sap què ha escollit el primer.

(iii) Hi ha dos jugadors i un pot inicial de 1000 €. El primer jugador tria agafar-los o afegir 1000 € més. El segon jugador, sabent què ha fet el primer, tria entre agafar el pot acumulat de 2000 € o afegir 1000 € més. A continuació, el primer jugador, sabent què ha fet el segon, tria entre apropiar-se el pot acumulat de 3000 € o afegir 1000 € més. Finalment, el segon jugador, sabent què ha fet el primer, tria entre agafar el pot acumulat de 4000 € o regalar els 4000 € al primer jugador.

(iv) La situació és la de l'Exercici 2(i) de la Lliçó 2, amb la diferència que el davanter xuta abans que el porter es llenci i el porter sap on va el xut.

(v) La situació és la de l'Exercici 2(i) de la Lliçó 2, amb la diferència que el porter es llença abans que el davanter xuti i el davanter sap on s'ha llençat el porter.

Lliçó 9. Transformació d'un joc seqüencial en un joc simultani

REMARCA 1. Cada joc seqüencial es pot transformar en un únic joc simultani, però no hi ha un procediment per a transformar un joc simultani en un de seqüencial.

DEFINICIÓ 2. La representació en forma de joc simultani J^* d'un joc seqüencial J s'obté de la següent manera.

- *Jugadors*: el joc simultani J^* té el mateix conjunt de jugadors que el joc seqüencial J.
- *Estratègies*: per a cada jugador i del joc simultani J^*, el conjunt d'estratègies d'i a J^* coincideix amb el seu conjunt d'estratègies al joc seqüencial J.
- *Pagaments*: per a cada jugador i del joc simultani J^* i per a cada jugada s al joc J^*, el pagament d'i a J^* corresponent a la jugada s és el pagament que i rep al joc seqüencial J quan es juga la jugada s.

EXEMPLE 3. El joc J_{31} de la Fig. 31 és la representació en forma de joc simultani del joc seqüencial J_{27} de la Fig. 27. S'ha obtingut de la següent manera.

➤ Atès que el conjunt de jugadors de J_{27} és {1, 2}, el conjunt de jugadors de J_{31} és també {1, 2}.

➤ El conjunt d'estratègies del jugador 1 de J_{27} és {a, b}. D'aquí que {a, b} sigui el conjunt d'estratègies del jugador 1 a J_{31}. El conjunt d'estratègies del jugador 2 de J_{27} és {c, d}. Això fa que {c, d} sigui el conjunt d'estratègies del jugador 2 a J_{31}. Per tant, J_{31} té quatre jugades: (a, c), (a, d), (b, c) i (b, d).

➤ Finalment, cal associar pagaments amb cada jugada. Considerem primer la jugada (a, c). Els pagaments dels jugadors a J_{31} quan es juga (a, c) són els pagaments quan es juga (a, c) a J_{27}. El primer jugador cridat a jugar el joc J_{27} és el jugador 1. Així, que es jugui la jugada (a, c) significa que el jugador 1 comença triant a i, si s'arribés al node v del jugador 2, aquest triaria c. Però com jugar a a l'arrel r implica que el joc s'acaba, l'estratègia del jugador 2 és irrellevant per a determinar els pagaments. D'aquesta manera, si es juga (a, c), s'arriba al node x, on el vector de pagaments és (1, 2). Per tant, el vector de pagaments a J_{31} corresponent a la jugada (a, c) és (1, 2). Aquest és també el vector de pagaments corresponent a (a, d). Els pagaments de la jugada (b, c) són (0, 0). Aquest pagament resulta del fet que jugar la jugada (b, c) vol dir que 1 tria b a r, decisió que condueix al node v del jugador 2. Atès que el jugador 2 té l'oportunitat de jugar i que la jugada (b, c) diu que si el jugador 2 té l'oportunitat de jugar triarà c, el joc acaba al node y. Com a resultat, el vector de pagaments de la jugada (b, c) és (2, 1).

EXEMPLE 4. El joc J_{32} de la Fig. 32 és la representació en forma de joc simultani del joc seqüencial J_{28} de la Fig. 28. S'ha obtingut de la següent manera.

➤ El conjunt de jugadors de J_{32} és {1, 2} perquè {1, 2} és el conjunt de jugadors de J_{28}.

➤ El jugador 1 del joc J_{28} té 4 estratègies, (a, e), (a, f), (b, e) i (b, f). Aquestes són les estratègies del jugador 1 del joc J_{32}, abreujades com ae, af, be i bf. El jugador 2 del joc J_{28} té 4 estratègies, (c, g), (c, h), (d, g) i (d, h). Aquestes són les estratègies del jugador 2 del joc J_{32}, abreujades com cg, ch, dg i dh.

➤ El vector de pagaments dels jugadors a tota jugada on 1 juga a és (0, 0), perquè jugar a a l'arrel del joc J_{28} implica arribar al node terminal amb pagaments (0, 0). Per això, les caselles de les dues primeres files de la matriu del joc J_{32} tenen (0, 0) com a pagaments. Les 4 caselles del cantó inferior esquerre de la matriu del joc J_{32} representen jugades on 1 tria b a r i després 2 tria c a x (de forma que el joc no arriba mai als nodes y o z). Això implica obtenir els pagaments (–1, 2). Els pagaments de les jugades (be, dg) i (be, dh) són idèntics perquè la diferencia entre les jugades és l'acció que es prendria a z, que és un node al qual no s'arriba en aquestes jugades. De fet, tant a (be, dg) com a (be, dh), el joc començaria amb 1 triant b a r, després 2 triant d a x i, finalment, 1 triant e a y. El resultat d'aquestes decisions és el vector de pagaments (1, 1). Per últim, el vector de pagaments de la jugada (bf, dg) és (–2, 5) i el de la jugada (bf, dh) és (2, 2).

Jugador 1 \ Jugador 2	c	d
a	1 2	1 2
b	0 0	2 1

Fig. 31. Joc simultani del joc de la Fig. 27

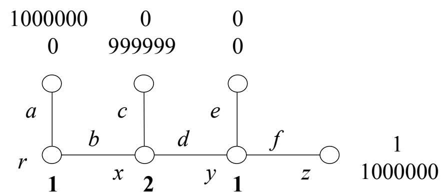
Jugador 1 \ Jugador 2	cg	ch	dg	dh
ae	0 0	0 0	0 0	0 0
af	0 0	0 0	0 0	0 0
be	–1 2	–1 2	1 1	1 1
bf	–1 2	–1 2	–2 5	2 2

Fig. 32. Joc simultani del joc de la Fig. 28

Exercicis de la Lliçó 9

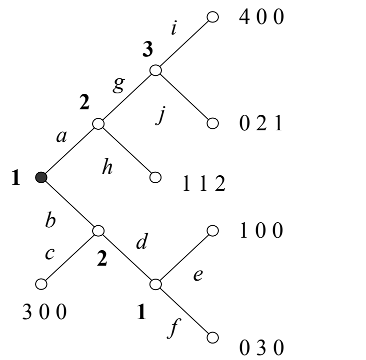
1. Representa en forma de joc simultani tots els jocs seqüencials de l'Exercici 1 de la Lliçó 7.

2. Transforma el següent joc en simultani, on el pagament del jugador 1 és el de dalt.



3. Representa en forma de joc simultani tots els jocs seqüencials dels exercicis de la Lliçó 8.

4. Representa en forma de joc simultani el següent joc seqüencial, on l'arrel és el node negre.



Lliçó 10. L'equilibri de Nash d'un joc seqüencial

DEFINICIÓ 1. Una jugada d'un joc seqüencial és un equilibri de Nash si, i només si, la jugada és un equilibri de Nash en la representació com a joc simultani del joc seqüencial original.

- Tot i que els equilibris de Nash d'un joc seqüencial es poden calcular directament al joc seqüencial, és més fàcil calcular-los a la representació en forma de joc simultani.

- Per exemple, la jugada (*a*, *d*) del joc de la Fig. 27 no és un equilibri de Nash del joc, perquè el jugador 1 augmenta el seu pagament canviant d'*a* a *b*. D'altra banda, la jugada (*a*, *c*) és un equilibri de Nash del joc de la Fig. 27. Primer, perquè canviant d'*a* a *b* el jugador 1 redueix el seu pagament: passaria d'1 a 0. I segon, perquè, donat *a*, l'estratègia que triï 2 no afecta el pagament resultant: el vector de pagaments de la jugada (*a*, *c*) és el mateix que el de la jugada (*a*, *d*), que és (1, 2). Per tant, canviant de *c* a *d*, el jugador 2 no augmenta el seu pagament, donat que 1 tria *a*.

EXEMPLE 2. Calculem els equilibris de Nash del joc seqüencial J_{28} de la Fig. 28. Tot i que en aquest joc és fàcil determinar si una jugada és un equilibri de Nash, és força complex calcular directament sobre el joc tots els equilibris de Nash.

- Per exemple, la jugada (*ae*, *cg*) és un equilibri de Nash del joc J_{28}: donat que 2 triaria *c* al node *x* i triaria *g* al node *z*, el jugador 1 no té cap forma d'escollir accions als seus dos nodes de forma que incrementi el pagament 0 que 1 obté a la jugada (*ae*, *cg*). En relació amb el jugador 2, en vista que 2 no té l'oportunitat de jugar a la jugada (*ae*, *cg*), qualsevol elecció d'estratègia li dóna el mateix pagament 0. En conseqüència, (*ae*, *cg*) és un equilibri de Nash: cap dels dos jugadors no pot augmentar el seu pagament si l'altre juga segons la jugada.

- Però com podem saber quins són tots els equilibris de Nash de J_{28}? Aquí és on ajuda la representació de J_{28} en forma de joc simultani, que es mostra a la Fig. 32. Els equilibris de Nash del joc de la Fig. 32 són 4: (*ae*, *cg*), (*ae*, *ch*), (*af*, *cg*) i (*af*, *ch*). Tots porten al vector de pagaments (0, 0).

- Es pot comprovar directament sobre J_{28} perquè les altres jugades no són equilibris de Nash. Per exemple, considerem la jugada (*be*, *dh*), que proporciona un pagament a cada jugador superior al pagament que reben als equilibris de Nash. La Fig. 33 mostra les eleccions que es fan a cada node d'acord amb aquesta jugada. D'una banda, *be* no és millor resposta a *dh*, perquè, en comptes d'*e*, és millor per a 1 triar *f* al node *y*. De l'altra, tampoc no és *dh* millor resposta a *be*, ja que per a 2 és millor triar *c* que *d* a *x*.

PROPOSICIÓ 3. *Tot joc seqüencial té al menys un equilibri de Nash.*

- *Demostració*. La Proposició 3 és un corol·lari de les Proposicions 2 i 6 de la Lliçó 11.■

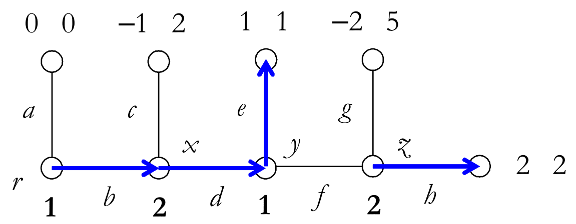


Fig. 33. Resultat de la jugada (*be*, *dh*)

REMARCA 4. La Proposició 3 evidencia una diferència significativa entre els jocs seqüencials (amb informació perfecta!) i els jocs simultanis: mentre els simultanis poden no tenir cap equilibri de Nash, tots els jocs seqüencials (amb informació perfecta) en tenen almenys un.

REMARCA 5. Hi ha una altra diferència significativa entre els jocs seqüencials amb informació perfecta i els simultanis: tot i que hi ha motius per a jutjar estable tot equilibri de Nash d'un joc simultani, hi ha equilibris de Nash d'un joc seqüencial que són manifestament inestables.

- A tall d'exemple, el joc de la Fig. 27 té dos equilibris de Nash: (*a*, *c*) i (*b*, *d*). Però el primer és estratègicament inestable, perquè, essent racional, el jugador 2 mai no executaria el pla d'acció que marca la jugada (*a*, *c*) si es veiés en la situació haver-lo d'acomplir. La jugada (*a*, *c*) s'interpreta en el sentit que el jugador 2 planeja triar *c* si el joc arriba al seu node, això és, si el jugador 1 tria *b*. Però com 1 tria *a* a la jugada (*a*, *c*), la implementació de la jugada no posa al jugador 2 en el tràngol d'haver d'executar aquest pla d'acció. Per això (*a*, *c*) és un equilibri de Nash: atès que 2 no juga, qualsevol elecció d'estratègia li dóna el mateix pagament en vista que 1 juga *a*; i atès que 2 pretén jugar *c*, el millor per a 1 és escollir *a* per a obtenir un pagament d'1 i evitar el pagament de 0 que obtindria si el joc arribés al node *v* i 2 triés *c* allà. En aquest sentit, es pot interpretar que l'elecció de *c* per part de 2 és una amenaça que té com a objectiu que 1 no doni l'oportunitat de jugar a 2 (observa que el pagament més alt per a 2 s'obté quan 1 tria *a*, és a dir, quan 2 no és cridat a jugar).

- El que fa que (*a*, *c*) sigui un equilibri de Nash inestable és que l'amenaça de 2 de jugar *c* en cas que li toqui el torn de jugar no és creïble. Si el jugador 2 és racional i li arribés el torn de prendre una decisió al node *v*, mai no triaria *c* sinó *d*. Com a conseqüència, en la mesura que 1 sàpiga que 2 és racional, 1 sabrà que, si es posa a 2 en situació d'acomplir la seva amenaça, la seva racionalitat l'impedirà d'acomplir-la: si 1 posa a prova a 2 i tria *b*, 2 ha fracassat en el seu intent de forçar 1 a triar *a*, de forma que jugar *c* ja no pot complir el propòsit de dissuadir el jugador 1 de triar *b*. Això fa que, un cop *b* s'ha jugat, 2 no tingui cap més remei que triar *d*. Per tot plegat, (*a*, *c*) no és estable: 1 jugaria *b* sabent que el seu canvi d'estratègia forçarà a 2 a també canviar la seva.

Exercici de la Lliçó 10

Obté tots els equilibris de Nash de tots els jocs seqüencials de lliçons i exercicis anteriors.

Lliçó 11. La inducció cap enrere aplicada a jocs seqüencials

Com s'ha fet per a identificar l'existència d'un equilibri de Nash inestable al joc de la Fig. 27? Aquesta lliçó s'encarrega d'explicar-ho apel·lant a la noció d'inducció cap enrere.

La inducció cap enrere és un procediment per a obtenir la solució de problemes de decisió on s'han de prendre decisions a diferents moments del temps o etapes. En aquest tipus de problema (anomenats problemes dinàmics o seqüencials), la millor decisió a una etapa depèn de quina sigui la decisió presa en etapes posteriors. La inducció cap enrere comença la resolució del problema a l'etapa final, que és on el problema de decisió és més simple (en no dependre la presa de decisions del que passi després). Trobada la millor decisió en el moment final, se substutueix la part final del problema per la seva solució. Això fa que la penúltima etapa es pugui considerar com si fos l'etapa final. Es resol el problema de decisió a la penúltima etapa, se'l substitueix per la seva solució i es continua cap enrere solucionant etapes prèvies sobre la base de les solucions trobades a etapes posteriors fins que s'arriba a l'etapa inicial.

DEFINICIÓ 1. Aplicació de la inducció cap enrere a un joc seqüencial. Una jugada d'un joc seqüencial s'obté (o és seleccionada) per inducció cap enrere si sobreviu el següent procés.

- A cada node just abans d'un node terminal, identifiquem les accions que donen el màxim pagament al jugador assignat al node.
- Retenim aquestes accions i eliminem la resta d'accions que hi ha al node.
- Passem després als nodes just abans dels nodes just abans dels nodes terminals i identifiquem les accions que donen el màxim pagament al jugador del node donades les accions retingudes.
- Eliminem les altres accions i continuem cap enrere fins arribar al node inicial.

PROPOSICIÓ 2. *Tota jugada seleccionada per inducció cap enrere és un equilibri de Nash.*

EXEMPLE 3. Apliquem la inducció cap enrere al joc de la Fig. 27.

- Primer cal identificar tots els nodes de decisió on cada acció al node porta a un node terminal; això és, cal buscar els nodes on totes les accions posen fi al joc. L'arrel r no compleix aquesta condició, perquè prendre l'acció b no posa fi al joc. En canvi, el node v és tal que tots els nodes que van després de v són nodes terminals: si es pren c a v, s'arriba al node y i el joc s'acaba; i si es pren d a v, s'arriba al node z i el joc s'acaba.

- Per tant, la inducció cap enrere comença a aplicar-se al node v. El problema de decisió al node v és el més simple, perquè el jugador assignat a v (el jugador 2) no necessita considerar què fara l'altre jugador: ja ho sap. De fet, si s'arriba al node v, 2 ja sap que 1 ha pres l'acció b: si hagués pres a en comptes de b, el joc s'hauria acabat. Així, si el joc avancés fins al node v, 2 tindria un problema senzill a resoldre: si tria c, s'arriba a y i 2 rep un pagament de 0; i si tria d, s'arriba a z i 2 rep un pagament d'1. Essent racional, 2 triarà d si es troba al node v. Això soluciona el joc al node v.

- Ara fixem aquesta solució: atès que si el joc arriba a v, es jugaria d, eliminem la branca que representa l'acció c. Solucionat el joc a v, passem a trobar la solució al node que precedeix v: l'arrel. Havent eliminat la possibilitat de triar c, la solució a r és senzilla: si 1 tria a a r, obté un pagament d'1; en canvi, si tria b a r, el joc arriba a v i, atès que s'ha determinat que d serà l'acció escollida si s'arriba a v, 1 acabarà obtenint un pagament de 2. En resum, la millor elecció a r, donat que es triarà d a v, és escollir l'acció b. La jugada obtinguda per inducció cap enrere al joc de la Fig. 27 resulta ser (b, d). Aquest seria l'equilibri de Nash "bo" del joc; l'altre equilibri, (a, c), seria l'equilibri "dolent".

REMARCA 4. La inducció cap enrere aplicada a un joc seqüencial identifica aquells equilibris de Nash del joc consistents amb la premissa que els jugadors són racionals a cadascun dels seus nodes, amb independència que el joc porti o no a aquells nodes.

- Per exemple, la inducció cap enrere no selecciona l'equilibri de Nash (a, c) perquè c no és una elecció al node v on s'hauria de prendre consistent amb la racionalitat del jugador 2 a aquell node: si 2 fos cridat a fer una elecció al node v, no triaria mai c.

- Una hipòtesi implícita de la inducció cap enrere és que quan un jugador, abans que el joc s'iniciï, considera quina acció escollir a un determinat node, la tria suposant que es troba en aquell node. Per al jugador 2 pot tenir sentit dir que triarà c al node v si sap que el joc no arribarà al node v. Però si 2 és forçat a fer la tria del que farà a v suposant que s'arribarà a v, llavors c no té cap justificació.

EXEMPLE 5. Apliquem la inducció cap enrere al joc de la Fig. 28.

- La inducció cap enrere comença al node z, que és l'únic node de decisió on totes les accions acaben el joc. Si el jugador assignat a z, que és 2, es trobés a z triaria g: escollint g, rep 5 de pagament; escollint h, només 2. Així doncs, eliminem h, tal i com mostra la Fig. 34. L'eliminació de parts del joc és més convenient per a determinar quins són els vectors de pagaments que són possibles d'acord amb la inducció cap enrere. Per a determinar quines són les jugades que selecciona la inducció cap enrere, és més útil fer ressaltar les accions obtingudes per inducció cap enrere. En aquest cas, la Fig. 35 mostra que g és l'acció triada a z per la inducció cap enrere.

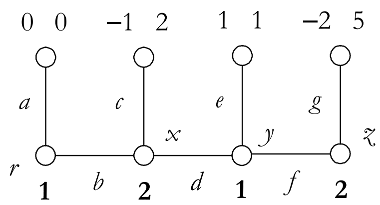


Fig. 34

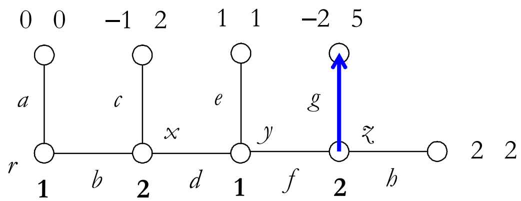


Fig. 35

- Sabent què passarà si s'arriba a z, considerem el node de decisió que precedeix z. Aquest node és y. Si el jugador assignat a y, que és 1, es trobés a y i sapigués que a z es triaria g, què jugaria? Si selecciona e, el pagament és 1; si opta per f, és −2. Per tant, la inducció cap enrere selecciona e a y. Si eliminem f (i tot el que hi ha després d'f) de la Fig. 34, passem a la Fig. 36; si fem ressaltar f a la Fig. 35, passem a la Fig. 37.

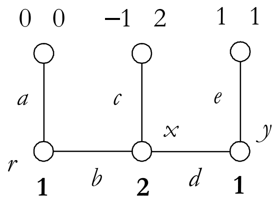


Fig. 36

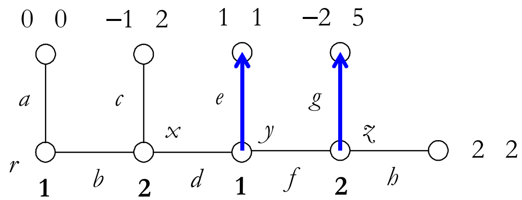


Fig. 37

➤ Sabent què passarà si s'arriba a *y*, considerem el node de decisió que precedeix *y*. Aquest node és *x*. Si el jugador assignat a *x*, que és 2, es trobés a *x* i sapigués que a *y* es triaria *e* i a *z* es triaria *g*, què jugaria? Si selecciona *c*, el pagament és 2; si opta per *d*, és 1. Per tant, la inducció cap enrere escull *c* a *x*. Si eliminem *d* (i tot el que hi ha després de *d*) de la Fig. 36, s'obté la Fig. 38. Si fem ressaltar *c* a la Fig. 37, s'obté la Fig. 39.

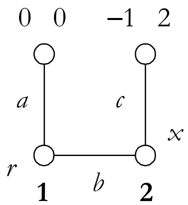


Fig. 38

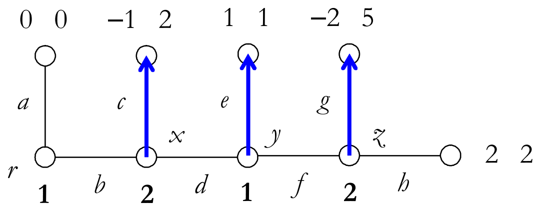


Fig. 39

➤ Sabent què passarà si s'arriba a *x*, considerem finalment el node de decisió que precedeix *x*: l'arrel *r* del joc. Si el jugador assignat a *r*, que és 1, sapigués que a *x* es triaria *c*, què jugaria? Si selecciona *a*, el pagament és 0; si opta per *b*, és –1. Per tant, la inducció cap enrere selecciona *a* a *r*. En eliminar *b* de la Fig. 38, resulta la Fig. 40. En fer ressaltar *a* a la Fig. 39, resulta la Fig. 41. A la Fig. 41 queda clar que ((*a*, *e*), (*c*, *g*)) és l'única jugada que ha seleccionat la inducció cap enrere. A la Fig. 40 queda clar que el vector de pagaments resultant és (0, 0), que és justament el vector de pagaments que resultaria si es jugués la jugada ((*a*, *e*), (*c*, *g*)) obtinguda per inducció cap enrere.

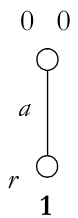


Fig. 40

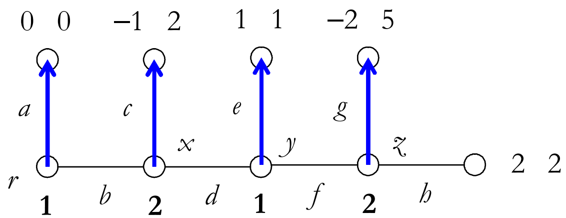


Fig. 41

PROPOSICIÓ 6. *Tot joc seqüencial té almenys una jugada que és seleccionada per la inducció cap enrere.*

REMARCA 7. La inducció cap enrere fa un ús implícit d'hipòtesis sobre la racionalitat dels jugadors, sobre el coneixement dels jugadors de la racionalitat dels altres jugadors, sobre el coneixement dels jugadors sobre el coneixement dels jugadors de la racionalitat dels altres…

➤ Per exemple, al joc de la Fig. 28, la inducció cap enrere selecciona *g* al node *z*. Això presum que 2 és racional. El següent pas de la inducció cap enrere porta a seleccionar *e* al node *y*. Però per a què 1 triï *e* al node *y*, cal que 1 sàpiga que 2 és racional, per tal de poder replicar la conclusió obtinguda per la inducció cap enrere segons la qual 2 triarà *g* al node *z*. El tercer pas de la inducció porta a seleccionar *c* al node *x*. Però per a què 2 triï *c* al node *x*, cal que 1 pugui derivar la conclusió que 1 triarà *e* al node *y*. Això significa que cal que 2 sàpiga tot el que 1 ha necessitat per a concloure que ha de triar *e* al node *y*; això és, cal que 2 sàpiga que 1 sap que 2 és racional i cal que 2 sàpiga que 1 és racional. Amb la primera hipòtesi, 2 sabrà que 1 sap que a *z* el jugador 2 triarà *g*; amb la segona hipòtesi, 2 sabrà que 1, sabent què farà 2 a *z*, triarà *e* al node *y*. Finalment, la inducció selecciona *a* a l'arrel. Per a què 1 pugui justificar la tria d'*a*, ha de ser capaç de replicar tot el raonament que 2 fa a *x*. Això requereix que 1 sàpiga que 2 sap que 1 sap que 2 és racional, que 1 sàpiga que 2 sap que 1 és racional i que 1 sàpiga que 2 és racional.

➤ La Fig. 42 indica a cada node <u>quines hipòtesis sobre racionalitat i el coneixement de racionalitat són necessàries per a avalar la selecció d'accions que fa la inducció cap enrere</u>, on R_i abreuja "el jugador *i* és racional" i S_i abreuja "el jugador *i* sap que". La Fig. 42 evidencia la quantitat de munició necessària per a què funcioni l'artilleria de la inducció cap enrere: són les hipòtesis que permeten que els jugadors repliquin cada conclusió obtinguda en el procés d'inducció cap enrere. D'aquí, si alguna d'aquestes hipòtesis no està present, els jugadors podrien jugar una jugada diferent a la què selecciona la inducció cap enrere.

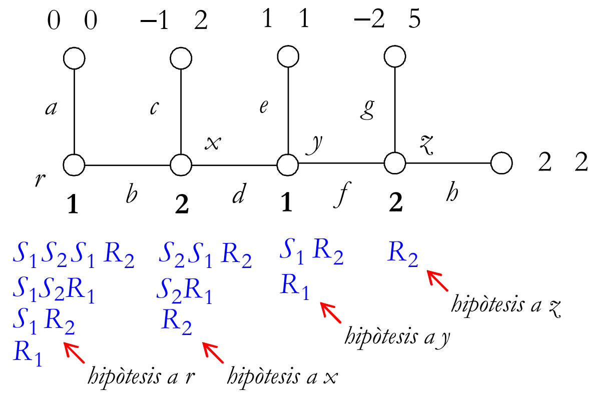


Fig. 42. Hipòtesis necessàries per a fer funcionar la inducció cap enrere

REMARCA 8. <u>Les jugades obtingudes per inducció cap enrere no són immunes a objeccions</u>.

Una paradoxa de la inducció cap enrere

Les classes de Microeconomia I tenen lloc dilluns, dimarts i dimecres. Al final d'una sessió de dimecres, el professor anuncia que farà un examen per sorpresa algun dia de classe de la propera setmana.

Els estudiants apliquen la inducció cap enrere per a intentar anticipar el dia de l'examen. El raonament comença el dimecres, que és l'últim dia on hi pot haver examen. Pot un examen per sorpresa tenir lloc el dimecres? No: si dilluns i dimarts han passat i no hi ha hagut examen, l'examen només pot ser el dimecres i no serà un examen per sorpresa.

Aquest raonament deixa el dimarts com l'últim dia on hi pot haver un examen per sorpresa. Però llavors si dilluns passa i no hi ha examen, se sap que l'examen serà el dimarts i tampoc no serà un examen per sorpresa.

Per tant, descartats dimecres i dimarts, l'únic dia on hi pot haver un examen per sorpresa és dilluns. En tal cas, l'examen tampoc no seria per sorpresa: un cop el professor fa l'anunci un dimecres que dilluns, dimarts o dimecres vinent hi haurà un examen per sorpresa, la inducció cap enrere porta a la conclusió que l'examen serà dilluns i, així, no serà cap sorpresa.

La inducció cap enrere sembla que fa impossible que el professor posi un examen per sorpresa. Tanmateix, arriba dimarts i el professor posa l'examen. I agafa tothom per sorpresa!

- Per a il·lustrar la Remarca 8, sigui el joc de la Fig. 43. La inducció cap enrere selecciona la jugada (*a*, *c*, *e*). La justificació d'(*a*, *c*, *e*) és que 1 és racional (i tria *e* al node *y*), que 2 sap que 1 és racional (d'on sap que 1 tria *e* al node *y*), que 2 és racional (i tria *c* al node *x*), que 1 sap que 2 sap que 1 és racional (d'on sap que 2 sap que 1 tria *e* al node *y*) i que 1 sap que 2 és racional (d'on sap que 2 tria *c* al node *x*). Amb S_i = "el jugador *i* sap que" i R_i = "el jugador *i* és racional", la inducció cap enrere fa servir implícitament les hipòtesis R_1, R_2, S_2R_1, S_1R_2 i $S_1S_2R_1$.

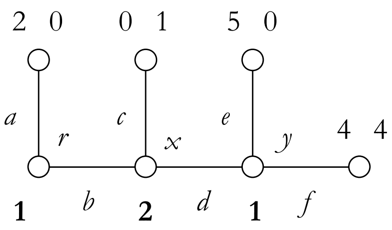


Fig. 43

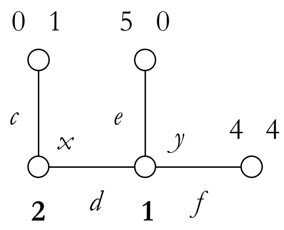


Fig. 44

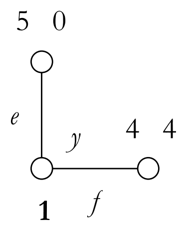


Fig. 45

- Però què passa si, després de tot, el jugador 1 no tria *a* sinó *b*? Aleshores 2 ha d'inferir que alguna de les hipòtesis relatives al jugador 1 que implicaven triar *a* és falsa: o R_1 és falsa, o S_1R_2 és falsa, o $S_1S_2R_1$ és falsa (o un subconjunt de les tres). Per tant, quan s'arriba al node *x* del joc de la Fig. 43, 2 pot creure que 1 no és racional o que 1 no sap que 2 és racional o que 1 no sap que 2 sap que 1 és racional. Suposem que 2 creu que 1 no és racional. Aquesta creença pot justificar triar *d* si s'expecta que 1 jugarà *f*.

- I si el jugador 1 creu que triar *b* induirà el jugador 2 a creure que 1 no és racional i, per tal motiu, el portarà a triar *d*, aleshores 1 tindrà incentiu a no jugar a *r* l'acció que prescriu la inducció cap enrere: l'acció *a*. La raó és que si 1 creu que 2 jugarà *d*, jugar *b* i *f* generarà un pagament de 4 per al jugador 1, superior al pagament de 2 corresponent a la jugada obtinguda per inducció cap enrere. Al joc de l'Exercici 2 de la Lliçó 9 també es pot qüestionar la recomanació que fa la inducció cap enrere al node *x*.

REMARCA 9. La inducció cap enrere pot seleccionar més d'una jugada a un joc seqüencial.

- Considerem el joc de la Fig. 46. La inducció cap enrere es comença aplicant a tot aquell node on cada acció del node posa fi al joc. En aquest cas, són dos aquests nodes: *x* i *y*. A *x*, la millor acció per a 2 és *e*. Per tant, tota jugada seleccionada per inducció cap enrere tria *e* al node *x*. En canvi, al node *y*, tant *c* com *d* donen al jugador 2 el màxim pagament. Això significa que la identificació de les jugades seguint la inducció cap enrere ha de considerar les dues possibilitats: què passa si es tria *c* a *y* (Fig. 46) i què passa si es tria *d* a *y* (Fig. 47).

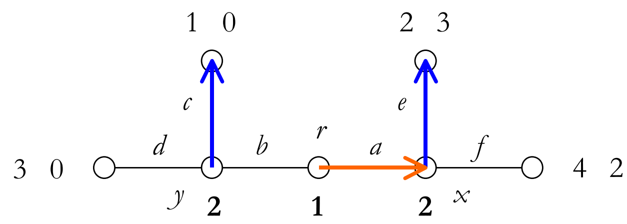


Fig. 46. Un joc on la inducció cap enrere selecciona més d'una jugada (1a jugada)

- A la Fig. 46, *c* es tria a *y*. Així, sabent què es tria a *x* i a *y*, es pot passar a determinar què es tria a *r*. En aquest cas, *a* és la millor elecció a *r*: triant *a*, 1 obté 2; i triant *b*, 1 obté 1. A la Fig. 47, *d* es tria a *y*. Com abans, sabent-se què es tria a *x* i a *y*, pot prendre's una decisió a *r*. Ara és *b* la millor elecció a *r*: triant *a*, 1 obté 2; i triant *b*, 1 obté 3.

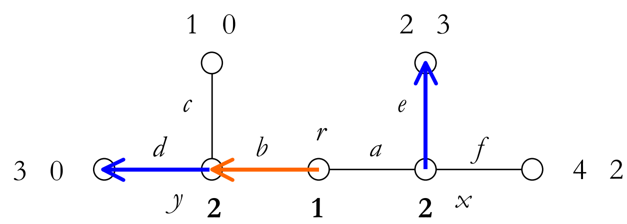


Fig. 47. Un joc on la inducció cap enrere selecciona més d'una jugada (2a jugada)

Exercici de la Lliçó 11

Troba les jugades que la inducció cap enrere selecciona als jocs seqüencials de lliçons i exercicis anteriors.

Lliçó 12. L'equilibri perfecte en subjocs

DEFINICIÓ 1. Un <u>subjoc</u> d'un joc seqüencial és un joc que té com a arrel un node de decisió del joc seqüencial i que està format per aquell node i tot el que hi ha a continuació del node.

- Tot subjoc d'un joc seqüencial s'obté triant un node de decisió i eliminant tot el que no es troba després del node. Per tant, <u>un joc seqüencial té tants subjocs com nodes de decisió</u>.

EXEMPLE 2. El joc de la Fig. 43 té tres subjocs: el mateix joc de la Fig. 43, el de la Fig. 44 i el de la Fig. 45. El primer és el subjoc amb arrel *r*; el segon, el subjoc amb arrel *x*; i el tercer, el subjoc amb arrel *y*.

DEFINICIÓ 3. Un <u>equilibri perfecte en subjocs</u> d'un joc seqüencial *J* és un equilibri de Nash *e* de *J* tal que, per a tot subjoc *J** de *J*, la part d'*e* que es juga a *J** és també un equilibri de Nash de *J**.

- Un equilibri perfecte en subjocs d'un joc seqüencial és un equilibri de Nash que genera equilibris de Nash a cada subjoc del joc.

EXEMPLE 4. La jugada (*a*, *c*, *f*) és un equilibri de Nash del joc J_{43} de la Fig. 43. Per a què (*a*, *c*, *f*) sigui un equilibri perfecte en subjocs del joc J_{43}, cal que, quan s'aplica la jugada (*a*, *c*, *f*) a cada subjoc del joc J_{43}, el que resulta és un equilibri de Nash del subjoc. Les Figs. 48, 49 i 50 mostren tots els subjocs del joc J_{43}. A cada subjoc s'ha indicat la part d'(*a*, *c*, *f*) que es jugaria al subjoc. Al subjoc de la Fig. 48, la part d'(*a*, *c*, *f*) que es jugaria és tota la jugada, perquè el subjoc de la Fig. 48 és el mateix joc J_{43}. Per tant, (*a*, *c*, *f*) és equilibri de Nash al primer subjoc. La part d'(*a*, *c*, *f*) que es jugaria al segon subjoc, el de la Fig. 49, és (*c*, *f*). Aquesta jugada del subjoc no constitueix un equilibri de Nash del subjoc, perquè *d* és millor que *c* donat *f*. Com a resultat, (*a*, *c*, *f*) no és un equilibri perfecte en subjocs del joc J_{43}. És casual que (*a*, *c*, *f*) no sigui una jugada seleccionada per la inducció cap enrere al joc J_{43}?

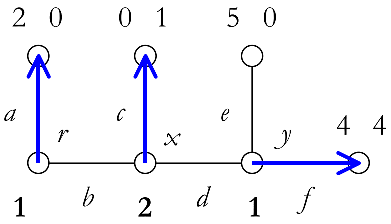


Fig. 48

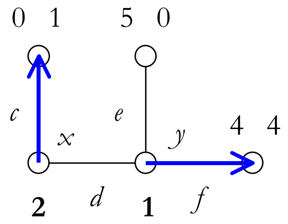


Fig. 49

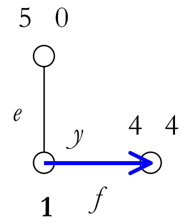


Fig. 50

PROPOSICIÓ 5. *Un equilibri de Nash d'un joc seqüencial és un equilibri perfecte en subjocs si, i només si, la inducció cap enrere selecciona l'equilibri.*

EXEMPLE 6. L'únic equilibri perfecte en subjocs del joc de la Fig. 27 és (*b*, *d*), que és la jugada seleccionada per inducció cap enrere. L'únic equilibri perfecte en subjocs del joc de la Fig. 28 és ((*a*, *e*), (*c*, *g*)), que és la jugada seleccionada per inducció cap enrere. I els dos equilibris perfectes en subjocs del joc de la Fig. 43 són (*a*, (*e*, *c*)) i (*b*, (*e*, *d*)), que són les dues jugades seleccionades per inducció cap enrere

PROPOSICIÓ 7. *A tot joc seqüencial hi ha almenys un equilibri perfecte en subjocs.*

Exercici de la Lliçó 12

Troba els equilibris perfectes en subjocs a tots els jocs seqüencials de lliçons i exercicis anteriors.

Preguntes de tipus test del Tema 1

1. Quina afirmació no és falsa?
(a) Tot joc simultani té algun equilibri de Nash
(b) Hi ha jocs seqüencials sense equilibris de Nash
(c) Un equilibri perfecte en subjocs pot no ser un equilibri de Nash
(d) Les tres afirmacions anteriors són falses

2. Si una estratègia és dominant per a un jugador
(a) també serà dominant per als demés
(b) dóna al jugador el pagament més alt del joc
(c) no és part d'un equilibri de Nash
(d) no és una estratègia dominada per cap altra estratègia

3. Una jugada d'un joc simultani és un equilibri de Nash si
(a) proporciona a tots els jugadors el màxim pagament que poden obtenir al joc
(b) és una estratègia dominant
(c) no és un equilibri perfecte en subjocs
(d) Res de l'anterior

4. Quina afirmació no és certa?
(a) Jugar un equilibri de Nash pot fer que tots els jugadors rebin el pagament més alt del joc
(b) Jugar un equilibri de Nash pot fer que tots els jugadors rebin el pagament més baix del joc
(c) L'eliminació successiva d'estratègies dominades pot acabar eliminant totes les estratègies d'algun jugador tret d'una
(d) L'eliminació successiva d'estratègies dominades sempre permet eliminar alguna estratègia d'algun jugador

5. En el cas dels jocs seqüencials, la inducció cap enrere és un procediment per a seleccionar
(a) subjocs
(b) equilibris no perfectes en subjocs
(c) jugadors
(d) jugades

6. Un node de decisió és el mateix que
(a) un node terminal
(b) una acció
(c) un equilibri perfecte en subjocs
(d) Res de l'anterior

7. Un tret dels jocs seqüencials és que
(a) tots els jugadors tenen els mateixos pagaments
(b) tot jugador té sempre més estratègies que accions
(c) és sempre impossible calcular tots els equilibris de Nash del joc
(d) sempre hi ha algun equilibri perfecte en subjocs

8. La inducció cap enrere
(a) s'aplica a jocs simultanis
(b) pot seleccionar jugades que no són equilibris de Nash
(c) comença a aplicar-se pel node que té assignades més accions
(d) identifica jugades que són equilibris perfectes en subjocs

9. Una jugada a un joc simultani és
(a) una estratègia
(b) un pagament
(c) un equilibri de Nash
(d) res de l'anterior

10. Una jugada a un joc seqüencial és
(a) una estratègia i una acció
(b) un pagament
(c) un equilibri de Nash
(d) res de l'anterior

11. Si una jugada és equilibri de Nash a un joc simultani
(a) tots els jugadors obtenen el pagament més alt
(b) algun jugador obté el pagament més baix
(c) tots els jugadors tenen una estratègia dominant
(d) res de l'anterior

12. Al JOC 2
(a) només l'equilibri ((*b*, *f*), (*d*, *h*)) és consistent amb la inducció cap enrere
(b) jugar la jugada ((*b*, *e*), (*d*, *h*)) fa que el jugador 1 obtingui un pagament de 3
(c) el jugador 2 juga primer
(d) totes les jugades fan que el joc arribi al node *z*

13. Quina afirmació és certa?
(a) A tots els jocs simultanis hi ha sempre almenys un jugador que té una estratègia dominant
(b) A tots els jocs simultanis hi ha sempre almenys un jugador que té una estratègia dominada
(c) Hi ha jocs simultanis sense equilibris de Nash
(d) Res de l'anterior

14. Quina afirmació no és falsa?
(a) La representació com a joc simultani d'un joc seqüencial pot fer que algun jugador tingui més estratègies de les que té al joc seqüencial
(b) Els jugadors dels jocs seqüencials mai no tenen estratègies dominants o dominades
(c) Els equilibris de Nash d'un joc seqüencial s'obtenen tots per inducció cap enrere
(d) Si a un joc simultani amb dos jugadors i dues estratègies, tots dos jugadors tenen una estratègia dominant aleshores el joc té almenys un equilibri de Nash

15. S'entén que un jugador és racional si
(a) no té estratègies
(b) no té pagaments
(c) té una estratègia dominada
(d) res de l'anterior

16. Un tret dels jocs seqüencials és que
(a) no tots els jugadors tenen pagaments
(b) es crea la distinció entre "acció" i "estratègia"
(c) només poden jugar un nombre senar de jugadors
(d) tot l'anterior

17. L'eliminació successiva d'estratègies dominades a un joc simultani
(a) crea un joc seqüencial que no té equilibris de Nash
(b) pot acabar no eliminant cap estratègia d'algun jugador
(c) pot acabar eliminant totes les estratègies d'algun jugador
(d) res de l'anterior

18. L'eliminació successiva d'estratègies dominades a un joc simultani
(a) crea un joc seqüencial
(b) pot acabar eliminant totes les estratègies d'un jugador tret d'una
(c) pot acabar eliminant totes les estratègies d'algun jugador
(d) res de l'anterior

19. Al JOC 1, hi ha 9
(a) jugades
(b) jugadors
(c) estratègies
(d) equilibris de Nash

20. Al JOC 1, l'estratègia a
(a) domina l'estratègia b
(b) domina l'estratègia d
(c) domina l'estratègia c
(d) tot l'anterior

21. El JOC 1
(a) no té cap equilibri de Nash
(b) té només un equilibri de Nash
(c) té més d'un equilibri de Nash
(d) res de l'anterior

22. Quina afirmació no és falsa?
(a) El JOC 1 és la representació com a joc simultani del JOC 2
(b) El JOC 2 no té cap equilibri de Nash
(c) El JOC 2 no té només un equilibri de Nash
(d) La inducció cap enrere selecciona la jugada (a, d) al JOC 1

23. Al JOC 2
(a) tots dos jugadors tenen 4 accions i 4 estratègies
(b) a tota jugada, el jugador 1 sempre acaba jugant dos cops
(c) la inducció cap enrere comença a aplicar-se al node r
(d) la inducció cap enrere selecciona l'equilibri de Nash (3, 3)

24. Una diferència entre els jocs simultanis i els seqüencials és que
(a) els jocs simultanis tenen més jugadors que els seqüencials
(b) tots els jocs simultanis tenen almenys un equilibri de Nash i cap dels jocs seqüencial no en té, d'equilibris de Nash
(c) que a un joc seqüencial és possible que algun jugador no acabi jugant però a un joc simultani tots els jugadors juguen el joc
(d) res de l'anterior

25. Quina afirmació sobre el JOC 2 és certa?
(a) La seva representació com a joc simultani té 16 jugades
(b) El joc no té cap equilibri de Nash
(c) La inducció cap enrere estableix que el jugador 2 sempre jugaria c al node x
(d) A tota jugada el jugador 2 és sempre l'últim a jugar

26. Al JOC 1,
(a) totes les estratègies del jugador 1 són dominants
(b) alguna estratègia és dominada
(c) alguna estratègia és dominant
(d) el jugador 2 té alguna estratègia dominada

27. Quina afirmació no és falsa?
(a) JOC 1 representa el JOC 2 com a joc simultani
(b) Tota jugada del JOC 2 és equilibri de Nash
(c) Al JOC 2, el jugador 2 té més estratègies que 1
(d) La inducció cap enrere selecciona només una jugada al JOC 2

28. Al JOC 3 amb $x = y = z = -1$, l'estratègia b
(a) domina l'estratègia a
(b) domina l'estratègia d
(c) no domina cap estratègia
(d) Res de l'anterior

29. Al joc simultani que representa el JOC 4,
(a) hi ha 4 jugadors
(b) el vector de pagaments que correspon a la jugada ((a, c), (e, g)) és (0, 2)
(c) cada jugador té dues estratègies
(d) hi ha algun equilibri de Nash

30. Al JOC 3
(a) tota jugada és equilibri de Nash si $x = y = z$
(b) $z = 4$ fa que (c, f) sigui un equilibri de Nash
(c) $y = 4$ fa que (a, f) sigui un equilibri de Nash
(d) $x = z = 4$ fa que (a, f) sigui un equilibri de Nash

31. Quina afirmació no és falsa?
(a) El JOC 4 no es pot representar com a joc simultani
(b) El JOC 3 no té equilibris de Nash si $x = y = z = 5$
(c) El JOC 4 no té cap subjoc
(d) El JOC 3 no té equilibris de Nash si $x = y = z = 0$

32. Al JOC 4
(a) 1 té les mateixes accions que estratègies
(b) el jugador 2 té més accions que estratègies
(c) tota jugada fa que s'hi arribi al node z del jugador 2
(d) per a cada acció hi ha un equilibri de Nash on es triaria l'acció

33. En relació amb el JOC 4,
(a) només ((b, f), (d, h)) és consistent amb la inducció cap enrere
(b) ((b, e), d) és una jugada que, a més, és un equilibri de Nash
(c) la seva representació com a joc simultani té 8 jugades
(d) hi ha més d'una jugada consistent amb la inducció cap enrere.

34. Quina afirmació no és falsa?
(a) No totes les jugades d'un joc simultani són necessàriament equilibris de Nash
(b) Tot joc simultani té més equilibris de Nash que jugades
(c) Un joc seqüencial pot no tenir cap equilibri perfecte en subjocs
(d) Hi ha jocs seqüencials sense subjocs

35. Una estratègia dominada per a un jugador d'un joc simultani
(a) és una estratègia dominant per a algun altre jugador del joc
(b) no és eliminada durant el procés d'eliminació d'estratègies dominades
(c) és una assignació d'una acció a cada node de decisió del jugador
(d) Res de l'anterior

36. Un equilibri de Nash d'un joc seqüencial és
(a) una jugada del joc que compleix certes propietats
(b) un subjoc on cada jugador és racional
(c) una estratègia dominant
(d) el pagament més alt que un jugador pot obtenir al joc

37. La representació com a joc simultani d'un joc seqüencial
(a) és un joc simultani que sempre tindrà almenys un equilibri de Nash
(b) elimina totes les estratègies dominades d'un jugador
(c) és una manera d'obtenir les jugades per inducció cap enrere
(d) és una estratègia que és millor resposta per a algun jugador

38. Al JOC 5,
(a) totes les afirmacions següents són falses
(b) no hi ha cap valor d'x que faci que l'estratègia a domini l'estratègia b
(c) el jugador 2 té alguna estratègia dominant o dominada
(d) per a algun valor d'x i z el joc té algun equilibri de Nash

39. Quina afirmació no és certa?
(a) Una jugada obtinguda per inducció cap enrere a un joc seqüencial pot no ser un equilibri de Nash del joc
(b) Si un equilibri de Nash d'un joc seqüencial no és un equilibri perfecte aleshores no s'obté per inducció cap enrere
(c) L'aplicació de la inducció cap enrere a un joc seqüencial pot seleccionar totes les jugades del joc
(d) Un jugador d'un joc seqüencial no pot tenir més accions que estratègies

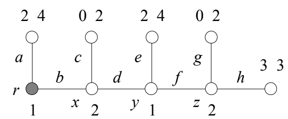
40. El JOC 6 és tal que
(a) amb independència del valor d'x, a tota jugada obtinguda per inducció cap enrere el jugador 2 tria c al node x
(b) amb independència del valor d'x, la representació com a joc simultani no té cap equilibri de Nash
(c) no és un joc seqüencial perquè no pot ser que el jugador 2 tingui només un node de decisió i el jugador 1 en tingui tres
(d) el jugador 1 té vuit estratègies

41. La inducció cap enrere,
(a) selecciona només un equilibri de Nash al JOC 5 quan $x = z = 4$
(b) sempre selecciona, a tot joc seqüencial, només un equilibri de Nash
(c) comença a aplicar-se pel node que té assignades menys accions
(d) identifica totes les jugades que són equilibris perfectes en subjocs

42. Quan $x = 5$, el JOC 6
(a) te un únic equilibri de Nash
(b) té cinc jugades
(c) té tres subjocs
(d) té més d'un equilibri de Nash

1 \ 2	d	e	f
a	9 0	7 0	5 1
b	8 0	6 1	4 0
c	3 1	2 0	5 0

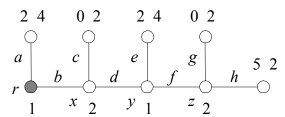
JOC 1



JOC 2

1 \ 2	d	e	f
a	9 0	7 0	x 1
b	8 0	6 1	4 0
c	3 y	2 0	z 0

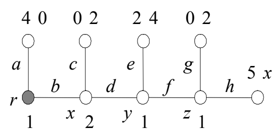
JOC 3



JOC 4

1 \ 2	d	e	f
a	9 0	7 0	x 1
b	8 0	6 1	4 0
c	3 1	2 0	z 0

JOC 5



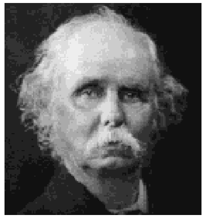
JOC 6

Tema 2. Funcions de demanda dels consumidors

Lliçons 1–10

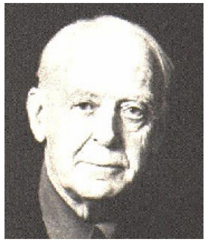
Antoine Augustin Cournot (1801–1877)
http://en.wikipedia.org/wiki/Cournot

Economista, matemàtic i filòsof francès. Pioner de l'economia matemàtica. El seu llibre *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838) conté els models de monopoli, duopoli i competència perfecta que formen la base d'un curs de Microeconomia I.



Alfred Marshall (1842–1924)
http://es.wikipedia.org/wiki/Alfred_Marshall

Economista anglès. Va escriure el manual d'Economia més influent de la seva època, *Principles of Economics* (1890), on popularitzava les nocions d'utilitat, funció de demanda, elasticitat i excedent del consumidor.



Sir John Richard Hicks (1904–1989)
http://en.wikipedia.org/wiki/John_Hicks

Economista anglès que va rebre el *Premi Nobel d'Economia* al 1972. El seu llibre *Valor i capital* (1939) presenta ja la teoria del consumidor tal i com s'explica a un curs de Microeconomia II. A ell també es deu el model IS-LM, que és el model sobre el qual s'articula un curs de Macroeconomia II.

Lliçó 1. Béns, preus i mercats

DEFINICIÓ 1. En sentit ampli, la Microeconomia és la branca de l'Economia que estudia la presa de decisions assumint que els decisors sospesen els beneficis i els costs per a ells de les seves decisions. En un sentit estricte, la Microeconomia és la branca de l'Economia que estudia la presa de decisions relatives als recursos (béns, serveis, factors de producció, temps, …), principalment quan aquests recursos són objecte de compravenda a un mercat. Més detalls a http://en.wikipedia.org/wiki/Microeconomic_theory.

- Quan la Microeconomia s'entén en un sentit ampli ("Microeconomia moderna"), incorpora altres teories, com ara la teoria de la decisió (anàlisi de les decisions d'un individu quan aquest no es veu afectat per decisions d'altres individus), la teoria de l'elecció social (anàlisi de com un col·lectiu pren decisions) o, fins i tot, la pròpia teoria dels jocs (anàlisi de la presa de decisions quan aquestes són interdependents).

- La Microeconomia entesa en sentit estricte representa la forma en què tradicionalment s'ha entès i desenvolupat la Microeconomia ("Microeconomia tradicional"), això és, com a teoria dels preus. En els seus orígens i, fins a ben superat mitjans del segle XX, la Microeconomia s'entenia com a una teoria que explicava el valor de les coses i, específicament, el valor de les coses que es manifestava en els mercats en forma de preu. Entesa com a teoria dels preus, la Microeconomia en sentit estricte és una teoria més de les que formen part de la Microeconomia en sentit ampli.

- El model bàsic de la Microeconomia en sentit estricte és el model d'un mercat. L'aparició de la teoria dels jocs va permetre reconstruir els models de mercats per a definir-los com a jocs.

DEFINICIÓ 2. Un bé és tot allò (objectes, mercaderies, serveis, recursos productius) del que algú desitja poder-ne fer ús o, simplement, que algú desitja tenir a la seva disposició.

- Típicament, la Microeconomia en sentit estricte s'ha ocupat de béns que es poden comprar i vendre, generalment als mercats. Aquesta elecció la justifica la tendència segons la qual, com més avançada és una economia, més béns acaben sotmesos a compravenda. A tall d'exemple, ja és possible comprar-se un terreny a la Lluna o Mart (http://me.moonestates.com/faq.php o http://www.marsshop.com/), tot i que el comprador difícilment en podrà fer ús. Això no treu que la Microeconomia també analitzi problemàtiques lligades a béns que no es compren o venen (com l'aire).

DEFINICIÓ 3. Un bé té preu quan, per a obtenir-lo d'una persona, cal lliurar a canvi algun altre bé en contraprestació. El preu del bé serà la quantitat de l'altre bé que s'hagi de donar en contraprestació.

- L'aire no té preu perquè podem respirar-lo sense donar res a canvi a ningú. Tampoc no té preu la intel·ligència, perquè no hi ha ningú que sàpiga com transmetre-la i, per tant, ningú no està disposat a donar res a canvi d'una cosa que no sap si l'està rebent.

- En tot intercanvi de béns, la quantitat intercanviada d'un dels béns és el preu de la quantitat de l'altre bé. Si una persona que viu a Reus dóna una entrada per a un partit de fútbol a una altra que viu a Tarragona a canvi que aquesta segona la porti en cotxe des de Reus, l'entrada és el preu del transport i el transport és el preu de la entrada.

- L'intercanvi d'un bé per un altre s'anomena bescanvi. Al cas anterior, hi havia bescanvi de l'entrada pel transport (o del transport per l'entrada). El problema del bescanvi és que, per a què es produeixi l'intercanvi, cada individu ha de voler el que l'altre té. Aquesta doble coincidència de necessitats dificulta l'intercanvi. Per exemple, un professor de Microeconomia difícilment pot oferir sistemàticament en intercanvi més que classes de Microeconomia. Si cap botiguer no volgués rebre classes de Microeconomia, el professor no podria adquirir pràcticament res.

- Per tant, si en aquest món sobreviuen els professors de Microeconomia és perquè s'han desenvolupat instruments que faciliten l'intercanvi. El diner és un d'aquests instruments. El diner no és més que un bé amb la particularitat que tothom el vol i que és durable i fàcil d'intercanviar. L'existència de diner permet que es produeixin intercanvis que sense ell no es produirien. Per exemple, si el botiguer no vol rebre classes del professor, aquest pot intercanviar classes per diner amb un tercer i emprar el diner per a intercanviar amb el botiguer. Un interncanvi on un dels dos béns fa de diner s'anomena compravenda.

DEFINICIÓ 4. Quan hi ha un bé que fa de diner, el preu d'un bé és la quantitat de diner que cal donar a canvi d'una unitat del bé.

- La Microeconomia en sentit estricte es considerava teoria dels preus perquè pretenia entendre i explicar els mecanismes de formació de preus. En particular, l'objectiu era respondre preguntes del tipus següent: (i) com es determina el preu d'un bé?; (ii) quins factors incideixen en la formació del preu d'un bé?; (iii) per què uns béns tenen un preu superior a d'altres?; (iv) per què el preu d'alguns béns augmenta (o disminueix) més ràpidament que el d'altres?; (v) per què el preu d'alguns béns varia i els d'altres no es modifica substancialment?; o (vi) com afecta el canvi del preu d'un bé al preu d'altres?

- Aquestes preguntes es responien fent servir uns models anomenats "mercats", que s'entenien com a representacions molt estilitzades dels mecanimes que determinen tant els intercanvis de béns com els preus de béns a una economia avançada típica.

DEFINICIÓ 5. Un mercat és un joc on:

• els jugadors del joc prenen decisions sobre la compra i la venda d'un únic bé;
• hi ha dos tipus de jugadors, anomenats consumidors (els que adquireixen el bé donat a canvi de diner) i productors (que cedeixen el bé a canvi de rebre diner);
• la decisió de cada consumidor consisteix a triar una quantitat del bé que vol i pot adquirir, anomenada quantitat demandada;

• cada productor tria un preu del bé (la quantitat de diner que el productor demanda a canvi d'una unitat del bé) i una quantitat que desitja vendre, anomenada quantitat oferta;
• els pagaments per a cada consumidor resulten d'una funció (la funció d'excedent del consumidor) que mesura en diner el guany net (o benestar) del consumidor quan compra una determinada quantitat del bé a un determinat preu; i
• els pagaments per a cada productor resulten d'una funció (la funció de beneficis) que mesura en diner el guany net del productor quan produeix una determinada quantitat del bé i la ven a un determinat preu.

- Un mercat serà sempre el mercat d'un únic bé. A banda de generar pagaments per a consumidors i productors, un mercat genera dos resultats: el preu de mercat del bé i la quantitat total intercanviada del bé. El preu de mercat representa un preu mitjà del preu que fixen els diferents productors.

- El sentit en què s'empra "mercat" en Microeconomia és diferent del que s'entén per "mercat" (consulta http://www.rae.es/ o http://dlc.iec.cat/). Mercat en Microeconomia es refereix a tot model que permet analitzar com les decisions que prenen consumidors i productors determinen el preu de mercat i la quantitat total intercanviada d'un únic bé. En funció de les característiques de consumidors i productors resultarà un mercat o un altre. En els següents temes, ens ocuparem només de 3 tipus de mercat: el mercat monopolístic, el mercat duopolístic i el mercat perfectament competitiu.

- A cada tipus de mercat, s'assumeix que cada consumidor, observant el preu que fixa cada productor, determina només la quantitat del bé que el comprador desitja adquirir. Per tant, les estratègies dels consumidors són quantitats q^d a comprar del bé. Un consumidor que pren el preu del bé com a donat s'anomena consumidor competitiu o preu acceptant. Un consumidor competitiu no es planteja incidir sobre el preu del bé o negociar-lo amb el productor: observa el preu i pren una decisió sobre la quantitat a comprar amb l'objectiu de maximitzar el seu excedent.

- D'altra banda, s'assumeix que cada productor, coneixent el preu que fixen els demés productors, tria el preu a què vol vendre el bé i la quantitat de bé que desitja vendre amb l'objectiu de maximitzar els seus beneficis. Les estratègies dels productors seran parells (p, q^s) consistents en un preu i una quantitat oferta. El que caracteritza un mercat, com a model, són les regles que, partint de les decisions sobre preus i quantitats dels agents que hi ha al mercat, determinen els resultats bàsics del mercat: preu de mercat i quantitat total intercanviada.

- Entendre mercat com a joc implica solucionar-lo, això és, determinar què trien els jugadors i quin són els resultats de les seves eleccions (pagaments, preu de mercat i quantitat total intercanviada). L'equilibri de Nash és la solució que adoptarem. Per això, explicar com els agents prenen decisions als mercats passa per identificar la regla que permet calcular la millor resposta de cada agent en funció de les decisions del altres agents. En el cas dels consumidors, les regles que determinen la millor resposta s'anomenen funcions de demanda. Aquest tema s'ocupa de construir-les i estudiar-les.

Lliçó 2. Funció d'utilitat i funció d'utilitat marginal d'un bé

DEFINICIÓ 1. Una funció d'utilitat U d'un bé d'un consumidor és una regla que determina, per a cada quantitat q del bé, la utilitat o satisfacció $U(q)$ que el consumidor obté consumint les q unitats del bé ("d'un bé" es refereix a la utilitat; "d'un consumidor", a la funció).

- Generalment s'assumeix que el bé es mesura en un continu. Per tant, es pot parlar de 1'57674046 unitats d'un bé, de π unitats o d' $\sqrt{2}$ unitats. Això significa que la quantitat d'un bé és una variable que pren valors en el conjunt de nombres reals no negatius. Utilitzar els nombres reals (i no els naturals) per a mesurar la quantitat d'un bé vol dir que el bé se suposa perfectament divisible. És obvi que els béns no són sempre perfectament divisibles: fer tres trossos d'un cotxe no implica que tinguem 3 terços de cotxe; més aviat, no tenim res. Però podem recórrer a la ficció que el que es compra i ven no és tant el bé com el dret de propietat sobre el bé, que sí és perfectament divisible: un pot comprar o vendre ⅓ de la propietat d'un cotxe.

- Quan es parla de quantitat consumida o produïda d'un bé, cal especificar un interval temporal: no és el mateix consumir 1 litre d'aigua al dia que a l'any. Per aquest motiu, la variable q sobre la que es defineix la utilitat $U(q)$ se suposa mesurada en unitats del bé per unitat de temps (per exemple, litres per setmana o quilograms per dia). La unitat de temps que sigui es considerarà fixada i no se'n parlarà més d'ella.

- No és costum especificar les unitats en què es mesura la utilitat que proporciona el consum d'un bé. Aquí s'assumirà que la utilitat es mesura en diner i s'interpretarà que $U(q)$ és el nombre d'unitats monetàries (per exemple, euros) que fa que el consumidor estigui indiferent entre consumir q unitats del bé i disposar d'$U(q)$ unitats monetàries.

EXEMPLE 2. Sigui $U(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$ una funció d'utilitat d'un bé, on $q \geq 0$. El fet que $U(4) = 20$ vol dir que el consumidor és indiferent entre consumir 4 unitats del bé i tenir 20 unitats monetàries.

REMARCA 3. Interpretar que al consumidor tant li és consumir q unitats del bé com tenir $U(q)$ unitats monetàries permet interpretar $U(q)$ com la quantitat màxima de diner que el consumidor estaria disposat a pagar per tal d'obtenir i consumir la quantitat q del bé.

- Si $U(q)$ és el diner que el consumidor pagaria com a màxim per les q unitats del bé, pot interpretar-se que $U(q)$ és el valor (en diner) per al consumidor de la quantitat q del bé.

- La funció d'utilitat U ajuda al consumidor a prendre decisions. Per exemple, suposem que el consumidor disposa de diners i es planteja comprar la quantitat q del bé. Si el consumidor pot obtenir la quantitat q a canvi de pagar menys d'$U(q)$ unitats monetàries, comprarà la quantitat q del bé, ja que obté un guany net: adquireix una quantitat q del bé que valora en $U(q)$ unitats monetàries i paga una quantitat inferior a $U(q)$. Si ha de pagar exactament $U(q)$, estarà indiferent entre comprar la quantitat q i no comprar-la. Finalment, si ha de pagar més d'$U(q)$, no adquirirà aquesta quantitat del bé, ja que estaria pagant pel bé més del que el valora.

- Com a segon exemple, suposem ara que el consumidor no té diners però que ha de triar una de dues opcions: escollir la quantitat q del bé o escollir x unitats monetàries. Si $x = U(q)$, el consumidor estarà indiferent entre les dues opcions i triarà qualsevol d'elles. Si $x < U(q)$, triarà el bé, ja que el consumidor considera més valuós (en termes de diner) tenir la quantitat q del bé que les x unitats de diner. I si $x > U(q)$, triarà els diners, que ara es consideren més valuosos que la quantitat del bé.

DEFINICIÓ 4. Una funció $f(x)$ és creixent si un augment [disminució] d'x fa augmentar [disminuir] $f(x)$ i decreixent si un augment [disminució] d'x fa disminuir [augmentar] $f(x)$.

- Per tant, U creixent significa que la utilitat $U(q)$ que proporciona un bé al consumidor augmenta a mesura que el consumidor augment el consum q del bé.

REMARCA 5. Les funcions d'utilitat no necessàriament s'assumiran creixents en tot el seu domini, sinó que només se suposaran creixents per als valors inicials de q. Com d'extens sigui aquest interval inicial és arbitrari i dependrà del cas particular considerat.

EXEMPLE 6. La Fig. 1 mostra la representació gràfica de la funció d'utilitat de l'Exemple 2 (si q és un nombre real). En aquest cas, "valors inicials de q" significa l'interval [0, 12]. Partint de q = 0, la utilitat s'incrementa en augmentar la quantitat q; s'assoleix un màxim d'utilitat quan q = 12; i, si augmenta encara més la quantitat, la utilitat decreix contínuament, fins a esdevenir negativa per a $q > 24$. Segons la interpretació que hem assumit d'U, valors negatius d'U indicarien que el consumidor voldria pagar per a no consumir el bé (que, aleshores, esdevindria un mal).

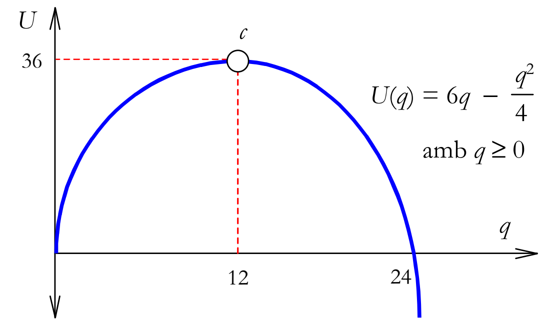


Fig. 1. Representació gràfica d'una funció d'utilitat d'un bé

REMARCA 7. En ocasions, la qüestió rellevant per a un consumidor no és quina utilitat obté sinó en quant varia la utilitat a resultes d'un canvi en la quantitat adquirida d'un bé.

- Per exemple, amb la funció d'utilitat de l'Exemple 2, si el consumidor passa de consumir q = 2 a q = 6, la seva utilitat augmenta en $U(6) - U(2) = 27 - 11 = 16$ unitats. Per tant, si ja tingués 2 unitats del bé, el consumidor adquiriria 4 més si no hagués de pagar més de 16 unitats per elles.

- En canvi, si el consumidor tingués 8 unitats del bé i es plantegés comprar-ne 4 unitats més, la seva utilitat augmentaria només $U(12) - U(8) = 36 - 32 = 4$ unitats. En aquest cas, estaria disposat a pagar menys que abans per les 4 mateixes unitats.

- Això fa que la utilitat addicional que proporciona una mateixa quantitat del bé no sigui sempre la mateixa: partint de $q = 2$, la utilitat que afegeixen 4 unitats més del bé és superior a la utilitat que aquestes mateixes unitats afegirien partint de $q = 8$. Aquesta observació és la base de la teoria del consumidor que es presentarà.

- Atès que hi ha infinites possibles variacions de la quantitat (mitja, una, dues… unitats), en quina centrar-se per a fer l'anàlisi? L'elecció estàndar ha esdevingut no escollir cap variació, sinó considerar una d'infinitesimal. La idea és, de fet, considerar variacions en la quantitat consumida del bé tan petites com vulguem.

DEFINICIÓ 8. Donada una funció d'utilitat U, la utilitat marginal de consumir la quantitat q d'un bé és la utilitat obtinguda, segons U, de "l'última" unitat de la quantitat q.

DEFINICIÓ 9. La funció d'utilitat marginal UMg d'un bé d'un consumidor associada amb una funció d'utilitat U del mateix bé i del mateix consumidor és una regla que determina, per a cada quantitat q del bé, quina és la utilitat marginal de la quantitat q.

- Atès que s'assumeix que q pren valors reals, no hi ha una "última" unitat quan es consumeix una quantitat q del bé (per exemple, no existeix el nombre real més proper a 5 per l'esquerra). Per aquest motiu, la utilitat marginal de consumir la quantitat q és el límit, quan existeix,
$$\lim_{q^* \to q} \frac{U(q) - U(q^*)}{q - q^*}.$$

- En conseqüència, quan q pren valors en el continu, la funció d'utilitat marginal associada amb una funció d'utilitat U és la derivada d'U. Si q prengués valors discrets, $UMg(q) = U(q) - U(q - 1)$. Aquesta diferència és la utilitat imputable a l'última de les q unitats. Així, si la funció de l'Exemple 2 només estigués definida per a nombres naturals, $UMg(4) = U(4) - U(3) = 20 - 63/4 = 17/4$: la quarta unitat aporta utilitat 17/4.

- La derivada de la funció U de l'Exemple 2 (quan q pren valors en el conjunt de nombres reals no negatius) és $\dfrac{\partial U}{\partial q} = 6 - q/2$. Així, la funció d'utilitat marginal, representada a la Fig. 2, és $UMg(q) = 6 - q/2$, per a $q \geq 0$. Els valors d'aquesta funció no tenen un sentit econòmic precís, sinó que donen una certa intuïció de l'impacte sobre la utilitat de modificar "lleugerament" el consum. Amb $UMg(q) = 6 - q/2$, resulta que $UMg(4) = 6 - 4/2 = 4$. El resultat és proper al 17/4 del cas discret anterior però diferent.

- La funció UMg de la Fig. 2 és decreixent: unitats addicionals del bé cada cop aporten menys utilitat. Per exemple, si $q = 2$, el valor $UMg(2) = 5$ pot interpretar-se en el sentit que augmentar "una mica" el consum a partir de les dues unitats del bé fa augmentar 5 unitats la utilitat que ja es tenia en consumir $q = 2$. En canvi, amb $q = 10$, $UMg(10) = 1$ indica que augmentar "una mica" el consum a partir de les 10 unitats del bé fa augmentar només 1 unitat la utilitat que ja es tenia en consumir $q = 10$.

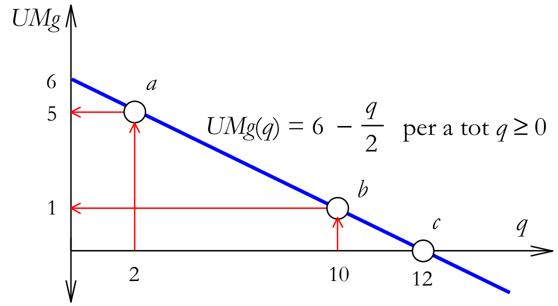


Fig. 2. Funció d'utilitat marginal de la funció d'utilitat de la Fig. 1

- Els punts c de les Figs. 1 i 2 estan relacionats. El punt c a la Fig. 1 indica on la funció d'utilitat assoleix el màxim valor. Com la funció d'utilitat és derivable, el màxim s'obté igualant la derivada $\dfrac{\partial U}{\partial q}$ d'U a zero. D'aquí, $\dfrac{\partial U}{\partial q} = 0$ implica $UMg = 0$. Per tant, la utilitat es maximitza quan la utilitat marginal s'anul·la: quan el consumidor està consumint la quantitat de bé que li dóna la màxima utilitat, variar aquesta quantitat infinitesimalment no altera la utilitat obtinguda (una unitat infinitesimal de més o menys no aporta res).

- La utilitat marginal negativa que resulta de consumir per damunt de la quantitat $q = 12$ significa que cada unitat addicional del bé proporciona utilitat negativa i, així, continuar consumint a partir de $q = 12$ redueix la utilitat (acumulada). Com a conseqüència, a la dreta de $q = 12$ a la Fig. 1, la funció d'utilitat decreix.

REMARCA 10. Integrar una funció és, si fa no fa, la operació inversa de derivar la funció. Això implica que, quan $U(0) = 0$, es pugui recuperar una funció d'utilitat U a partir de la seva funció d'utilitat marginal UMg.

- Per exemple, la integral d'$UMg = 6 - \dfrac{q}{2}$ és $\int UMg = 6q - \dfrac{q^2}{4} + C$, on C és una constant. Si exigim que la integral tingui valor 0 quan $q = 0$, tindrem $C = 0$. D'aquí resulta que la integral de la funció d'utilitat marginal és la funció d'utilitat original.

- La relació entre utilitat i utilitat marginal és més fàcil de veure geomètricament. Per exemple, imaginem que volem determinar a la Fig. 3 quina és la utilitat de $q = 10$. La funció d'utilitat marginal només ens informa directament de la utilitat de la "darrera" de les 10 unitats: és l'alçada de la funció UMg traçada sobre $q = 10$. Però si l'alçada d'UMg expressa la utilitat de cada unitat, sumant totes les alçades s'obtindrà la suma de la utilitat que proporciona cada unitat del bé i, d'aquí, resultarà la utilitat de la quantitat q = 10. Geomètricament, la suma d'alçades des de q = 0 fins a q = 10 és la suma de les àrees A i B, això és, l'àrea de la figura compresa entre els eixos, la funció UMg i la recta vertical traçada sobre q = 10. L'àrea d'A és (5·10)/2; la de B és 1·10. El total és 35, que és justament $U(10) = 6\cdot10 - 100/4 = 60 - 25 = 35$.

PROPOSICIÓ 11. *Si U(0) = 0, aleshores U(q) és l'àrea per sota la funció d'utilitat marginal UMg, per damunt l'eix d'abscisses, a la dreta de l'eix d'ordenades i a l'esquerra de la recta vertical traçada a l'eix d'abscisses sobre el valor q.*

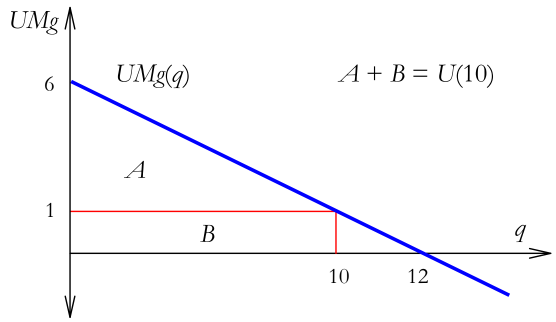


Fig. 3. Il·lustració gràfica de la relació entre utilitat i utilitat marginal

Exercicis de la Lliçó 2

1. Què significa que U(0) = 0?

2. Indica una funció d'utilitat la funció d'utilitat marginal de la qual sigui creixent.

3. (a) Troba la funció d'utilitat marginal de cadascuna de les següents funcions d'utilitat, definides sobre el conjunt de nombres reals positius:
(i) $U(q) = 2q$
(ii) $U(q) = 2 \ln q$
(iii) $U(q) = 10q - 2q^2$
(iv) $U(q) = 2q^2$
(v) $U(q) = 2q^{3/2}$
(vi) $U(q) = 2q^{1/2}$
(vii) $U(q) = 3$.

(b) Representa gràficament cada funció d'utilitat i la seva funció d'utilitat marginal. (c) Determina la utilitat i la utilitat marginal a cada cas, des de l'(i) fins al (vii), quan q = 2.

4. Com és possible que en un interval on una funció d'utilitat creix, la funció d'utilitat marginal decreixi? És possible que totes dues funcions creixin? Què significaria?

5. Per què cal assumir que U(0) = 0 a la Proposició 11?

6. Amb la funció d'utilitat de l'Exemple 2, determina la utilitat de q = 6 directament sobre la gràfica de la funció d'utilitat marginal.

Lliçó 3. Funció de demanda d'un bé d'un consumidor preu acceptant

DEFINICIÓ 1. Sigui $p \geq 0$ el preu d'un bé. Donada una funció d'utilitat U d'un consumidor preu acceptant, l'excedent $EC(p, q)$ del consumidor quan compra la quantitat q del bé a preu p és la diferència $U(q) - pq$ entre la utilitat $U(q)$ per al consumidor de consumir la quantitat q del bé i la despesa pq que el consumidor ha de fer per a adquirir la quantitat q a preu p.

- Vist com a funció, l'excedent d'un consumidor serà la funció $EC(p, q) = U(q) - pq$. Així, per a calcular un excedent, cal saber respecte de quin preu i quina quantitat es fa. L'excedent va lligat a la compra d'un determinada quantitat a un determinat preu.

- El valor $EC(p, q)$ mesura en diner el pagament (en el sentit del Tema 1) per al consumidor de comprar (i consumir) la quantitat q al preu p (atès que se l'assumeix preu acceptant, el consumidor observa p, tria a continuació q i es determina el seu excedent). L'excedent resultaria de restar el cost (en diner) que té adquirir q a preu p (la despesa pq) al benefici (en diner) $U(q)$ que obté consumint la quantitat q del bé.

DEFINICIÓ 2. Un consumidor preu acceptant es diu racional si tria la quantitat demandada que maximitza el seu excedent.

REMARCA 3. Assumint $U(0) = 0$, l'excedent associat amb no comprar és $EC(p, 0) = U(0) - p\cdot0 = 0$. Així, el consumidor pot garantir-se el pagament 0 no comprant. D'aquí que un consumidor racional no triarà comprar una quantitat positiva del bé si l'excedent resultant és negatiu.

DEFINICIÓ 4. La funció de demanda d'un bé d'un consumidor preu acceptant és una regla que assigna, a cada preu p del bé, la quantitat q del bé que maximitza l'excedent del consumidor.

- La funció de demanda pot considerar-se una regla que determina quina és la millor resposta d'un consumidor (quina quantitat d'un bé comprar?) al preu del bé. Per exemple, a la Fig. 14 del Tema 1 (pàgina 16), la funció r_1 que indicaria quina és la millor resposta del jugador 1 a cada estratègia del 2 tindria els següents valors: $r_1(d) = b$, $r_1(e) = b$ i $r_1(f) = c$.

- Quan no es fa explícita l'existència de funcions d'utilitat dels consumidors, s'entén que la funció de demanda d'un bé d'un consumidor determina, per a cada preu p del bé, la quantitat que el consumidor desitja (i pot) comprar del bé (sobreentenent que la quantitat que desitja comprar és aquella que maximitza el seu excedent).

REMARCA 5. Una funció de demanda d'un bé s'expressa mitjançant una funció on la quantitat demandada q^d del bé és la variable dependent (la variable explicada) i el preu p del bé és la variable independent (la variable explicativa).

- Una funció de demanda tindrà la forma $q^d = f(p)$, indicant que p determina q^d. En Economia, la representació gràfica d'una funció de demanda trenca la convenció matemàtica de col·locar la variable independent a l'eix horitzontal, i p es troba a l'eix vertical.

PROPOSICIÓ 6. *Sigui un consumidor preu acceptant que té* $U(q) = \frac{\alpha}{\beta}q - \frac{1}{2\beta}q^2$ *com a funció d'utilitat d'un cert bé, on* α *i* β *són constants positives i q pren valors al conjunt de nombres reals no negatius. Aleshores (1) és la funció de demanda del bé del consumidor.*

$$q^d = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq \frac{\alpha}{\beta} \\ \alpha - \beta p & \text{si } 0 \leq p < \frac{\alpha}{\beta} \end{cases} \tag{1}$$

- *Demostració*. L'obtenció de la funció de demanda es fa en dues etapes: primer es determina per a quins preus la quantitat demandada és zero; i després, pel cas en que la quantitat demandada serà positiva, es calcula l'equació que, en funció del preu, especifica la quantitat demandada. La hipòtesi que el consumidor és preu acceptant significa que p no és una variable objecte de decisió per part del consumidor, qui, per tant, considera el preu p com un valor exogen. En termes matemàtics, això vol dir que p es considerarà, des del punt de vista del consumidor, com una constant sobre la que el consumidor no té cap influència.

- Primer pas: quan és la quantitat demandada zero? Atès que $U(0) = 0$, no comprant el bé el consumidor pot assegurar-se l'excedent $EC(p, 0) = 0$. Per tant, donat el preu p del bé, el valor q^* que maximitza l'excedent satisfà $U(q^*) - pq^* \geq 0$. De manera equivalent, $\frac{\alpha}{\beta}q^* - \frac{1}{2\beta}q^{*2} - pq^* \geq 0$ o, el que és el mateix, $q^*(\frac{\alpha}{\beta} - p - \frac{1}{2\beta}q^*) \geq 0$. El valor $q^* = 0$ compleix aquesta desigualtat. Ara busquem valors de q^* més grans que 0 que satisfan la desigualtat. Aquests valors satisfan $\frac{\alpha}{\beta} - p - \frac{1}{2\beta}q^* \geq 0$; això és, $\frac{\alpha}{\beta} - p \geq \frac{1}{2\beta}q^*$ o, equivalentment, $2\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - p\right) \geq q^*$. Atès que busquem q^* tal que $q^* > 0$, $2\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - p\right) \geq q^*$ implica $2\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - p\right) \geq q^* > 0$. Donat que $\beta \neq 0$, cal que $\frac{\alpha}{\beta} - p > 0$; és a dir, $p < \frac{\alpha}{\beta}$. En suma, si $p < \frac{\alpha}{\beta}$ la quantitat q^* que maximitza l'excedent pot ser positiva; però si $p \geq \frac{\alpha}{\beta}$, la quantitat $q^* = 0$ maximitza l'excedent. Ja tenim una part de la funció de demanda: per a preus iguals o superiors a $\frac{\alpha}{\beta}$, la quantitat demandada és zero ($\frac{\alpha}{\beta}$ és el valor de tall de la funció *UMg* amb l'eix vertical: el 6 a la Fig. 2, on $\alpha = 6$ i $\beta = 1$).

- Segon pas: quan és la quantitat demandada positiva? Part 1: condició de 1r ordre de màxim. Si existeix un valor positiu q^* de q que maximitza EC, la condició necessària per a trobar-lo és que la derivada d'EC respecte de q s'anul·li quan s'avalua a q^*. La derivada d'EC respecte de q és $\frac{\partial EC(p,q)}{\partial q} = \frac{\partial U(q)}{\partial q} - \frac{\partial (pq)}{\partial q} = UMg(q) - p$. Igualant a zero, resulta $UMg(q) = p$. Per tant, si q^* maximitza EC, és necessari que $UMg(q^*) = p$. Essent $U(q) = \frac{\alpha}{\beta}q - \frac{1}{2\beta}q^2$, resulta que $UMg(q^*) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q^*$. Així, la condició $UMg(q^*) = p$ es concreta en $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q^* = p$. Aïllant q^*, s'obté $q^* = \alpha - \beta p$. Aquesta condició determina el valor q^* que, en funció del valor de p, fa màxim l'excedent quan p està entre 0 i $\frac{\alpha}{\beta}$.

- Part 2: condició de 2n ordre de màxim. Finalment, cal comprovar que l'equació trobada $q^d = \alpha - \beta p$ (on s'ha afegit el superíndex ^{d} sobre q per a aclarir que es tracta de quantitat demandada) dóna el valor que maximitza, i no el que minimitza, la funció d'excedent. Això exigeix considerar la derivada segona $\frac{\partial^2 EC(p,q)}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 (pq)}{\partial q^2}$ de la funció d'excedent i comprovar que la derivada segona és negativa quan s'avalua en tot parell (p, q) que compleix la condició necessària $q = \alpha - \beta p$. De fet, atès que $\frac{\partial U(q)}{\partial q} = UMg(q)$ i que $\frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial U(q)}{\partial q}\right)}{\partial q}$, resulta que $\frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^2} = \frac{\partial UMg(q)}{\partial q}$. D'altra banda, atès que $\frac{\partial (pq)}{\partial q} = p$ i que $\frac{\partial^2 (pq)}{\partial q^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial (pq)}{\partial q}\right)}{\partial q}$, resulta que $\frac{\partial^2 (pq)}{\partial q^2} = \frac{\partial p}{\partial q} = 0$, perquè, des de la perspectiva del consumidor, p es considera una constant. Resumint, $\frac{\partial^2 EC(p,q)}{\partial q^2} = \frac{\partial UMg(q)}{\partial q} - 0$. En conseqüència, donat un preu p, la quantitat q^* maximitza l'excedent quan $\frac{\partial^2 EC(p,q^*)}{\partial q^2} < 0$; això és, quan $\frac{\partial UMg(q^*)}{\partial q} < 0$. En paraules: quan la funció d'utilitat és decreixent en el valor q^* que la condició necessària identifica com a candidat a maximitzar l'excedent, la condició necessària és també suficient. La funció d'utilitat marginal és $UMg(q) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q$. La seva derivada és $\frac{\partial UMg(q)}{\partial q} = -\frac{1}{\beta}$, que és un valor negatiu perquè β és una constant positiva. Això vol dir que la funció d'utilitat marginal és decreixent per a tot valor de q i, en particular, per a aquells que són candidats a maximitzar l'excedent. Per consegüent, queda demostrat que (1) és la funció de demanda. La Fig. 4 representa gràficament la funció de demanda obtinguda.■

REMARCA 7. La demostració anterior ha revelat el següent (que és vàlid per a qualsevol funció d'utilitat): si el preu és p, si la quantitat q^* que maximitza l'excedent d'un consumidor preu acceptant se sap que és positiva i si la seva funció d'utilitat marginal és decreixent, la condició que permet calcular q^* estableix que $UMg(q^*) = p$.

- La condició $UMg(q^*) = p$ (utilitat marginal igual a preu) diu que la utilitat en diner que dóna l'última unitat que integra la quantitat q^* és igual al cost en diner d'adquirir-la (q^* s'obté intersectant la funció *UMg* amb la recta horitzontal traçada sobre el valor p).

- La Fig. 5 il·lustra perquè el compliment de la condició $UMg(q^*) = p$ fa que q^* maximitzi l'excedent. La funció UMg representada és la que correspon a la funció d'utilitat $U(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$. Per tant, UMg és la mateixa funció que la representada a la Fig. 2.

- A la Fig. 5, triem un valor de p per al que sabem que la quantitat demandada serà positiva; per exemple, $p = 3$. Si tracem la recta horitzontal que passa per $p = 3$, la intersecció amb la funció d'utilitat marginal es produeix quan $q = 6$: aquest és el valor que satisfà la condició $UMg(q) = p$. Justament, $q = 6$ és la quantitat demandada quan $p = 3$, ja que $q^d = 12 - 2p = 12 - 2{\cdot}3 = 6$. Per tant, s'ha obtingut el valor $q = 6$ calculant quin valor de q que fa UMg sigui igual a p. De fet, quan $q = 6$, $UMg(6) = 6 - 6/2 = 3$.

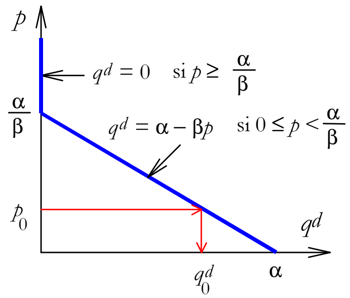


Fig. 4. Una funció de demanda lineal

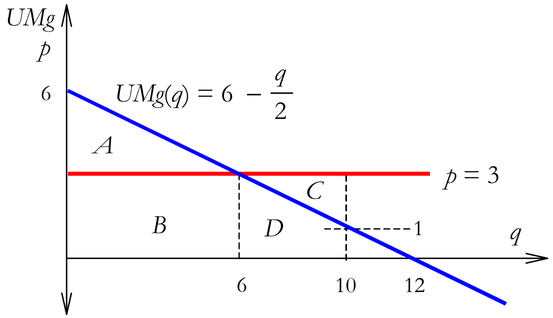


Fig. 5. Perquè $q = 10$ no maximitza l'excedent si $p = 3$

- Com és que el valor q^* de q que maximitza l'excedent és tal que $p = UMg(q^*)$? Analitzem què passa si, amb $p = 3$, el consumidor compra una quantitat diferent de $q = 6$. Es tracta de comprovar que el consumidor no maximitza el seu excedent. Seguint la Fig. 5, suposem que el consumidor, a preu $p = 3$, decideix comprar $q = 10$. Per la Proposició 11 de la Lliçó 2, la utilitat que obté consumint $q = 10$ és la suma de les àrees A, B i D. L'àrea A és la base 6 per l'alçada (6–3) tot dividit per dos. Resultat: 9. L'àrea B és base 6 per alçada 3. Total: 18. L'àrea C és base (10 – 6) per alçada (3 – 1) dividit per 2. Això dóna 4. L'àrea $C + D$ és 12: la base (10 – 6) per l'alçada 3. L'àrea D és l'àrea $C + D$ (que és 12) menys l'àrea de C (que és 4). Total: 8. Així, la suma de les àrees A, B i D és 9 + 18 + 8 = 35, que coincideix amb $U(10) = 6{\cdot}10 - 10^2/4 = 35$.

- La despesa quan es compra $q = 10$ a preu $p = 3$ és 30. Aquesta despesa és la suma de les àrees B, C i D, suma igual a la base $q = 10$ per l'alçada $p = 3$. Per consegüent, l'excedent $E(3, 10)$ quan es compra a preu $p = 3$ la quantitat $q = 10$ és 35 (utilitat) menys 30 (despesa), igual a 5 (segons la fórmula, $E(3, 10) = U(10) - 3{\cdot}10 = 35 - 30$) . En resum: (i) la utilitat de $q = 10$ és $A + B + D$; (ii) la despesa necessària per a comprar $q = 10$ quan el preu és $p = 3$ és $B + C + D$; (iii) l'excedent quan es compra $q = 10$ a preu $p = 3$ és $A + B + D$ menys $B + C + D$. Així, a la Fig. 5, l'excedent $E(3, 10)$ és $A - C$: 9 menys 4.

- És, però, 5 el màxim excedent que el consumidor pot aconseguir si $p = 3$? La clau per a respondre la pregunta rau en determinar quin excedent obté el consumidor per l'última unitat quan consumeix $q = 10$. Això implica comparar la utilitat marginal quan $q = 10$ (l'alçada de la funció d'utilitat marginal al punt $q = 10$ de l'eix d'abscisses) amb la despesa marginal quan $q = 10$ (el que costa adquirir l'última unitat, que és el preu $p = 3$). Clarament, a la Fig. 5, $1 = UMg(10) < p = 3$: la utilitat (mesurada en diner) que obté el consumidor per l'última unitat del bé és inferior al cost (mesurat en diner) d'obtenir-la. Per tant, <u>si el consumidor vol maximitzar el seu excedent, no hauria de comprar aquesta unitat, perquè l'excedent que obté d'ella és negatiu</u>: paga 3 per una unitat que valora en 1.

- De fet, partint de $q = 10$, una apropiada reducció del consum del bé fa augmentar l'excedent, d'on resulta que amb $q = 10$ no se'l maximitza. Per exemple, amb $q = 9$, l'excedent és $E(3, 9) = U(9) - 3{\cdot}9 = 33'75 - 27 = 6'75 > 5 = E(3, 10)$. Amb $q = 8$, l'excedent també és més gran que amb $q = 10$.

- Així, hi ha dos arguments que demostren que $q = 10$ no maximitza l'excedent quan $p = 3$. Primer, la utilitat marginal quan $q = 10$ és inferior al preu del bé. I segon, l'excedent comprant $q = 8$ és superior a l'excedent quan $q = 10$. <u>Aquests dos arguments continuen sent vàlids per a qualsevol valor $q > 6$</u>. En conclusió, quan $p = 3$, cap valor de q superior a 6 (el valor de q que iguala p i UMg) no maximitza l'excedent del consumidor.

- Què succeeix per a valors de q inferiors a 6? Considerem el cas $q = 3$, representat a la Fig. 6. Ara, la utilitat $UMg(3) = 4'5$ obtinguda de l'última de les 3 unitats (l'alçada fins al punt g) és superior al preu $p = 3$ del bé. Això indica que el consumidor està obtenint un excedent positiu de l'última unitat consumida (distància entre g i h) i que augmentaria l'excedent total comprant "una mica més". De fet, per la continuïtat de la funció d'utilitat marginal, $UMg(3) = 4'5$ significa que la següent unitat atorgarà una utilitat propera a 4'5 i, en tot cas, superior al preu $p = 3$. Així, afegint una unitat més a $q = 3$ el consumidor incrementa el seu excedent. Conclusió: si $p = 3$, l'excedent no es maximitza comprant la quantitat $q = 3$. Que $q = 3$ no maximitza l'excedent si $p = 3$ també es demostra observant que, a la Fig. 6, incrementant la quantitat de $q = 3$ a $q = 6$, el consumidor incrementa el seu excedent en l'àrea del triangle agh.

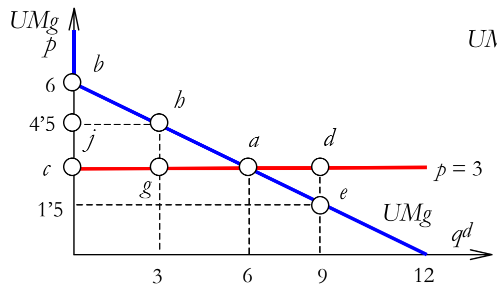


Fig. 6. Perquè $q = 3$ no maximitza l'excedent si $p = 2$

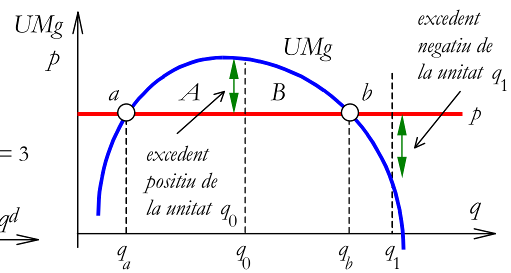


Fig. 7. Cas d'UMg amb tram creixent

REMARCA 8. La condició $UMg = p$ no és suficient per a determinar la quantitat que maximitza l'excedent si la funció d'utilitat marginal no és decreixent.

- La Fig. 7 mostra una funció d'utilitat marginal amb un tram creixent. Aquesta funció indica que, inicialment, cada unitat addicional del bé aporta cada cop més utilitat (utilitat marginal creixent) però, a partir d'un cert valor, cada nova unitat consumida del bé aporta cada cop menys utilitat (utilitat marginal decreixent), fins que eventualment unitats addicionals acaben restant utilitat. L'efecte sadollament és una justificació versemblant d'escollir funcions d'utilitat marginal que, eventualment, es tornen decreixents: per a tot bé hi haurà un nivell de consum que atipa el consumidor i fa que cada cop obtingui menys utilitat de consumir una unitat més.

- Fixat el preu p que s'indica a la Fig. 7, hi ha dos valors que satisfan la condició $UMg = p$, ja que hi ha dos punts on s'intersecten la funció UMg i la recta horitzontal traçada sobre el valor p de l'eix d'ordenades. Els punts es corresponen amb les quantitats q_a i q_b. Totes dues satisfan la condició de 1r ordre $UMg = p$ per a trobar un màxim de la funció d'excedent. La condició de 1r ordre selecciona els candidats on buscar el(s) valor(s) que maximitza(en) la funció d'excedent. La de 2n ordre permet identificar, entre aquests candidats, el(s) valor(s) que maximitza(en) la funció d'excedent.

- El cas és que q_a no satisfà la condició de 2n ordre, que diu que la derivada d'UMg avaluada per al valor que és candidat a maximitzar la funció d'excedent ha de prendre un valor negatiu. La Fig. 7 evidencia que la funció UMg creix en el punt on $q = q_a$. Aquest fet implica que la derivada d'UMg avaluada quan $q = q_a$ és positiva.

- Que q_a no maximitza l'excedent es pot comprovar gràficament a la Fig. 7. L'explicació rau en el fet que cada unitat entre q_a i q_b proporciona una utilitat marginal superior al preu. Això significa que la compra de cadascuna d'aquestes aportaria un excedent positiu a l'excedent total acumulat. Per exemple, la compra a preu p de la unitat identificada amb q_0 a la Fig. 7 proporciona l'excedent que indica la doble fletxa. L'excedent d'aquesta unitat és positiu perquè la utilitat que aporta (l'alçada de la funció UMg traçada sobre el valor q_0) és superior al cost que implica adquirir la unitat (el preu p, que és el cost monetari d'adquirir cada unitat). Per tant, comprar q_a a preu p no maximitza l'excedent perquè comprar qualsevol quantitat entre q_a i q_b aporta excedent. En particular, si es comprés q_b en comptes de q_a l'excedent augmentaria en l'àrea $A + B$, que és la suma dels excedents que aportarien totes les unitats entre q_a i q_b.

- Aquest raonament demostra que cap valor de q entre q_a i q_b no maximitza l'excedent. L'Exercici 2 demana comprovar perquè cap valor a l'esquerra de q_a no el maximitza. I què succeeix a la dreta de q_b? El raonament és idèntic al que demostra perquè, a la Fig. 5, $q = 10$ no maximitza l'excedent quan $p = 3$: totes les unitats a la dreta de q_b donen un excedent negatiu i, en conseqüència, redueixen l'excedent total que s'obtindria a q_b. Per exemple, la compra de l'última unitat de la quantitat q_1 indicada a la Fig. 7 implica obtenir un excedent negatiu per aquella unitat (indicat per la doble fletxa, que assenyala la distància vertical, traçada sobre q_1, entre UMg i el preu p).

REMARCA 9. La Proposició 6 ofereix una justificació de l'anomenada "llei de la demanda", segons la qual hi ha una relació inversa entre el preu d'un bé i la quantitat demandada del bé per part d'un consumidor preu acceptant.

- Per la Proposició 6, un consumidor preu acceptant que tracti de maximitzar el seu excedent triarà la quantitat comprada d'acord amb una funció de demanda que estableix que, per a preus suficientment baixos (inferiors a α/β a la funció de demanda de la Fig. 4), el preu i la quantitat demanda es mouen en direccions oposades: un increment de p provoca una reducció de q^d; i una reducció de p provoca un augment de q^d. La relació inversa entre p i q^d (la "llei de la demanda") és la propietat més característica d'una funció de demanda.

- La funció de demanda obtinguda a la Proposició 6 satisfà, de fet, una versió feble de la "llei de la demanda", perquè per a preus suficientment grans, la quantitat és sempre zero i, per tant, la quantitat demandada no respon a tots els canvis en p. La versió feble de la "llei de la demanda" diu que una reducció de p no pot reduir q^d (de forma que q^d augmenta o queda igual) i que un augment de p no pot augmentar q^d (que disminueix o queda igual). Si només considerem com a rellevants els preus per als quals la quantitat demandada és positiva, llavors no és gaire violent mantenir que una funció com ara (1) satisfà la "llei de la demanda".

DEFINICIÓ 10. La funció inversa de demanda d'una funció de demanda que satisfà la "llei de la demanda" és la funció obtinguda quan s'aïlla p i es posa p en funció de q.

- Una funció de demanda que satisfà la "llei de la demanda" és decreixent. Per exemple, la funció de demanda $q^d = 1/p$ és sempre decreixent. Aquest tipus de funció és invertible: de la mateixa que manera que un únic valor de p determina un únic valor q^d, cada valor q^d pot ser associat amb un únic preu p. Al cas anterior, $p = 1/q^d$, que és la funció inversa de demanda.

- La funció de demanda (1) és invertible (té funció inversa de demanda) només per a valors de p entre 0 i α/β. Per a aquests preus, l'expressió de la funció de demanda és $q^d = \alpha - \beta p$. Per tant, la funció inversa de demanda, per a q^d entre 0 i α, serà $p = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} q^d$.

  La funció (1) no és invertible per a valors de p superiors α/β, perquè la funció no lliga el valor $q^d = 0$ amb un únic preu sinó amb un conjunt infinit de preus. Per tant, la inversa d'(1) en el tram on $p > \alpha/\beta$ no és una funció sinó una correspondència, ja que associaria amb $q^d = 0$ no un preu sinó un conjunt de preus: tots aquells preus que fan que la quantitat demandada sigui 0.

CONVENCIÓ 11. Quan es considerin funcions de demanda del tipus (1), l'expressió "funció inversa de demanda" es referirà a l'expressió $p = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta} q^d$, on q^d estarà definida entre 0 i α.

CONVENCIÓ 12. Quan es presenti una equació del tipus "$q^d = \alpha - \beta p$" com a funció de demanda, s'entendrà que l'equació determina la quantitat demandada <u>només</u> quan p satisfà $0 \leq p < \frac{\alpha}{\beta}$ i que, quan p satisfaci $p \geq \frac{\alpha}{\beta}$ (cas en què q^d prendria, segons la fórmula, un valor negatiu), s'entendrà que la quantitat demandada és zero. Les funcions de demanda que prenen la forma $q^d = \alpha - \beta p$ s'anomenaran <u>funcions de demanda lineals</u>.

REMARCA 13. <u>Les funcions inverses de demanda poden interpretar-se com a funcions d'utilitat marginal</u>.

- Aquesta observació ha de ser evident per al cas de funcions lineals. La Proposició 6 estableix que les funcions de demanda lineals $q^d = \alpha - \beta p$ provenen de funcions d'utilitat del tipus $U(q) = \frac{\alpha}{\beta}q - \frac{1}{2\beta}q^2$. La funció d'utilitat marginal d'aquest tipus de funció d'utilitat pren la forma $UMg(q) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q$. Atès que la funció de demanda s'obté d'aplicar la condició $UMg(q) = p$, si reemplacem $UMg(q)$ per p a la funció d'utilitat marginal resulta $p = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q$, que és justament la funció inversa de demanda.

- La lectura estàndar d'una funció de demanda és <u>horitzontal</u>: donat un preu (com ara p_0 a la Fig. 4), la funció determina la quantitat demanda (q_0^d a la Fig. 4). Per exemple, a la funció $q^d = 12 - 2p$, si $p_0 = 5$ aleshores $q^d{}_0 = 12 - 2{\cdot}5 = 2$. La manera en què s'ha generat una funció de demanda permet interpretar que, si $p_0 = 5$, el consumidor a qui s'adscriu la funció de demanda maximitzarà el seu excedent adquirint la quantitat $q^d{}_0 = 2$.

- La funció inversa de demanda permet una lectura o interpretació <u>vertical</u> d'una funció de demanda: donada una quantitat (com ara q_0^d a la Fig. 4), l'alçada fins a la funció de demanda (la distància equivalent al valor p_0 a la Fig. 4) indica el màxim que el consumidor està disposat a pagar per l'última unitat de la quantitat q_0^d (també podria interpretar-se que p_0 és el preu màxim per unitat que el consumidor estaria disposat a pagar per a adquirir la quantitat q_0^d). Per exemple, amb $q^d = 12 - 2p$, la funció inversa seria $p = 6 - q^d/2$. Així, el fet que per a $q^d{}_0 = 2$ el preu corresponent sigui $p_0 = 6 - 2/2 = 5$ s'interpreta en el sentit que el consumidor està disposat a pagar com a màxim el preu $p = 5$ per la unitat 2 (disposició consistent amb el fet que $UMg(2) = 5$).

- També podríem interpretar que si el consumidor hagués de comprar la quantitat $q_0^d = 2$, el preu més alt que el faria estar disposat a comprar aquesta quantitat és $p_0 = 5$. És obvi que a un preu més petit també estaria disposat a comprar aquesta quantitat i encara més: per això es parla del preu més alt que el consumidor pagaria. D'altra banda, qualsevol preu més alt ja no induiria el consumidor a comprar $q_0^d = 2$, sinó menys: si $p = 5 + \varepsilon$, on ε és qualsevol nombre real positiu, aleshores $q^d = 12 - 2(5 + \varepsilon) = 12 - 10 - 2\varepsilon = 2 - 2\varepsilon < 2$ i, en conseqüència, a preu $p = 5 + \varepsilon$ el consumidor ja no voldria adquirir la quantitat $q = 2$. En resum, <u>les funcions inverses de demanda es poden interpretar com a indicadors de la disposició a pagar pels béns</u>.

- Les raons intuïtives que s'al·leguen per a justificar la "llei de la demanda" són essencialment dues. Una, un <u>efecte substitució</u>: quan el preu d'un bé X augmenta, amb les altres coses iguals, els béns similars a X s'abarateixen en comparació amb X i, per tant, hi ha un incentiu a substituir part del consum d'X per consum d'aquests altres béns. Per exemple, si el preu dels bolígrafs blaus augmenta, és previsible que això condueixi a un trasvàs de consum dels bolígrafs blaus cap als bolígrafs negres.

- I dues, un <u>efecte renda</u>: quan el preu d'un bé augmenta, amb les altres coses iguals (entre elles, la renda monetària del consumidor), el poder adquisitiu del consumidor disminueix. Atès que el consumidor té menys capacitat de compra, tendirà a reduir el consum de tots els béns i, en particular, el consum del bé que ha augmentat de preu.

- La visió d'una funció de demanda d'un bé com una regla que determina la disposició a pagar pel bé permet donar una altra justificació de la "llei de la demanda": en la mesura que cada nova unitat d'un bé provoca un impacte cada cop més petit sobre la utilitat del consumidor, és necessari un preu cada cop més baix per a induir-lo a adquirir més quantitat del bé.

- Que les funcions de demanda i d'utilitat marginal siguin en essència la mateixa cosa fa que <u>la "llei de la demanda" equivalgui a assumir que la utilitat marginal és decreixent</u>.

REMARCA 14. És convenient dividir l'obtenció d'una funció de demanda d'un consumidor preu acceptant en dues etapes: primer, es determina per a quins preus la quantitat demandada pel consumidor és zero; i després, pel cas en què la quantitat demandada serà positiva, es calcula l'equació que, en funció del preu, dicta quina serà la quantitat demandada.

EXEMPLE 15. Amb funció d'utilitat d'un bé $U(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$, la funció d'excedent del consumidor resultant és $EC(p, q) = \left(6q - \frac{q^2}{4}\right) - pq$. Amb aquesta informació, la funció de demanda del bé es calcularia seguint la demostració de la Proposició 6.

- Primer pas: <u>quan és la quantitat demandada zero</u>? Atès que $U(0) = 0$, no comprant el bé el consumidor pot assegurar-se l'excedent $EC(p, 0) = 0$. Per tant, el valor q^* que, donat el preu p del bé, maximitza l'excedent és tal que $6q^* - \frac{q^{*2}}{4} - pq^* \geq 0$. De manera equivalent, $q^*(6 - p - \frac{q^*}{4}) \geq 0$. El valor $q^* = 0$ satisfà aquesta desigualtat. Buscant valors de q^* més grans que 0 que satisfan la desigualtat, resulta que aquests valors han de complir $6 - p - \frac{q^*}{4} \geq 0$; això és, $24 - 4p \geq q^* > 0$. Així, cal que $24 - 4p > 0$; és a dir, $p < 6$. En resum, si $p < 6$ no queda descartat que algun valor positiu de q maximitzi l'excedent; però si $p \geq 6$, $q = 0$ maximitza l'excedent. Ja tenim una part de la funció de demanda: per a preus iguals o superiors a 6, la quantitat demandada és zero.

- Segon pas: <u>quan és la quantitat demandada positiva</u>? Si existeix un valor positiu q^* de q que maximitza EC, la condició necessària per a trobar-lo és que la derivada d'EC respecte de q s'anul·li quan s'avalua a q^*. La derivada d'EC respecte de q és $\frac{\partial EC(p,q)}{\partial q} = \frac{\partial U(q)}{\partial q} - \frac{\partial (pq)}{\partial q} = UMg(q) - p$. Igualant a zero, resulta $UMg(q) = p$. Per tant, si q^* maximitza EC, és necessari que $UMg(q^*) = p$. Essent $U(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$, $UMg(q^*) = 6 - \frac{q^*}{2}$ o, de manera equivalent $6 - \frac{q^*}{2} = p$. Aïllant q^*, s'obté $q^* = 12 - p$. Atès que la funció d'utilitat marginal és decreixent, aquesta és la condició que determina el valor q^* que, en funció del valor de p, fa màxim l'excedent quan p està entre 0 i 6.

- En resum, la <u>funció de demanda</u> resultant és

$$q^d = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 6 \\ 12 - 2p & \text{si } 0 \leq p < 6 \end{cases}$$

on s'ha posat el superíndex ^{d} sobre q per a aclarir que es tracta de quantitat demandada. Aquest resultat és consistent amb la Proposició 6, ja que la funció d'utilitat de l'Exemple 15 és el cas on $\frac{\alpha}{\beta} = 6$ i $\frac{1}{2\beta} = \frac{1}{4}$, d'on tenim $\beta = 2$ i $\alpha = 12$ (el 6 misteriós no és més que α/β) .

Exercicis de la Lliçó 3

1. (i) Amb la funció d'utilitat $U(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$ i $p = 2$, comprova, sense calcular el valor que maximitza l'excedent del consumidor, que ni $q = 9$ ni $q = 7$ maximitzen l'excedent. (ii) Troba a continuació el valor que el maximitza.

2. A la Fig. 7, per què cap valor de q_a inferior a q no maximitza la funció d'excedent?

3. Demostra la Proposició 6 quan $\alpha = \beta = 1$.

4. (i) Què significa que una funció de demanda expressi una relació inversa entre preu i quantitat demandada? (ii) Què justifica aquesta relació?

5. Calcula la funció de demanda si la funció d'utilitat és: (i) $U(q) = 10q - q^2/2$; (ii) $U(q) = q^2$; (iii) $U(q) = 2$; (iv) $U(q) = 2q$; i *(v) $U(q) = \ln q$.*

6. (i) Per què $q^d = 10 - 2p$ pot ser considerada una funció de demanda? Indica una que no ho pugui ser i explica perquè. (ii) Representa gràficament la funció de demanda $q^d = 10 - 2p$. (iii) Indica quina és la quantitat demandada si el preu és 10 i quina és la variació de la quantitat demanda si el preu es duplica. (iv) Determina tots els punts de la funció on la despesa és 8. (v) Obté la funció inversa de demanda i representa-la gràficament.

7. Obté les funcions inverses de les funcions de demanda: (i) $q^d = 100 - 5p$; (ii) $q^d = 10 - p/2$; (iii) $q^d = 10/p$; (iv) $q^d = 1 + 10/p$; i (v) $q^d = 10/p - p$.

8. (i) Troba l'expressió de la funció de demanda lineal que passa pels punts $(p, q^d) = (0, 10)$ i $(p, q^d) = (6, 0)$. (ii) Quin és el preu més petit que fa que $q^d = 0$? (iii) I q^d si $p = 0$? (iv) Indica una funció d'utilitat que origini la funció de demanda.

Lliçó 4. Canvis d'una funció de demanda d'un bé d'un consumidor

REMARCA 1. La Fig. 8 recapitula la feina feta fins ara. És necessari tenir present l'esquema de la Fig. 8 perquè la funció de demanda d'un bé d'un consumidor preu acceptant s'ha obtingut a l'empara d'una hipòtesi fins ara no feta explícita: <u>que la funció d'utilitat estava construïda fixant tots els factors que són susceptibles de modificar la disposició del consumidor a pagar pel bé</u>.

- Per exemple, quan $U(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$ es presenta com a funció d'utilitat d'un bé d'un consumidor, s'han fixat totes les circumstàncies que el consumidor considera rellevants per a determinar la seva disposició a pagar pel bé: la seva renda monetària (la quantitat de diner que pot dedicar a consumir béns), els preus d'altres béns, les expectatives futures sobre el preu del bé, les modes, la publicitat, l'estat de salut, l'estat d'ànim, el règim de pluges, l'estació de l'any, el seu coneixement sobre les característiques del bé i les d'altres béns similars, etc. El llistat és potencialment infinit: el consumidor dirà què considera rellevant per a determinar el que vol pagar pel bé.

- Tots aquests factors s'han suposat fixats a l'hora de definir la funció d'utilitat i, per aquest motiu, no apareixen quan s'especifica la funció: l'equació $U(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$ s'entén que inclou els efectes d'aquests factors a l'hora de computar la utilitat.

- Aquesta situació la podem entendre més bé invocant funcions de vàries variables. Per exemple, sigui $y = F(v, x, z) = 2v + xz$. Fixem el valor de v i z: per exemple, $v = 5$ i $z = 3$. Si ara només permetem que x varïi, podem construir una funció on les úniques variables són x i y. De fet, fixant $v = 5$ i $z = 3$ a $y = 2v + xz$ resulta la relació $y = 10 + 3x$, de forma que queda definida una funció $y = f(x)$, on $f(x) = 10 + 3x$. Ara bé: si canviem els valors fixats de v o z, la relació resultant entre x i y canvia. Per exemple, si z passa de 3 a 6, la nova funció que lliga x amb és $y = 10 + 6x$. Després del canvi en el valor de z, els canvis en x tenen més impacte en y que abans.

- En el model sobre el consumidor presentat passa una cosa similar: en comptes d'especificar com a funció d'utilitat una funció completa com la F (on apareixen <u>totes</u> les variables rellevants per a determinar la utilitat), hem començat especificant una funció parcial com la f (on s'han <u>fixat</u> els valors de totes les altres variables rellevants).

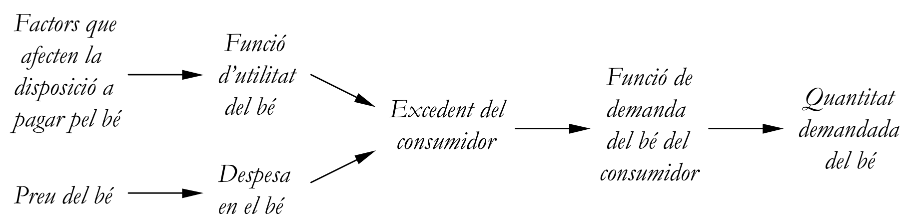


Fig. 8. De què va el Tema 2 (què hi ha darrere la presa de decisions d'un consumidor)

➤ Aquesta lliçó pretén avançar algunes respostes a la pregunta de <u>què succeeix amb una funció de demanda si s'alteren aquells factors que s'han considerat fixats en el moment de definir la funció d'utilitat</u>.

REMARCA 2. <u>Un canvi en el preu del bé no provoca cap canvi en la funció de demanda del bé</u>, sinó (a tot estirar) un canvi en la quantitat demandada.

➤ La raó és que la funció de demanda precisament estableix els efectes, sobre la quantitat demandada, d'un canvi en el preu del bé: canviar el valor de la variable independent (el preu del bé) no fa canviar la funció (la funció de demanda), sinó el valor que la funció atribueix a la variable dependent (la quantitat demandada). Recuperant l'exemple anterior $y = f(x) = 10 + 3x$, si x varia això no fa variar la funció f sinó el valor de la funció f: si x passa d'1 a 2, y passa de 13 a 16, però res no li passa a la funció $f(x) = 10 + 3x$, que la continuem aplicant per a determinar els valors d'y.

➤ Gràficament, <u>un canvi en el preu del bé provoca un desplaçament al llarg de la funció de demanda el bé i no un canvi de la funció</u>. Per exemple, a les Figs. 9 i 10, es pot interpretar que l'augment del preu de p_0 a p_1 provoca un desplaçament al llarg de la funció de demanda, del punt a al punt b, ja que el preu p_0 implica que la quantitat demanda és $q^d{}_0$ (i això ens situa al punt a) i el a preu p_1 implica que la quantitat demanda és $q^d{}_1$ (i això ens situa al punt b).

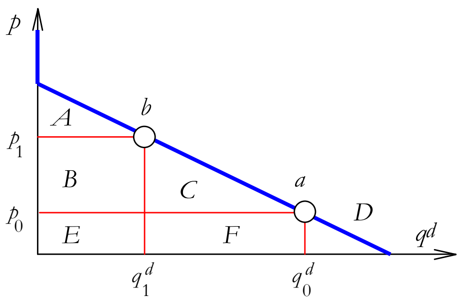


Fig. 9. Una funció de demanda lineal

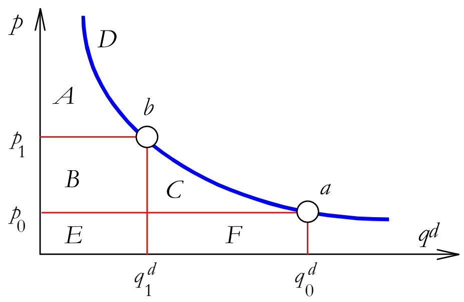


Fig. 10. Una funció de demanda no lineal

➤ La validesa de la Remarca 2 requereix <u>assumir que la funció d'utilitat d'un bé no depèn del preu del bé</u>. Aquesta assumpció exclou el cas del comportament <u>esnob</u>, que fa que el que un consumidor està disposat a pagar per un bé estigui condicionat pel preu del bé. La raó de condicionar la utilitat al preu del bé és que el consumidor considera que quan compra un bé a preu alt compra també el prestigi associat amb poder pagar un preu alt, de forma que comprar a preus baixos és una mena d'estigma que el consumidor desitja evitar. Comportaments d'aquesta mena estan presents en la compra d'obres d'art, on l'augment del preu es considera símptoma de l'augment del valor de les obres i, per tant, indueix els compradors que típicament adquireixen obres d'art a estar disposat a pagar més per obres que augmenten de preu.

➤ Si les funcions d'utilitat d'un bé no depenen del preu del bé, aleshores canvis en el preu no alteren la funció de demanda. Com a il·lustració, sigui $U(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$ la funció d'utilitat d'un bé d'un consumidor preu acceptant i sigui $p = 1$. En aquest cas, la funció d'excedent és $EC = 6q - \frac{q^2}{4} - 1\cdot q$. El valor que maximitza l'excedent s'obté de derivar EC i igualar a zero. La derivada d'EC és $\frac{\partial EC}{\partial q} = 5 - \frac{q}{2}$. Per tant, $q = 10$ maximitza l'excedent quan $p = 1$. Això vol dir que la funció de demanda del bé del consumidor assigna el valor $q^d = 10$ a la quantitat demandada quan $p = 1$. De fet, per la Lliçó 3 sabem que, amb funció d'utilitat $U(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$, la funció de demanda és

$$q^d = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 6 \\ 12 - 2p & \text{si } 0 \leq p < 6. \end{cases}$$

D'aquí que $p = 1$ impliqui que la quantitat demandada serà $q^d = 12 - 2\cdot 1 = 10$. Si ara el preu augmenta fins a $p = 2$, la funció d'excedent és $EC = 6q - \frac{q^2}{4} - 2\cdot q$. En aquest cas, $q = 8$ maximitza l'excedent, valor que s'obté substituint $p = 2$ a la funció de demanda. Com a resultat, l<u>a modificació del preu del propi no ha alterat la funció de demanda del bé sinó la quantitat demandada del bé</u>.

➤ D'altra banda si el preu fos $p = 7$ i hagués augmentat a $p = 8$, la quantitat demandada no s'hauria modificat: s'hauria mantingut a zero. Aquest exemple il·lustra l'"a tot estirar" de la Remarca 2: un canvi en el preu del bé no modificarà la funció de demanda del bé sinó, <u>en determinades ocasions</u>, la quantitat demandada del bé.

REMARCA 3. L'únic que <u>pot</u> provocar un canvi de la funció de demanda d'un bé és un canvi de la funció d'utilitat marginal del bé del consumidor.

➤ Què pot causar un canvi d'una funció d'utilitat marginal d'un bé? Simplement: tot el que modifiqui la disposició a pagar pel bé.

➤ En definir la funció d'utilitat d'un bé, tots els factors susceptibles d'afectar la disposició a pagar pel bé es mantenen constants. Un canvi d'algun d'aquests factors, és previsible que alteri la funció d'utilitat. En la mesura que la funció de demanda és essencialment una funció d'utilitat marginal, <u>els canvis d'una funció d'utilitat que realment importen són aquells que afecten la funció d'utilitat marginal</u>: canvis d'una funció d'utilitat que no afectin la funció d'utilitat marginal (sumar o restar una constant, per exemple) no afecten la funció de demanda.

REMARCA 4. Produït un canvi en algun factor que potencialment pugui afectar al que el consumidor està disposat a pagar pel bé, cal <u>discórrer l'efecte previsible d'aquest canvi sobre el que el consumidor està disposat a pagar per cada unitat del bé</u>.

- Si el canvi en el factor suggereix que el consumidor està disposat a pagar més per cada unitat del bé, la funció d'utilitat marginal es desplaçarà a la dreta (potser parcialment) i la funció de demanda també es desplaçarà (potser parcialment) a la dreta. En aquest cas, a cada preu del bé, el consumidor estarà disposat a comprar més (justament, perquè valora més cada unitat de bé).

- En general, tots els canvis en variables diferents del preu del bé que estimulin al consumidor a comprar més, desplacen la funció de demanda del bé cap a la dreta. Canvis que el consumidor entengui com a positius sobre el seu desig de consumir porten a un desplaçament cap a la dreta de la funció de demanda. Per exemple, en el cas d'un consumidor que es compra el primer cotxe, les seves funcions de demanda de béns lligats a l'ús del cotxe tendiran a desplaçar-se cap a la dreta, com ara la funció de demanda de benzina, de mecànics, de serveis d'assegurança, d'accessoris del cotxe, de clubs d'automobilistes, de places de pàrquing, d'autopistes de peatge… I també previsiblement en el cas de les funcions de demanda de béns el consum dels quals l'ús del cotxe facilita: visites turístiques, béns venuts a hipermercats, activitats culturals…

- Si el canvi en el factor suggereix que el consumidor està disposat a pagar menys per cada unitat del bé, la funció d'utilitat marginal es desplaçarà a l'esquerra (potser parcialment) i la funció de demanda també es desplaçarà (potser parcialment) a l'esquerra. En tal cas, a cada preu del bé, el consumidor estarà disposat a comprar menys (justament, perquè valora menys cada unitat de bé).

- En general, tots els canvis en variables diferents del preu del bé que estimulin al consumidor a comprar menys, desplacen la funció de demanda del bé cap a l'esquerra. Canvis que el consumidor entengui com a negatius sobre el seu desig de consumir porten a un desplaçament cap a l'esquerra de la funció de demanda. La pèrdua del cotxe per un accident, per exemple, tendiria, mentre no es reemplacés, a generar els efectes contraris als assenyalats anteriorment en el cas de l'adquisició.

- També és possible que la modificació de la funció de demanda consisteixi en una rotació: si el canvi en el factor indueix a comprar més per a preus superior a un cert valor p^*, però indueix a comprar menys per a preus inferiors a p^*, la nova funció de demanda rodarà al voltant del punt de l'antiga funció de demanda on el preu és p^*.

EXEMPLE 5. Suposem que la funció d'utilitat $U_0(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$ canvia a $U_1(q) = 8q - \frac{q^2}{4}$. La funció d'utilitat marginal canvia d'$UMg_0(q) = 6 - \frac{q}{2}$ a $UMg_1(q) = 8 - \frac{q}{2}$. Si es representen gràficament, la segona funció es troba a la dreta de la primera, de forma que pot interpretar-se que el canvi de la funció d'utilitat desplaça la funció d'utilitat marginal cap a la dreta. El resultat és que la funció de demanda també es desplaça (parcialment, però) a la dreta: passa de ser

$$q^d{}_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 6 \\ 12 - 2p & \text{si } 0 \leq p < 6 \end{cases} \quad \text{a ser} \quad q^d{}_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 8 \\ 16 - 2p & \text{si } 0 \leq p < 8. \end{cases}$$

EXEMPLE 6. Considerem la funció de demanda d'un cert bé d'un consumidor i suposem que augmenta la renda monetària del consumidor.

- Per a certs béns (per exemple, potser pel·lícules en DVD), l'augment de la renda fa que el consumidor estigui disposat a pagar més per cada unitat del bé. Això significa que l'augment de la renda del consumidor desplaçarà la seva funció de demanda d'aquests béns cap a la dreta: després de l'augment de la renda, a cada preu del bé, el consumidor desitjarà comprar més quantitat del bé que abans.

- Però per a altres béns pot succeir el contrari. Un cas és el transport públic: a mesura que augmenta la renda, el més probable és reduir el consum de transport públic i substituir-lo per transport privat (http://en.wikipedia.org/wiki/Inferior_good). Un altre cas és el VHS: per a nivell baixos de renda, comprar pel·lícules implica recórrer al format més barat, el vídeo; però a partir d'un cert nivell de renda, és previsible que comenci la substitució de format cap al DVD.

DEFINICIÓ 7. Si un augment de la renda del consumidor desplaça (potser parcialment) la seva funció de demanda d'un bé cap a la dreta i una reducció, cap a l'esquerra, aleshores es diu que, per al consumidor, el bé és normal. Si aquesta relació es dóna per a tots els consumidors, es diu que el bé és normal.

DEFINICIÓ 8. Si un augment de la renda del consumidor desplaça (potser parcialment) la seva funció de demanda d'un bé cap a l'esquerra i una reducció, cap a la dreta, aleshores es diu que, per al consumidor, el bé és inferior. Si aquesta relació es dóna per a tots els consumidors, es diu que el bé és normal.

- En general, els béns no són sempre normals o inferiors. Per a certs canvis de la renda, un mateix bé pot comportar-se com a bé normal i, per a d'altres canvis, com a bé inferior. Per exemple, el transport públic: sense renda, no es consumeix; a mesura que augmenta, se'n consumeix més; i, a partir d'un cert nivell, es redueix el seu consum perquè l'augment de la renda permet consumir transport privat.

DEFINICIÓ 9. Un bé normal és de primera necessitat si la proporció en què varia la quantitat demandada a resultes d'un canvi en la renda és inferior a la proporció en què varia la renda (per exemple, la renda augmenta un 5% però el consum del bé augmenta menys d'un 5%). Un bé normal és de luxe si la proporció en què varia la quantitat demandada a resultes d'un canvi en la renda és superior a la proporció en què varia la renda.

EXEMPLE 10. Considerem la funció de demanda d'un cert bé X i suposem que augmenta el preu d'un altre bé Y.

- En certs casos, l'augment del preu d'Y fa que el consumidor estigui disposat a pagar menys per cada unitat d'X, perquè en vol comprar menys d'X que abans a cada preu d'X. Això significa que l'augment del preu d'Y desplaça la funció de demanda d'X cap a l'esquerra. Per exemple, quan els DVDs gravables es venen en bobines (*cake boxes* o *spindles*), comprar més DVDs gravables exigeix comprar més estoigs per a protegir-los (per exemple, capses de plàstic). En la mesura que un augment del preu dels DVDs gravables porti a una reducció de la seva quantitat demandada, es produirà també una reducció de la quantitat demandada dels estoigs a cada preu dels estoigs (http://en.wikipedia.org/wiki/Complement_good).

- En altres casos, passarà el contrari: l'augment del preu d'*Y* farà que el consumidor estigui disposat a pagar més per cada unitat d'*X*. Això voldrà dir que l'augment del preu d'*Y* desplaça la funció de demanda d'*X* cap a la dreta. Per exemple, és previsible que l'augment del preu dels DVD+R gravables desplaci la funció de demanda dels DVD-R gravables cap a la dreta, perquè es produeix un efecte substitució del primer cap al segon format.

- Finalment, una tercera possibilitat és que l'augment del preu d'*Y* no afecti el que el consumidor està disposat a pagar per cada unitat d'*X*. En aquest cas, l'augment del preu d'*Y* no afecta la funció de demanda d'*X*. Per exemple, no és previsible que l'augment del preu de les taronges afecti la funció de demanda dels talls de cabells.

DEFINICIÓ 11. Si un augment del preu del bé *Y* desplaça (potser parcialment) la funció de demanda del bé *X* d'un consumidor cap a l'esquerra i una reducció, cap a la dreta, aleshores es diu que, per al consumidor, el bé *X* és complementari del bé *Y*. Si aquesta relació es dóna per a tots els consumidors, es diu que *X* és complementari d'*Y*.

DEFINICIÓ 12. Si un augment del preu del bé *Y* desplaça (potser parcialment) la funció de demanda del bé *X* d'un consumidor cap a la dreta i una reducció, cap a l'esquerra, aleshores es diu que, per al consumidor, el bé *X* és substitutiu del bé *Y*. Si aquesta relació es dóna per a tots els consumidors, es diu que *X* és substitutiu d'*Y*.

DEFINICIÓ 13. Si tant un augment com una disminució del preu del bé *Y* no modifica la funció de demanda del bé *X* d'un consumidor, aleshores es diu que, per al consumidor, el bé *X* és independent del bé *Y*. Si aquesta relació es dóna per a tots els consumidors, es diu que *X* és independent d'*Y*.

- En general, la relació de complementarietat, substituïbilitat o independència entre dos béns és variable: per a certs canvis del preu d'*Y*, *X* pot comportar-se com a complementari d'*Y* i, per a d'altres canvis, com a substitutiu o independent. De fet, entre tots els béns hi ha una certa relació de substituïbilitat, perquè tots competeixen per la mateixa renda: dedicar més renda a un bé implica poder dedicar menys als demés, de forma que, amb una renda constant, gastar més en un bé implica gastar menys en els demés.

Exercicis de la Lliçó 4

1. Indica en quina direcció és previsible que cadascun dels següents factors modifiqui la funció de demanda d'un cert bé X d'un cert consumidor i justifica la resposta.

(1) Reducció del nombre de consumidors d'X
(2) Augment del nombre de consumidors d'un bé Y del qual X és substitutiu
(3) Augment del nombre de consumidors d'un bé Y del qual X és complementari.
(4) Reducció del nombre de consumidors d'un bé Y del qual X és independent
(5) Reducció del preu d'X
(6) Increment del preu d'un bé que és substitutiu d'X
(7) Increment del preu d'un bé que és complementari d'X
(8) Augment de la renda d'un consumidor
(9) Reducció de la renda de tots els consumidors
(10) Expectativa generalitzada que el preu d'X s'apujarà
(11) Reducció del preu d'un bé que és substitutiu d'X i augment del preu d'un bé del qual X és complementari
(12) Anunci que X és perjudicial per a la salut
(13) Anunci que el consum d'X fa immortals els seus consumidors
(14) Desaparició d'un bé del qual X és complementari
(15) Augment del preu d'un bé del qual X és substitutiu i reducció de la renda del consumidor
(16) Aparició d'un bé substitutiu d'X
(17) Atorgament d'una subvenció als consumidors d'X
(18) Una campanya que publicita virtuts d'X
(19) Una campanya que publicita virtuts sobre un bé del qual X és complementari
(20) Conèixer que X es produeix amb mà d'obra infantil
(21) Declarar il·legal el consum d'X
(22) Declarar il·legal el consum d'un bé del qual X és complementari
(23) Declarar legal el consum (prèviament il·legal) d'un bé del qual X és substitutiu
(24) La reaparició de la Pesta Negra
(25) L'aplicació d'una nova tecnologia que redueix un 100% els costs de produir X
(26) Descobrir que X es deixarà de produir aviat
(27) Que estigui plovent
(28) Un augment de la renda en la meitat del consumidors i una reducció en l'altra meitat
(29) Donar a conèixer que la tecnologia amb què es produeix X és extremadament contaminant
(30) La prohibició de Benet XVI de consumir X
(31) Saber que morirem demà
(32) Començar unes vacances
(33) Que ningú més no vulgui consumir X
(34) Que la unitat monetària canviï i passi de pessetes a euros
(35) Anunciar-se que X és el bé més consumit del món
(36) Si passa tot l'anterior

2. Comprova que si s'afegeix una constant, sumant o restant, a la funció d'utilitat $U(q) = 6q - \frac{q^2}{4}$, *la funció de demanda no canvia.*

3. A la taula següent, de quin moment t a quin moment t': (i) X es comporta com a independent d'Y; (ii) X es comporta com a substitutiu d'Y; (iii) X es comporta com a complementari d'Y.

t	p_X	p_Y	q^d_X	q^d_Y
1	2	1	6	8
2	2	2	4	4
3	2	4	4	2
4	4	4	2	5
5	4	8	1	3

4. Pot un bé ser inferior i de luxe al mateix temps? Pot un bé comportar-se, en un cas, com a bé inferior i, en un altre, com a bé de luxe?

5. Una funció de demanda d'un bé és tal que un augment de la renda fa que el consumidor augmenti la quantitat demandada per a preus superiors a un valor p i disminueix la quantitat demandada per a preus inferiors a p*. Representa gràficament l'efecte sobre la funció de demanda d'un augment de la renda.*

6. És possible que X es comporti com a complementari d'Y i, simultàniament, Y no es comporti com a complementari d'X?

Lliçó 5. Funció de demanda de mercat d'un bé

DEFINICIÓ 1. La <u>funció de demanda de mercat</u> d'un bé és la suma de les funcions de demanda de tots els consumidors del bé. Per tant, a cada preu p del bé, la funció de demanda de mercat del bé determina la quantitat demandada pel total de consumidors del bé a preu p.

- Per exemple, suposem que $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ representa el conjunt de consumidors del bé. Per a $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, sigui $q_i^d(p)$ la funció de demanda del consumidor i. En aquest cas, la funció de demanda de mercat és $Q^d(p) = q_1^d(p) + q_2^d(p) + q_3^d(p) + \dots + q_n^d(p)$.

- Gràficament, la funció de demanda de mercat s'obté sumant, de manera <u>horitzontal</u>, les funcions de demanda individuals.

EXEMPLE 2. Suposem que només hi ha dos consumidors (o dos grups de consumidors) amb funcions de demanda $q_1^d(p) = 10 - p$ i $q_2^d(p) = 20 - 4p$. La Fig. 11 mostra <u>com s'obté la funció de demanda de mercat</u> corresponent.

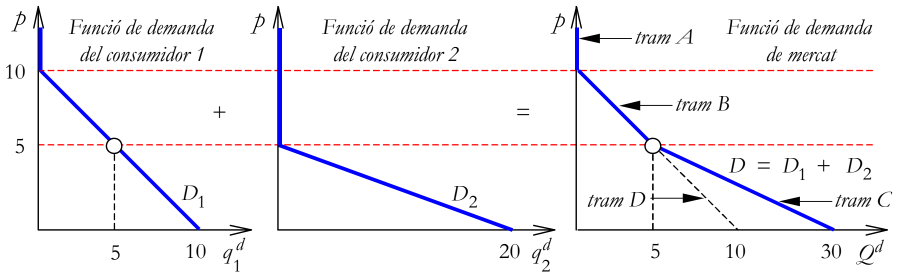


Fig. 11. Obtenció de la funció de demanda de mercat d'un bé

- Primer, cal identificar per a cada consumidor, el preu més petit que fa que la quantitat demandada sigui zero. Aquest preu representa el <u>preu d'entrada del consumidor al mercat</u>: si el preu és inferior a aquest valor, la quantitat demandada <u>comença a ser positiva</u>. El preu d'entrada es troba fent $q^d = 0$ i aïllant p (o, de manera equivalent, fent $q^d = 0$ a la funció inversa de demanda). Per al consumidor 1, el preu d'entrada és $p_1 = 10$; per al consumidor 2, és $p_2 = 5$. Això indica que, si comencem per un preu suficientment alt al qual ningú no compra el bé i l'anem reduint, el primer consumidor que s'incorporarà al mercat com a comprador serà l'1. <u>Els preus d'entrada serviran per a determinar com està trossejada la funció de demanda de mercat</u>: en ser <u>dos</u> els valors trobats, la funció de demanda de mercat estarà trossejada en <u>tres</u> parts.

- Prenguem primer el preu d'entrada més alt: $p_1 = 10$. Si $p \geq p_1$, no hi ha cap comprador al mercat: el preu és tan alt per a tots dos consumidors que la quantitat demandada per cadascú és zero. Per tant, per a $p \geq p_1 = 10$, $Q^d(p) = q_1^d(p) + q_2^d(p) = 0 + 0 = 0$. El tram A de la Fig. 11 representa aquesta part de la funció de demanda de mercat.

- Prenguem ara el segon el preu d'entrada: $p_2 = 5$. Per a tot preu p entre el preu d'entrada superior $p_1 = 10$ i el següent preu d'entrada $p_2 = 5$, només és present al mercat el primer consumidor, ja que la quantitat demandada pel segon és zero. Com a resultat, per a valors de p entre 5 i 10, la funció de demanda de mercat coincidirà amb la funció de demanda del consumidor 1. Així, per a p tal que $p_2 < p < p_1$ (això és, per a p tal que $5 < p < 10$), $Q^d(p) = q_1^d(p) + q_2^d(p) = (10 - p) + 0 = 10 - p$. El tram B de la Fig. 11 representa aquesta part de la funció de demanda de mercat.

- Finalment, per a valors de p inferiors al segon preu d'entrada, $p_2 = 5$, tots dos consumidors són al mercat i la quantitat demandada total serà la suma de dos valors positius, la quantitat demandada pel consumidor 1 i la demandada pel 2. Per tant, per a p tal que $0 \leq p \leq p_2$, $Q^d(p) = q_1^d(p) + q_2^d(p) = (10 - p) + (20 - 4p) = 30 - 5p$. El tram C de la Fig. 11 representa aquesta part de la funció de demanda. La funció de demanda de mercat resta definida en 3 parts:

$$Q^d(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \geq 10 \\ 10 - p & \text{si } 5 < p < 10 \\ 30 - 5p & \text{si } 0 \leq p \leq 5. \end{cases} \tag{2}$$

- La primera part descriu la funció de demanda de mercat quan no hi ha cap comprador al mercat; la segona, quan només hi ha el consumidor 1 com a comprador; i la tercera, quan hi són tots dos consumidors presents al mercat com a compradors.

- <u>La quantitat demandada total que resulta d'aplicar la funció de demanda de mercat obtinguda ha de coincidir amb el resultat que s'obtindria sumant per separat la quantitat demandada per cada consumidor</u>. Així, si $p = 8$, la funció de demanda del consumidor 1 estableix que $q_1^d = 2$ i la del consumidor 2 que $q_2^d = 0$: si $p = 8$, $q_2^d = 20 - 4 \cdot 8 < 0$ (la convenció per al cas de valor negatiu de q_2^d quan es considera $q_2^d(p) = 20 - 4p$ una funció de demanda és que el valor de q_2^d és zero). Per tant, si $p = 8$, la quantitat demandada total és $Q^d = q_1^d + q_2^d = 2 + 0 = 2$. Fent el càlcul directament a la funció de demanda de mercat, identifiquem l'equació que cal aplicar si $p = 8$. Atès que 8 està entre 5 i 10, l'equació a aplicar és $Q^d = 10 - p = 10 - 8 = 2$: el mateix resultat.

- És un error pretendre obtenir la funció de demanda de mercat merament sumant $q_1^d(p) = 10 - p$ i $q_2^d(p) = 20 - 4p$. Aquesta suma és $30 - 5p$ i correspon amb el tercer tram de l'autèntica funció de demanda de mercat, aquell tram on tots dos consumidors són al mercat. Però aquest tram és només vàlid per a preus inferiors als preus d'entrada de tots dos consumidors. Per exemple, si consideréssim $Q^d = 30 - 5p$ com la funció de demanda, el valor resultant amb $p = 8$ seria $Q^d = 30 - 5 \cdot 8 = -10$, un valor incorrecte que resulta de no reconèixer que la quantitat que el consumidor demanda quan $p = 8$ no pot ser negativa. Si $p = 8$, $q_2^d(p) = 20 - 4p$ dóna el valor inadmissible $q_2^d = -12$.

REMARCA 3. <u>Si les funcions de demanda dels consumidors són totes no creixents, la funció de demanda de mercat també serà no creixent</u>. I en els intervals de preus on totes les funcions de demanda dels consumidors siguin no creixents i alguna sigui decreixent, la funció de demanda de mercat serà decreixent.

- Per exemple, a la Fig. 11, les funcions de demanda de tots dos consumidors són no creixents per a p tal que $5 < p < 10$ i, en aquest cas, la funció del primer consumidor és decreixent. Com a resultat, per a p amb $5 < p < 10$ (tram B), la funció de demanda de mercat és decreixent.

REMARCA 4. <u>Tots els factors que desplacen les funcions de demanda dels consumidors en un mateix sentit, desplaçaran la funció de demanda de mercat resultant en el mateix sentit</u>.

- Un factor important que afecta la funció de demanda de mercat és el <u>nombre de consumidors</u>: un augment del nombre de consumidors desplaça la funció de demanda de mercat (potser parcialment) cap a la dreta; i una reducció del nombre de consumidors, cap a l'esquerra (també potser parcialment).

- A l'Exemple 2, si només hi ha el consumidor 1 al mercat, la primera gràfica de la Fig. 11 mostraria la funció de demanda de mercat. Però quan s'incorpora el consumidor 2, la funció de demanda de mercat està representada per la tercera gràfica. Per consegüent, l'augment del nombre de consumidors ha desplaçat la funció de demanda de mercat <u>parcialment</u> a la dreta, passant de ser la funció definida pels trams A–B–D a la definida pels trams A–B–C.

Exercicis de la Lliçó 5

1. Completa la taula, si hi ha dos grups de consumidors, si q^d_1 és la quantitat demandada pel primer grup, si q^d_2 és la quantitat demandada pel segon i si Q^d és la quantitat demandada total.

p	2	4	6	8
q^d_1			20	10
q^d_2		20	10	
Q^d	70	50		10

2. Obté la funció de demanda de mercat si hi ha 50 consumidors, cadascun amb funció de demanda $q^d = 1 - p$. Representa gràficament la funció de demanda d'un consumidor i la de mercat.

3. Sigui $p = 2$ i la funció de demanda de mercat $q^d = 30 - 3p$. Representa gràficament la variació de despesa dels consumidors quan el preu es triplica. Interpreta les diferències entre els dos rectangles que representen la despesa.

4. Obté la funció de demanda de mercat si hi ha dos grups de consumidors, el primer amb funció de demanda $q^d_1 = 100 - p$ i el segon amb funció de demanda $q^d_2 = 200 - 2p$.

5. Obté la funció de demanda de mercat si hi ha tres grups de compradors, el primer amb funció de demanda $q^d_1 = 10 - 2p$, el segon amb funció (inversa) de demanda $p = 10 - 2q^d_2$ i el tercer amb funció de demanda $q^d_3 = 12 - p$.

6. Determina com els successos de l'Exercici 1 de la Lliçó 4 afecten la funció de demanda de mercat del bé X.

7. Sigui la funció de demanda de mercat $q^d = 10 - 2p$. Si el preu s'ha reduït a la meitat i la quantitat demandada ha augmentat en 4 unitats, quins són els preus inicial i final?

Lliçó 6. Excedent del consumidor calculat a partir d'una funció de demanda

En ocasions podem tenir una funció de demanda sense saber quina és la funció d'utilitat que l'origina. Aquest fet podria semblar que impossibilita conèixer l'excedent del consumidor quan compra una quantitat de bé a un determinat preu. És possible, però, recuperar l'excedent del consumidor de la funció de demanda (sempre que la utilitat de no consumir el bé sigui 0).

La raó que això sigui possible és el fet que l'alçada de la funció de demanda sobre cada quantitat $q > 0$ és també l'alçada de la funció d'utilitat marginal subjacent traçada sobre el mateix valor de q. Per tant, l'alçada de la funció de demanda corresponent al valor q expressa el que el consumidor està disposat a pagar per la q-èsima unitat del bé. D'aquesta manera, pot calcular-se l'excedent del consumidor quan compra la quantitat q al preu p sumant, per a cada unitat fins a la q-èsima, la diferència entre el que el consumidor pagaria que la unitat (l'alçada de la funció de demanda traçada sobre aquella unitat) i el preu.

EXEMPLE 1. Sigui $U(q) = 6q - \dfrac{q^2}{4}$ la funció d'utilitat d'un bé. Ja sabem que la funció de demanda corresponent satisfà $q^d = 0$ si $p \geq 6$ i $q^d = 12 - 2p$ si $0 \leq p < 6$. Suposem que només coneixem la funció de demanda i hem de <u>calcular l'excedent del consumidor al punt *a* de la funció de demanda</u> a la Fig. 12, això és, l'excedent quan es compra $q = 6$ a preu $p = 3$.

- Es pot calcular geomètricament l'excedent total sumant l'excedent obtingut per cada unitat comprada. Per exemple, a la Fig. 13, per la unitat 3, el consumidor està disposat a pagar com a màxim l'alçada de la funció de demanda traçada sobre $q = 3$. Aquesta alçada la dóna la funció inversa de demanda. Aïllant p a $q^d = 12 - 2p$ s'obté la funció inversa $p = 6 - q/2$ (per comoditat, s'escriu q en comptes de q^d). Per a $q = 3$, $p = 4'5$: el consumidor està disposat a pagar 4'5 per la unitat 3 (ja sabem que aquest és el valor que la funció d'utilitat marginal $UMg = 6 - q/2$ atribueix a $q = 3$). L'excedent de la unitat 3 és la diferència entre l'alçada 4'5 de la funció de demanda (el preu màxim que s'està disposat a pagar per aquella unitat) i el que efectivament es paga (el preu $p = 3$). Per tant, per la unitat 3, el consumidor obté l'excedent $4'5 - 3 = 1'5$. La Fig. 12 mostra que <u>l'excedent per una unitat *q* és la diferència</u>, calculada sobre la recta vertical que passa per q, <u>entre la funció de demanda i la recta horitzontal traçada sobre el preu</u>.

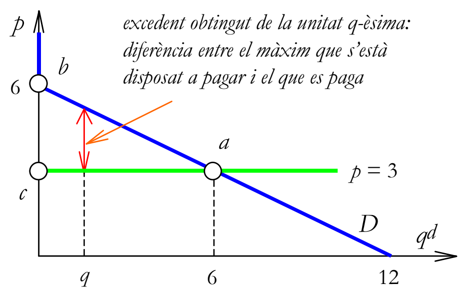


Fig. 12. Excedent sobre una funció demanda

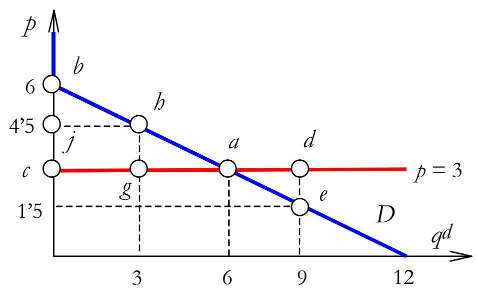


Fig. 13. Excedent fora una funció de demanda

- L'excedent quan es compra q = 6 a preu p = 3 resultaria de sumar l'excedent de cada unitat. Aquesta seria una suma infinita que coincidiria amb l'àrea del triangle *abc* de la Fig. 12. L'àrea del triangle *abc* és la base del triangle (la quantitat 6) per l'alçada del triangle (la diferència de preus 6 – 3) dividit per dos. Resultat: 9. El mateix resultat s'obté si s'aplica la fórmula d'excedent $U(q) - pq = U(6) - 3 \cdot 6 = (36 - 9) - 18 = 9$.

EXEMPLE 2. Com calcular l'excedent corresponent a un punt (p, q) fora la funció de demanda? Sigui p = 3 i considerem la Fig. 13.

- Cas 1: la quantitat q és <u>superior</u> a la quantitat 6 que indica la funció de demanda a preu p = 3. Suposem que la quantitat és 9. En aquest cas, la suma d'excedents <u>fins</u> a q = 6 donaria el valor 9 calculat a l'Exemple 1. Però per cada unitat més enllà de la unitat 6, l'excedent és negatiu, ja que el consumidor paga per aquelles unitats un preu superior al màxim del que està disposat a pagar. Això es manifesta en el fet que la funció de demanda cau, a l'esquerra de q = 6, per sota la recta que marca el preu p = 3. Atès que les unitats entre la 6 i la 9 aporten excedent negatiu, l'excedent quan es compra q = 9 a preu p = 3 seria l'àrea del triangle *abc* menys l'àrea del triangle *ade* a la Fig. 13, això és, 9 –9/4 = 27/4. El mateix resultat s'obté si s'aplica la fórmula d'excedent $U(q) - pq = U(9) - 3 \cdot 9 = (54 - 81/4) - 27 = 135/4 - 27 = (135 - 108)/4 = 27/4$.

- Cas 2: la quantitat q és <u>inferior</u> a la quantitat 6 que indica la funció de demanda a preu 3. Suposem que la quantitat és 3. Ara només cal sumar excedents fins a q = 3. A la Fig. 13, l'excedent quan es compra q = 3 a preu p = 3 és l'àrea de polígon *bcgh*. Aquesta àrea és la suma de l'àrea del triangle *bjh* i el rectangle *cghj*, això és, 9/4 + 9/2 = 27/4. El mateix resultat s'obté si s'aplica la fórmula d'excedent $U(q) - pq = U(3) - 3 \cdot 3 = (18 - 9/4) - 9 = 63/4 - 9 = (63 - 36)/4 = 27/4$.

- El cas 1 prova que el punt al llarg de la recta p = 3 de la Fig. 13 on es maximitza l'excedent no es troba a la dreta d'*a*, perquè les unitats més enllà de la 6 proporcionen un excedent negatiu. Per això, l'excedent al punt *a* és més gran que l'excedent a qualsevol punt a la dreta d'*a* sobre la recta p = 3. El cas 2 prova que el punt a llarg de la recta p = 3 de la Fig. 13 on es maximitza l'excedent no es troba a l'esquerra d'*a*, perquè a punts a l'esquerra d'*a* sobre la recta p = 3 hi ha excedent positiu corresponent a unitats que no es compren. Per exemple, l'excedent al punt *g* és inferior que al punt *a* perquè no es comptabilitiza l'excedent positiu de cada unitat entre la 3 i la 6 (un total que puja a l'àrea del triangle *agh*). Conclusió: quan p = 3, l'excedent es maximitza al punt *a* d'intersecció entre la recta horitzontal p = 3 i la funció de demanda.

PROPOSICIÓ 3. *Sigui una funció de demanda d'un consumidor decreixent a partir d'un cert preu p^* i constant per a valors del preu superiors a p^*. Sigui p_0 un preu tal que $p_0 < p^*$. Aleshores: (i) una reducció de p_0 provoca un augment de l'excedent del consumidor; i (ii) un augment de p_0 provoca una reducció de l'excedent del consumidor.*

- La Proposició 3 captura la idea segons la qual <u>un augment del preu d'un bé perjudica els consumidors i una disminució del preu del bé els beneficia</u>.

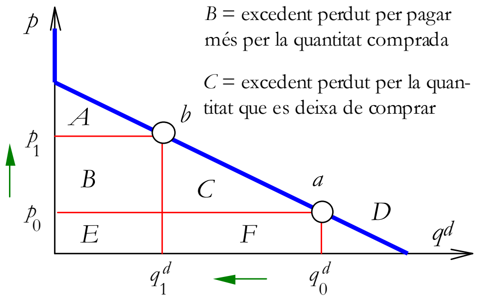


Fig. 14. Excedent i canvis del preu

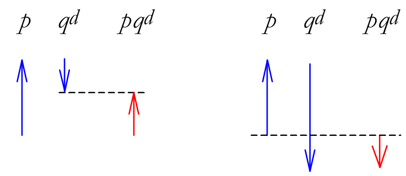


Fig. 15. Canvi del preu i de la despesa

REMARCA 4. Quan una modificació del preu altera l'excedent del consumidor, ho fa degut a dos efectes: un <u>efecte quantitat</u> i un <u>efecte preu</u>.

- L'efecte quantitat es refereix al fet que el canvi de preu modifica el nombre d'unitats sobre el que es calcula l'excedent. Per exemple, a la Fig. 14, suposem que el preu augmenta de p_0 a p_1 i que l'excedent es calcula sobre punts de la funció de demanda. Per tant, quan el preu és p_0, el consumidor obté l'excedent del punt *a*, que és la suma de les àrees *A*, *B* i *C*. I quan el preu és p_1, el consumidor obté l'excedent del punt *b*, que és l'àrea *A*. En conseqüència, l'augment de preu de p_0 a p_1, causa una pèrdua d'excedent igual a la suma de les àrees *B* i *C*.

- L'àrea *C* representa l'efecte quantitat, ja que *C* mesura la <u>pèrdua d'excedent deguda a una reducció de la quantitat comprada</u>. Quan el preu és p_0, les unitats entre q_1^d i q_0^d aportaven excedent; quan el preu és p_1, les unitats entre q_1^d i q_0^d ja no es compren i, per tant, es perd l'excedent que aportaven abans.

- L'efecte preu es refereix al fet que el canvi de preu modifica l'excedent de les unitats que es compren tant abans com després del canvi de preu. A la Fig. 14, l'àrea *B* representa l'efecte preu, ja que *B* consisteix en l'excedent que es perd per comprar les unitats des de la unitat 0 a la unitat q_1^d a un preu superior. Tant abans com després del canvi de preu, hi ha excedent per la quantitat q_1^d. Mentre a preu p_0 l'excedent d'aquesta quantitat és *A* + *B*, a preu p_1 és només *A*. La pèrdua d'excedent es deu al fet que <u>es paga a un preu superior la mateixa quantitat</u>.

DEFINICIÓ 5. L'<u>excedent dels consumidors</u> quan a preu p es compra la quantitat total q és la suma de l'excedent que obté cada consumidor quan, a preu p, cada consumidor compra la seva part a la quantitat total q.

- L'excedent dels consumidors és simplement la suma de l'excedent de cada consumidor. L'excedent dels consumidors al punt (p, q) d'una funció de demanda de mercat es pot calcular: (i) directament a la funció de demanda de mercat com si fos una funció de demanda d'un únic consumidor; o (ii) calculant l'excedent al punt corresponent de cada funció de demanda dels consumidors i fent després la suma.

EXEMPLE 6. Suposem que només hi ha dos consumidors, amb funcions de demanda $q_1^d(p) = 10 - p$ i $q_2^d(p) = 20 - 4p$. La funció de demanda de mercat és (2). La Fig. 16 mostra les representacions gràfiques de les tres funcions de demanda. Sigui $p = 2$. Calculem l'excedent dels consumidors al punt c de la funció de demanda, on $(p, Q^d) = (2, 20)$.

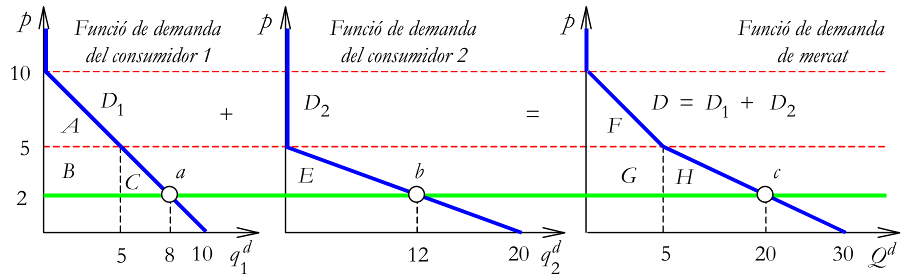


Fig. 16. Dues maneres de calcular l'excedent dels consumidors

- <u>Opció 1</u>: <u>calcular l'excedent dels consumidors directament sobre la funció de demanda de mercat</u>. Aquest excedent és la suma de les àrees F, G i H de la Fig. 16. L'àrea F és 25/2; l'àrea G és 15; I l'àrea H és 45/2. La suma és 50.

- <u>Opció 2</u>: <u>calcular l'excedent de cada consumidor (o grup de consumidors) i sumar els excedents</u>. Quan $p = 2$, la quantitat demandada pel consumidor 1 és 8. Així, l'excedent del consumidor 1 es calcula al punt a de la Fig. 16. Aquest excedent és la suma de les àrees A, B i C, que és 32. Quan $p = 2$, la quantitat demandada pel consumidor 2 és 12. Per tant, l'excedent del consumidor 2 es calcula al punt b de la Fig. 16. Aquest excedent és l'àrea E, que és 18. La suma d'excedents és 32 + 18 = 50.

Exercicis de la Lliçó 6

1. Per quins dos motius augmenta l'excedent d'un consumidor si es redueix el preu? A $q^d = 10 - 2p$, calcula l'efecte quantitat i l'efecte preu sobre l'excedent quan el preu passa de $p_0 = 4$ a $p_1 = 2$. Fes el mateix quan passa de $p_0 = 1$ a $p_1 = 5$.

2. Sigui $q^d = 10 - p$ la funció de demanda d'un consumidor. (i) Quan està disposat a pagar per l'última unitat quan compra la quantitat $q^d = 4$? (ii) Quin és l'excedent més gran i el més petit que pot obtenir quan compra $q^d = 4$ i mai no paga per cap unitat més del que està disposat a pagar?

3. A les funcions de demanda de l'Exemple 6, calcula l'excedent dels consumidors, aplicant les dues opcions de càlcul: (i) quan cada consumidor compra la quantitat que estableix la seva funció de demanda a preu $p = 4$; (ii) el mateix a preu $p = 5$; (iii) quan, a preu 6, el consumidor 1 compra $q_1^d = 2$ i el consumidor 2 compra $q_2^d = 3$.

4. Demostra gràficament la Proposició 3.

5. A la funció de demanda $q^d = 10 - p$, calcula l'excedent a: (i) $(p, q^d) = (4, 8)$; (ii) $(p, q^d) = (4, 4)$; (iii) $(p, q^d) = (4, 6)$.

6. A la funció de demanda de mercat $q^d = 10 - 2p$, identifica el punt on l'excedent dels consumidors és màxim, el punt on és mínim i el punt on és 32.

Lliçó 7. Elasticitat preu de demanda entre dos punts d'una funció de demanda

Una funció de demanda decreixent, com ara la de la Fig. 14, proporciona informació sobre les conseqüències d'una variació en el preu. Per exemple, <u>si p augmenta</u> des de p_0 a p_1, es produeix:

- una <u>reducció de la quantitat demandada</u> de q_0^d a q_1^d, ja que la funció és decreixent;
- una <u>reducció de l'excedent del consumidor</u>, que passa de ser l'àrea $A + B + C$ a només A; i
- una <u>reducció de la utilitat</u> del consumidor, perquè el fet que la part de la funció de demanda on p i q prenen valors positius sigui també part de la funció d'utilitat marginal fa que la funció d'utilitat marginal prengui valors positius entre q^d_0 i q^d_1, i això significa que la funció d'utilitat sigui creixent entre q^d_0 i q^d_1 (d'on una reducció de q^d implica una reducció d'$U(q^d)$).

Però encara no s'ha determinat què succeeix amb la <u>despesa</u> que fa el consumidor quan varia el preu. Si augmenta p, sabem que q^d no augmentarà (en general, disminuirà). Per tant, el producte $p \cdot q^d$ podria augmentar o disminuir. Quin cas es produeixi dependrà de quin dels dos canvis (l'augment de p o la disminució de q^d) és comparativament més gran.

La intuïció és que si el canvi en p no fa variar significativament q^d, aleshores l'efecte de p sobre el producte $p \cdot q^d$ serà més important que (dominarà) l'efecte de q^d. Això faria que la despesa es mogués en la mateixa direcció que p. Per contra, si el canvi en p es tradueix en un canvi comparativament més intens en q^d llavors l'efecte de q^d sobre el producte $p \cdot q^d$ serà més important que (dominarà) l'efecte de q^d. Com a resultat, la despesa es mourà en direcció oposada a p.

La Fig. 15 il·lustra aquesta intuïció. Suposem que p augmenta. Al cas de l'esquerra, l'augment genera una reducció en la quantitat demandada comparativament poc important, d'on resulta que l'efecte positiu sobre la despesa del canvi en el preu domina l'efecte negatiu de la quantitat. El resultat net és que la despesa augmenta. Al cas de la dreta, el mateix augment del preu provoca una reducció comparativament més important sobre la quantitat, resultant que l'efecte positiu sobre la despesa del canvi en el preu és dominat per l'efecte negatiu de la quantitat. El resultat net és que la despesa disminueix. <u>Aquest raonament és aproximadament, però no enterament, correcte</u>. El concepte d'elasticitat permet esbrinar com de correcta és aquesta intuïció.

DEFINICIÓ 1. Sigui y una variable que depèn d'una segona variable x i, possiblement, d'altres variables. Quan l'<u>única causa</u> d'un canvi d'y és un canvi d'x, l'<u>elasticitat</u> d'y respecte d'x és la variació relativa d'y dividida per la variació relativa d'x.

- Atès que l'elasticitat d'y respecte d'x és el quocient de dues variacions relatives, <u>l'elasticitat és un nombre sense unitats</u>.

- L'elasticitat d'una variable y respecte d'una altra x és una mesura de <u>quant sensible és y a canvis en x</u>. Com més gran sigui l'elasticitat, més gran serà la sensibilitat i, per tant, més gran serà l'efecte (en terms relatius) del canvi en x sobre y. El cas esquerra a la Fig. 15 és un cas on la quantitat és poc sensible a canvis en el preu; el cas dret, un cas on la quantitat és molt sensible. El fons del problema rau en <u>establir què indiquen les fletxes</u>. L'elasticitat opta per considerar-les representacions de <u>canvis relatius</u>.

- Es consideren canvis relatius (o percentuals) per a evitar problemes amb les unitats en què es mesuren les variables: un canvi de 3 grams és el mateix que un canvi de 3000 miligrams, tot i que el 3000, comparat amb el 3, sembla indicar que el canvi és més important. Això fa que interpretar les fletxes a la Fig. 15 com a canvis absoluts no sigui adequat: sigui de 3 o de 3000, en sí mateix, un canvi és important o no en comparació amb un punt de referència. Si el valor d'una variable augmenta una unitat, aquest mateix canvi no és igual d'important si el valor de partida de la variable és 1 que si és 1 milió: al primer cas, el valor augmenta un 100%; al segon, l'increment és percentualment menyspreable. Si el pes augmenta de 3 a 6 grams, l'increment percentual és del 50%. El mateix increment resulta si mesurem en miligrams i passem de 3000 a 6000 miligrams.

- Per exemple, si el valor d'x augmenta d'$x_0 = 4$ a $x_1 = 6$, la variació relativa d'x és $\frac{x_1 - x_0}{x_0} = \frac{6-4}{4} = 0'5$. Aquest valor s'expressa en tant per u i indica que, en passar de 4 a 6, x ha augmentat un 0'5 per 1. Per tant, cada unitat de partida s'ha incrementat 0'5 unitats. En partir de 4 unitats, si cada unitat s'incrementa en 0'5, el total incrementat és $4 \cdot 0'5 = 2$ i el valor passa de 4 a 6. Per a expressar aquest valor en tant per cent, multipliquem per 100. Així, passar de 4 a 6 representa un augment del 50%.

- Si y augmenta d'$y_0 = 1$ a $y_1 = 2$ com a conseqüència d'un increment en x d'$x_0 = 1$ a $x_1 = 4$, l'elasticitat d'y respecte d'x serà la variació relativa $\frac{y_1 - y_0}{y_0} = \frac{2-1}{1} = 1$ d'y dividida per la variació relativa $\frac{x_1 - x_0}{x_0} = \frac{6-4}{4} = 0'5$ d'x, que dóna 2 com a resultat. Expressar les variacions relatives en tant per cent dóna el mateix valor, ja que l'elasticitat s'obtindria de dividir 100% (el canvi percentual en y) entre 50% (el canvi percentual en x).

- El valor 2 d'elasticitat indica que cada unitat de variació relativa d'x ha provocat 2 unitats de variació relativa d'y. Parlant en tant per cent, cada unitat percentual de variació d'x ha causat una variació de dues unitats percentuals en y. Això resulta obvi des del moment que el 50% de variació en x s'ha traduït en un 100% de variació d'y. L'elasticitat d'y respecte d'x no és més que el quocient d'aquests dos números: repartir el 100% de variació d'y entre el 50% de variació d'x que ha causat el canvi en y.

DEFINICIÓ 2. L'elasticitat preu de la demanda $\varepsilon^d_{p\atop a\to b}$ d'un punt inicial $a = (p_0, q^d_0)$ a un punt final $b = (p_1, q^d_1)$ d'una funció de demanda (sigui d'un consumidor o de mercat) és

$$\varepsilon^d_{p\atop a\to b} = -\frac{\frac{q^d_1 - q^d_0}{q^d_0}}{\frac{p_1 - p_0}{p_0}} = -\frac{q^d_1 - q^d_0}{p_1 - p_0}\frac{p_0}{q^d_0} = -\frac{\Delta q^d}{\Delta p}\frac{p_0}{q^d_0} \qquad (3)$$

on $\Delta q = q^d_1 - q^d_0$ és la variació absoluta de la quantitat demandada i $\Delta p = p_1 - p_0$ és la variació absoluta del preu (i on q^d_0 s'obté substituint p_0 a la funció de demanda i q^d_1 s'obté substituint p_1).

- Atès que la funció de demanda acostumarà a ser decreixent entre els punts a i b, s'afegeix el signe menys per a què el valor de l'elasticitat resulti positiu.

- La definició d'elasticitat preu de la demanda d'a a b expressa les variacions relatives de q^d i p en tant per u. Si es volguessin expressar les variacions relatives en tant per cent, tindríem 100% multiplicant al numerador i 100% dividint al denominador. En cancel·larse tots dos 100%, s'arriba a la fórmula anterior.

EXEMPLE 3. Evaluem l'elasticitat preu de la demanda quan el preu passa de $p_0 = 2$ a $p_1 = 3$ a la funció de demanda $q^d = 12 - p$.

- En no disposar dels valors de q^d, cal calcular-los. L'elasticitat preu de la demanda es refereix a dos punts d'una funció de demanda: un punt inicial a i un punt final b. El punt a és aquell punt de la funció de demanda on $p_0 = 2$. Per a obtenir-lo, substituïm $p_0 = 2$ a la funció de demanda per a obtenir $q^d_0 = 12 - p_0 = 12 - 2 = 10$. Així, $a = (p_0, q^d_0) = (2, 10)$. La quantitat q^d_1 del punt $b = (p_1, q^d_1)$ s'obté substituint p_1 a la funció de demanda. El resultat és $q^d_1 = 12 - p_1 = 12 - 3 = 9$, d'on tenim que $b = (p_1, q^d_1) = (3, 9)$. Ara ja tenim els dos punts a i b per a poder aplicar la fórmula.

- Calculem primer la variació relativa de p. En tant per u, la variació relativa és $\frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} = 0'5$. En tant per cent, es tractaria d'un 50%.

- La variació relativa de q^d és, en tant per u, $\frac{q^d_1 - q^d_0}{q^d_0} = \frac{9-10}{10} = -\frac{1}{10} = -0'1$. En tant per cent, es tractaria d'un –10%. El valor negatiu indica que q^d s'ha reduït. Aplicant la fórmula (3), $\varepsilon^d_{p\atop a\to b} = -\frac{\frac{q^d_1 - q^d_0}{q^d_0}}{\frac{p_1 - p_0}{p_0}} = -\frac{-\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot 1}{10\cdot 1} = \frac{1}{5} = 0'2$. Amb variacions expressades en tant per cent, $\varepsilon^d_{p\atop a\to b} = -\frac{\frac{q^d_1 - q^d_0}{q^d_0}\cdot 100}{\frac{p_1 - p_0}{p_0}\cdot 100} = -\frac{-10}{50} = \frac{1}{5} = 0'2$: el resultat és el mateix.

- El valor $\varepsilon^d_{p\atop a\to b} = 0'2$ indica que cada unitat de variació relativa de p s'ha traduït només en 0'2 unitats de variació relativa de q^d: un augment del 50% del preu només ha causat una caiguda del 10% en la quantitat demandada.

DEFINICIÓ 4. Es parla de demanda elàstica quan l'elasticitat és superior a 1; de demanda inelàstica, quan l'elasticitat és inferior a 1; de demanda d'elasticitat unitària quan l'elasticitat és 1; de demanda perfectament elàstica quan l'elasticitat és 0; i de demanda perfectament inelàstica quan l'elasticitat és ∞ (això és, quan cal dividir per 0 quan es calcula l'elasticitat).

- "Demanda elàstica" significa que q^d és "molt sensible" a canvis en p. Com més gran sigui el valor de l'elasticitat, més sensible serà q^d a canvis en p.

- "Demanda inelàstica" significa que q^d és "poc sensible" a canvis en p. Com més petit sigui el valor de l'elasticitat, menys sensible serà q^d a canvis en p. En el cas extrem d'elasticitat 0, la quantitat demandada no es veu alterada per un canvi en p.

- Quan les variacions relatives s'expressen en tant per cent, l'elasticitat és $\underset{a\to b}{\varepsilon_p^d} = \dfrac{\%\, q^d}{\%\, p}$, on $\%\, q^d = \left|\dfrac{q_1^d - q_0^d}{q_0^d}100\right|$ és la variació percentual de q^d en <u>valor absolut</u>[1] i $\%\, p = \left|\dfrac{p_1 - p_0}{p_0}100\right|$ és la variació percentual de p també en valor absolut. Si la demanda d'a a b és elàstica, $\underset{a\to b}{\varepsilon_p^d} = \dfrac{\%\, q^d}{\%\, p} > 1$. D'aquí que demanda elàstica signifiqui que $\%\, q^d > \%\, p$: amb demanda <u>elàstica</u>, <u>la quantitat demandada ha variat, del punt *a* al punt *b*, en proporció (o percentatge) superior al preu</u>. A la inversa, demanda inelàstica vol dir que la quantitat demandada ha variat en proporció inferior al preu entre els dos punts sobre els que s'ha calculat l'elasticitat. I demanda d'elasticitat unitària, que preu i quantitat demandada han variat en la mateixa proporció.

EXEMPLE 5. Evaluem l'elasticitat preu de la demanda quan el preu passa de $p_0 = 10$ a $p_1 = 11$ a la funció de demanda $q^d = 12 - p$ i comparem-la amb l'obtinguda quan p passa de $p_0 = 2$ a $p_1 = 3$.

- L'Exemple 3 mostra que, quan p passa de $p_0 = 2$ a $p_1 = 3$, l'elasticitat és 0'2. En aquest cas, la demanda entre $a = (2, 10)$ i $b = (3, 9)$ és <u>inelàstica</u>: mentre p ha variat un 50%, q^d ha variat en una proporció inferior: el 10%.

- Quan p passa de $p_0 = 10$ a $p_1 = 11$, la variació absoluta $\Delta p = p_1 - p_0$ és la mateixa que quan passa de $p_0 = 2$ a $p_1 = 3$. Però en termes relatius, la variació que representa passar de 10 a 11 és més petita (10%) que la variació que representa passar de 2 a 3 (50%).

- Quan p passa de $p_0 = 10$ a $p_1 = 11$, els punts inicial i final són $a = (p_0, q^d{}_0) = (10, 2)$ i $b = (p_1, q^d{}_1) = (11, 1)$. L'elasticitat preu de la demanda d'a a b és 5: p varia un 10% mentre q^d varia un 50%. En aquest cas, la demanda d'a a b és <u>elàstica</u>.

PROPOSICIÓ 6. *Sigui $a = (p_0, q^d{}_0)$ un punt de la funció de demanda*

$$q^d = \begin{cases} 0 & si\ p \geq \dfrac{\alpha}{\beta} \\ \alpha - \beta p & si\ 0 \leq p < \dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

[1] El valor absolut d'un nombre positiu és el mateix nombre. El valor absolut d'un nombre negatiu és el nombre canviat de signe. Per tant, el valor absolut de 5 és 5 i el valor absolut de –5 és també 5.

on $p_0 < \dfrac{\alpha}{\beta}$ i tant a com b són constants positives. Sigui $b = (p_1, q^d{}_1)$ un altre punt de la funció de demanda. Aleshores, l'elasticitat preu de la demanda del punt a al punt b és: inferior a 1 si, i només si, $p_0 < \dfrac{\alpha}{2\beta}$; superior a 1 si, i només si, $p_0 > \dfrac{\alpha}{2\beta}$; i igual a 1 si, i només si, $p_0 = \dfrac{\alpha}{2\beta}$.

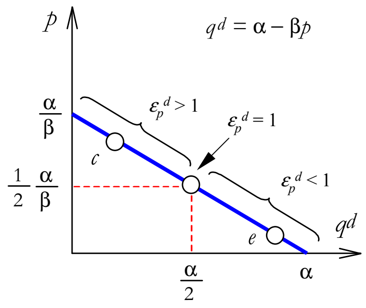


Fig. 17. Elasticitat a funcions de demanda lineals

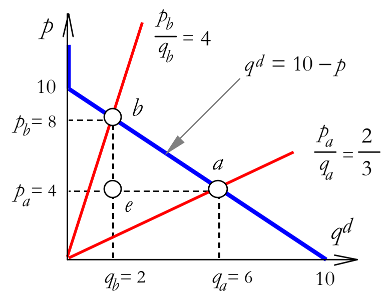


Fig. 18. Càlcul geomètric de l'elasticitat

- La Proposició 6 estableix que, en el cas de funcions de demanda lineals, si el punt inicial a per a calcular l'elasticitat es troba a la <u>part baixa de la recta</u> que defineix la funció de demanda, l'elasticitat resultant serà sempre <u>inferior a 1</u> (demanda inelàstica), amb independència de quin sigui el punt final b. A la Fig. 17, si e és el punt inicial en el càlcul de l'elasticitat no importa quin sigui el punt final: l'elasticitat serà inferior a 1. I prenent el punt mitjà de la recta com a punt inicial, l'elasticitat serà 1.

- De manera anàloga, si el punt a es troba a la <u>part alta de la recta</u>, l'elasticitat serà sempre <u>superior a 1</u> (demanda elàstica), amb independència de quin sigui el punt b. Per exemple, a la Fig. 17, si c és el punt inicial en el càlcul de l'elasticitat no importa quin sigui el punt final: l'elasticitat serà superior a 1.

- La versió $\underset{a\to b}{\varepsilon_p^d} = -\dfrac{\Delta q^d}{\Delta p}\dfrac{p_0}{q_0^d}$ ajuda a entendre la Proposició 6. Amb una funció lineal del tipus $q^d = \alpha - \beta p$, el quocient $\dfrac{\Delta q^d}{\Delta p}$ és el pendent $-\beta$ de la recta que defineix la funció de demanda. Això fa que $-\dfrac{\Delta q^d}{\Delta p}$ no depengui de quins siguin els punts a i b respecte dels quals es computa l'elasticitat. Per tant, $-\dfrac{\Delta q^d}{\Delta p}$ serà una constant: β. Com a resultat, el valor d' $\underset{a\to b}{\varepsilon_p^d}$ dependrà només de la relació $\dfrac{p_0}{q_0^d}$. Aquesta relació creix a mesura que ens enfilem sobre la recta de la Fig. 17. En conseqüència, <u>com més alt sobre la recta que defineix la funció de demanda se situï el punt inicial *a*, més alt serà el valor de l'elasticitat</u>.

EXEMPLE 7. Sigui la funció de demanda $q^d = 10 - p$, representada a la Fig. 18. Comparem l'elasticitat del punt a a un altre punt c qualsevol amb l'elasticitat del punt b a un altre punt d.

- L'elasticitat d'a a c és $\varepsilon^d_{\underset{a\to c}{p}} = -\dfrac{q^d_c - q^d_a}{p_c - p_a}\dfrac{p_a}{q^d_a}$, on q^d_c s'obté substituint p_c a la funció de demanda i q^d_a s'obté substituint p_a a la funció de demanda. Comprovem que $\dfrac{q^d_c - q^d_a}{p_c - p_a}$ és el pendent -1 de la funció $q^d = 10 - p$. De fet, $q^d_c - q^d_a = (10 - p_c) - (10 - p_a) = -(p_c - p_a)$. Així, $\dfrac{q^d_c - q^d_a}{p_c - p_a} = \dfrac{-(p_c - p_a)}{p_c - p_a} = -1$. En valor absolut, el pendent de la recta de la Fig. 18 és el <u>quocient entre la distància *ae* i la distància *be*</u>. A la Fig. 17, el pendent en valor absolut seria el quocient entre la base α i l'alçada $\dfrac{\alpha}{\beta}$, que és β.

- L'elasticitat de b a d és $\varepsilon^d_{\underset{b\to d}{p}} = -\dfrac{q^d_d - q^d_b}{p_d - p_b}\dfrac{p_b}{q^d_b}$. Ara, $\dfrac{q^d_d - q^d_b}{p_d - p_b}$ també és igual al pendent -1 de la funció $q^d = 10 - p$. Per tant, el primer component $\dfrac{\Delta q^d}{\Delta p}$ de les dues elasticitats és el mateix. Com a resultat, el fet que $\dfrac{q^d_c - q^d_a}{p_c - p_a} = \dfrac{q^d_d - q^d_b}{p_d - p_b}$ fa que sigui el segon component el que determini quina elasticitat serà més gran. Així, tindrem $\varepsilon^d_{\underset{a\to c}{p}} > \varepsilon^d_{\underset{b\to d}{p}}$ si, i només si, $\dfrac{p_a}{q^d_a} > \dfrac{p_b}{q^d_b}$ i $\varepsilon^d_{\underset{a\to c}{p}} < \varepsilon^d_{\underset{b\to d}{p}}$ si, i només si, $\dfrac{p_a}{q^d_a} < \dfrac{p_b}{q^d_b}$.

- El quocient $\dfrac{p_a}{q^d_a}$ és igual al pendent de la recta que uneix l'origen i el punt a. La Fig. 18 mostra que quocient i pendent són 2/3. D'altra banda, el quocient $\dfrac{p_b}{q^d_b}$ és igual al pendent de la recta que uneix l'origen i el punt b. La Fig. 18 mostra que els segons quocient i pendent són 4. La recta que uneix l'origen amb b és més vertical que la recta que uneix l'origen amb a i això fa que el pendent de la primera recta sigui més gran que el de la segona (<u>important</u>: això sempre i quan p es representi a ordenades; si p es representés a abscisses la recta més plana tindria més pendent). En resum, ha resultat que $\dfrac{p_b}{q^d_b} > \dfrac{p_a}{q^d_a}$ i, d'aquí, $\varepsilon^d_{\underset{b\to d}{p}} > \varepsilon^d_{\underset{a\to c}{p}}$: <u>tota elasticitat que tingui *b* com a punt inicial serà més gran que tota elasticitat que tingui a *a* com a punt inicial</u>.

REMARCA 8. <u>Determinants de l'elasticitat</u> (http://en.wikipedia.org/wiki/Demand_elasticity). L'elasticitat preu de la demanda d'un bé tendirà a ser més alta com:

- més <u>béns substitutius</u> tingui el bé;
- més gran sigui la <u>proporció de la renda</u> dedicada a comprar el bé;
- més <u>dispensable</u> (o menys "necessari") sigui el consum del bé; i
- més llarg sigui el període de <u>temps</u> considerat.

Exercicis de la Lliçó 7

1. Sigui la funció de demanda $q^d = 10 - p$. Si l'elasticitat preu de la demanda des del punt (p_0, q^d_0) és més gran que 1, per què s'ha de tenir que $p_0 > 5$?

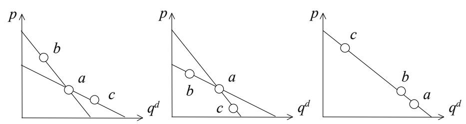
2. Tria un punt d'una funció de demanda perfectament inelàstica i calcula l'excedent en aquell punt.

3. Tria un punt d'una funció de demanda perfectament elàstica i calcula l'excedent en aquell punt.

4 Sigui la funció de demanda $q^d = 12 - 3p$. Obté l'elasticitat preu de la demanda des del punt (p_0, q^d_0) al punt (p_1, q^d_1) a cadascun dels següents casos: (i) $p_0 = 1$ i $q^d_1 = 3$; (ii) $p_0 = 1$; (iii) $q^d_0 = 3$; (iv) $q^d_1 = 6$; (v) $p_1 = 3$; i (vi) $p_1 = 0$ i $q^d_1 = 12$.

5. A les Figs. (1) i (2) a baix, de quin punt a quin punt és més gran l'elasticitat preu de la demanda? I de quin a quin més petita?

6. A la Fig. (3), on és més gran l'elasticitat preu de la demanda:
*(i) en el pas d'**a** a **b** o en el pas d'**a** a **c**?;*
*(ii) en el pas d'**a** a **b** o en el pas de **b** a **c**?;*
*(iii) en el pas d'**a** a **c** o en el pas de **b** a **a**?;*
*(iv) en el pas de **b** a **a** o en el pas de **b** a **c**?;*
*(v) en el pas de **c** a **a** o en el pas de **b** a **c**?*



(1) (2) (3)

7. (i) Calcula l'elasticitat preu de la demanda si el preu augmenta un 25% i la quantitat demandada disminueix un 50%. (ii) I si el preu es duplica i la quantitat demandada es redueix a la meitat?

8. Identifica dos béns per als quals una funció de demanda individual pugui ser perfectament inelàstica i explica què ho justificaria.

9. Sigui $a = (p, q^d) = (3, 6)$ i $b = (p, q^d) = (6, 3)$. Calcula l'elasticitat preu de la demanda del punt a al punt b i compara-la amb l'elasticitat preu de la demanda del punt b al punt a.

10. Si l'elasticitat preu de la demanda davant una variació del preu és 2 i la quantitat ha augmentat un 10%, quina ha estat la variació del preu?

11. (i) Per què l'elasticitat preu de la demanda d'un punt a de la funció de demanda a un punt b no és sempre igual a l'elasticitat preu de la demanda del punt b al punt a? (ii) Indica dos punts a i b d'una funció de demanda lineal tals que l'elasticitat preu de la demanda d'a a b és igual a l'elasticitat preu de la demanda de b a a.

12. (i) A la funció de demanda $q^d = 1/p$, calcula l'elasticitat preu del punt $a = (p_0, q^d_0) = (½, 2)$ al punt $b = (p_1, q^d_1) = (2, ½)$. (ii) Torna a calcular-la però des de b fins a a.

13. Què passa amb la despesa dels consumidors quan augmenta el preu en una funció de demanda de mercat perfectament inelàstica? I quan és perfectament elàstica?

14. (i) Calcula la despesa màxima que es pot fer amb funció de demanda $q^d = 12 - p$ i identifica el punt de la funció de demanda on s'assoleix la despesa màxima. (ii) Identifica tots els punts de la funció de demanda on la despesa és la màxima menys 1 i calcula l'elasticitat preu de la demanda de cada punt als altres.

15. Què voldria dir que una elasticitat preu de la demanda prengués un valor negatiu?

Lliçó 8. Elasticitat preu de demanda a punt d'una funció de demanda

DEFINICIÓ 1. L'elasticitat preu de la demanda (sigui d'una funció de demanda d'un consumidor o d'una funció de demanda de mercat) al punt (p_0, $q^d{}_0$) de la funció de demanda és

$$E_p^d = -\frac{\partial q^d}{\partial p}\frac{p_0}{q_0^d} \tag{4}$$

on $\dfrac{\partial q^d}{\partial p}$ és la derivada de la funció de demanda respecte de p i aquesta derivada s'avalua al punt (p_0, $q^d{}_0$) de la funció de demanda.

- L'elasticitat preu de la demanda d'un punt a un altre té almenys dos inconvenients: calcular-la del punt *a* al punt *b* no és en general igual a calcular-la de *b* a *a*; i, també en general, l'elasticitat d'*a* a *b* dependrà del punt *b* triat. Per tant, partint d'un punt inicial *a*, fins que no es produeixi un canvi que permeti identificar un segon punt, no es podrà calcular l'elasticitat. Això és un problema perquè seria útil poder dir si, situats a un cert punt *a*, la demanda es podria considerar elàstica o inelàstica. Malauradament, depenent de quin canvi es produeixi, la demanda pot resultar elàstica o inelàstica.

- L'elasticitat en un punt pretén superar aquests dificultats considerant un canvi arbitràriament petit en el preu. Una manera d'obtenir la fórmula (4) d'elasticitat en un punt *a* consisteix en partir de la fórmula (3) d'elasticitat $\underset{a\to b}{\varepsilon_p^d}$ d'un punt *a* a un punt *b* i prendre el límit de l'elasticitat quan *b* s'apropa a *a*. Si el límit existeix s'obté (4). D'aquesta manera, (4) és com una elasticitat entre dos punts quan aquests punts estan tan propers que es poden considerar un de sol.

PROPOSICIÓ 2. *Per a funcions de demanda lineals, l'elasticitat preu de la demanda d'un punt a a un punt b de la funció de demanda coincideix amb l'elasticitat preu de la demanda al punt a.*

- *Demostració*. Sigui $q^d = \alpha - \beta p$ una funció de demanda lineal i *a* i *b* dos punts de la funció. Comprovem que $\underset{a\to b}{\varepsilon_p^d} = E_p^d$, on la segona elasticitat s'avalua a *a*. D'un costat, $\underset{a\to b}{\varepsilon_p^d} = -\dfrac{q_b^d - q_a^d}{p_b - p_a}\dfrac{p_a}{q_a^d}$. Clarament, $\dfrac{q_b^d - q_a^d}{p_b - p_a} = \dfrac{(\alpha - \beta p_b) - (\alpha - \beta p_a)}{p_b - p_a} = \dfrac{-\beta(p_b - p_a)}{p_b - p_a} = -\beta$. De l'altre costat, $E_p^d = -\dfrac{\partial q^d}{\partial p}\dfrac{p_a}{q_a^d}$. Aquí també és clar que $\dfrac{\partial q^d}{\partial p} = -\beta$: la derivada de la funció de demanda respecte de *p* és $-\beta$. Així que $\underset{a\to b}{\varepsilon_p^d} = \beta\dfrac{p_a}{q_a^d}$ i $E_p^d = \beta\dfrac{p_a}{q_a^d}$.■

EXEMPLE 3. A la Fig. 18, l'elasticitat preu de la demanda d'*a* a *b* és el quocient entre la variació del $66'\widehat{6}$ % de la quantitat i la variació del 100% del preu: $\dfrac{2}{3}$. L'elasticitat preu de la demanda a *a* és la derivada de la funció de demanda canviada de signe (que val 1) pel quocient $\dfrac{p_a}{q_a^d} = \dfrac{2}{3}$.

REMARCA 4. No és cert que una funció de demanda més horitzontal tingui valors d'elasticitat preu de la demanda més grans que una funció de demanda menys horitzontal.

EXEMPLE 5. La funció de demanda lineal que passa pels punts $a = (p_0, q^d{}_0) = (20, 10)$ i $b = (p_1, q^d{}_1) = (10, 20)$ és $q^d = 30 - p$. La funció de demanda lineal que passa pels punts $a = (p_0, q^d{}_0) = (20, 100)$ i $b = (p_1, q^d{}_1) = (10, 120)$ és $q^d = 140 - 2p$. Representades sobre la mateixa gràfica, la primera funció és més vertical, però l'elasticitat d'*a* a *b* és més gran a la primera que a la segona funcions.

REMARCA 6. Si dues funcions de demanda passen pel mateix punt *a*, l'elasticitat preu de la demanda al punt *a* és més gran per a la funció de demanda més horitzontal.

Exercicis de la Lliçó 8

1. Troba la fórmula que expressa l'elasticitat preu de la demanda E_p^d a un punt com a funció només del preu a les funcions de demanda: (i) $q^d = a - bp$; (ii) $q^d = a/p$; (iii) $q^d = a/p^2$; i (iv) $q^d = a + b/p - cp$.

2. Calcula el punt on s'intersecten les funcions de demanda $q^d = 12 - p$ i $q^d = 20 - 5p$. Representa les funcions gràficament i comprova que l'elasticitat preu de la demanda al punt d'intersecció és més gran per a la funció de demanda més horitzontal.

3. Troba dos punts a i b sobre la funció de demanda $q^d = 12 - p$ tals que l'elasticitat preu de la demanda del punt a al b coincideix amb l'elasticitat preu de la demanda al punt b.

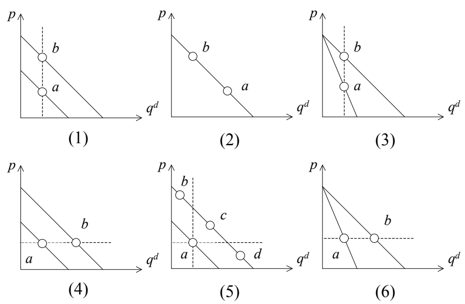
4. Troba dos punts a i b sobre la funció de demanda $q^d = 10 - p$ tals que l'elasticitat preu de la demanda d'a a b és 1 i comprova que l'elasticitat preu de la demanda al punt a també és 1.

5. Determina el punt de la funció de demanda $q^d = 21 - 7p$ on l'elasticitat preu de la demanda és 2.

6. Quina és l'equació d'una funció de demanda lineal amb pendent –1 i que té elasticitat unitària al punt $(p, q^d) = (5, 5)$?

7. Comprova tot el que s'afirma a l'Exemple 5.

8. A les Figs. (1) – (6) ordena els punts en funció del valor de l'elasticitat preu de la demanda a un punt. Ordena també els punts de les Figs. (1) – (3) dels Exercicis de la Lliçó 7.



9. És cert que una funció de demanda lineal té, a tot punt de la funció, una elasticitat preu constant? Justifica la resposta.

10. (i) Calcula l'elasticitat preu al punt $(p, q^d) = (1, 1)$ de la funció de demanda $q^d = 1/p$. (ii) Torna a calcular-la als punts (½, 2) i (2, ½). (iii) Què passa amb l'elasticitat? (iv) I amb la despesa? (v) Són aquests dos resultats certs a tots els punts de la funció de demanda?

11. Formula la Proposició 6 de la Lliçó 7 en termes de l'elasticitat preu de la demanda en un punt.

Lliçó 9. Elasticitat preu de demanda i despesa dels consumidors

Ha arribat el moment de clarificar la qüestió que havia motivat la introducció del concepte d'elasticitat: si el preu d'un bé varia i el consumidor respon modificant la quantitat demandada segons estableix la seva funció de demanda del bé, augmentarà o disminuirà la seva despesa en el bé? La Proposició 1 avança respostes.

PROPOSICIÓ 1. *Per a* <u>*tota*</u> *funció de demanda, i per a qualssevol punts diferents a i b de la funció:*

- *si* $\underset{a\to b}{\varepsilon^d_p} < 1$ *i, en el pas d'a a b, el preu* <u>*disminueix*</u>*, aleshores, en el pas d'a a b, la despesa* <u>*disminueix*</u>*; i*
- *si* $\underset{a\to b}{\varepsilon^d_p} > 1$ *i, en el pas d'a a b, el preu* <u>*augmenta*</u>*, aleshores, en el pas d'a a b, la despesa* <u>*disminueix*</u>*.*

➤ La Proposició 1 diu que, <u>amb demanda inelàstica, una caiguda del preu sempre provoca una caiguda de la despesa</u>; i que, <u>amb demanda elàstica, un augment del preu sempre provoca una caiguda de la despesa</u>.

➤ <u>No és cert que, amb demanda inelàstica, un augment del preu sempre provoqui un augment de la despesa</u>. Per exemple, sigui $a = (p_0, q^d{}_0) = (1, 10)$ i $b = (p_1, q^d{}_1) = (2, 4)$. En aquest cas, $\underset{a\to b}{\varepsilon^d_p} = -\frac{4-10}{2-1}\frac{1}{10} = \frac{3}{5} < 1$. A més, en el pas d'*a* a *b*, el preu augmenta: d'1 a 2. Però la despesa no augmenta: la despesa passa de $p_0 \cdot q^d{}_0 = 10$ a $p_1 \cdot q^d{}_1 = 8$.

➤ Tampoc <u>no és cert que, amb demanda elàstica, una disminució del preu sempre provoqui un augment de la despesa</u>. Per exemple, sigui $a = (p_0, q^d{}_0) = (10, 1)$ i $b = (p_1, q^d{}_1) = (4, 2)$. En aquest cas, $\underset{a\to b}{\varepsilon^d_p} = -\frac{2-1}{4-10}\frac{10}{1} = \frac{5}{3} > 1$. A més, en el pas d'*a* a *b*, el preu es redueix, de 10 a 4. Però la despesa no augmenta, ja que passa de $p_0 \cdot q^d{}_0 = 10$ a $p_1 \cdot q^d{}_1 = 8$.

PROPOSICIÓ 2. *Per a tota funció de demanda* <u>*lineal*</u> $q^d = \alpha - \beta p$*, i per a qualssevol punts diferents* $a = (p_0, q^d{}_0)$ *i* $b = (p_1, q^d{}_1)$ *de la funció de demanda:*

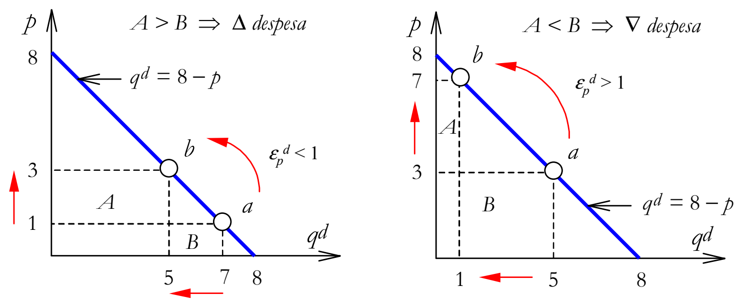
- *si* $\underset{a\to b}{\varepsilon^d_p} < 1$ *i el preu* <u>*augmenta*</u> *d'a a b, aleshores la despesa* <u>*augmenta*</u> *sempre i quan* $p_0 + p_1 < \frac{\alpha}{\beta}$*; i*
- *si* $\underset{a\to b}{\varepsilon^d_p} > 1$ *i el preu* <u>*disminueix*</u> *d'a a b, aleshores la despesa* <u>*augmenta*</u> *sempre i quan* $p_0 + p_1 > \frac{\alpha}{\beta}$*.*

➤ La Proposició 2 diu que <u>la inversa de la Proposició 1 és vàlida per a funcions lineals en determinats casos</u>. Així, si el preu final p_1 està suficientment a prop del preu inicial p_0, demanda inelàstica i augment de preu implica augment de la despesa. Però si p_0 i p_1 estan allunyats, una demanda inelàstica no garanteix que un augment del preu es tradueixi en un augment de la despesa. Per exemple, sigui la funció de demanda lineal que passa pels punts $a = (p_0, q^d{}_0) = (1, 10)$ i $b = (p_1, q^d{}_1) = (2, 4)$. Llavors, en el pas d'*a* a *b*, la demanda és inelàstica, el preu augmenta però la despesa no augmenta.

➤ De manera similar, si el preu final p_1 està suficientment a prop del preu inicial p_0, demanda elàstica i reducció de preu implica augment de la despesa. Però si p_0 i p_1 estan allunyats, una demanda elàstica no garanteix que una reducció del preu es tradueixi en un augment de la despesa. Per exemple, sigui la funció de demanda lineal que passa pels punts $a = (p_0, q^d{}_0) = (10, 1)$ i $b = (p_1, q^d{}_1) = (4, 2)$. Llavors, en el pas d'*a* a *b*, la demanda és elàstica, el preu disminueix però la despesa no augmenta.

➤ Les Figs. 19 i 20 il·lustren gràficament aquests resultats (en el cas de demanda inelàstica) per a la funció de demanda $q^d = 8 - p$. Per a aquesta funció, $\alpha = 8$ i $\beta = 1$. Comencem per la Fig. 19. En el pas d'*a* a *b*, el preu augmenta de $p_0 = 1$ a $p_1 = 3$ i, atès que *a* se situa a la part baixa de la recta, $\underset{a\to b}{\varepsilon^d_p} < 1$. La Proposició 2 diu que la despesa augmentarà sempre i quan la suma $p_0 + p_1 = 1 + 3$ dels preus sigui <u>inferior</u> a $\frac{\alpha}{\beta} = 8$. En aquest cas la condició es compleix i, efectivament, la despesa augmenta: de 7 a 15. Gràficament, l'augment de la despesa significa que l'àrea *A* (l'augment de despesa causat per pagar més per les unitats que es compren tant abans com després) és més gran que l'àrea *B* (la reducció de despesa causada per comprar menys unitats).

➤ La Fig. 20 il·lustra el fet que, si el preu final p_1 fos tal que $p_0 + p_1 > \frac{\alpha}{\beta}$, la despesa no augmentaria. A la Fig. 20, en el pas d'*a* a *b*, el preu augmenta de $p_0 = 3$ a $p_1 = 7$ i, atès que *a* se situa a la dreta del punt mitjà (4, 4) de la recta, $\underset{a\to b}{\varepsilon^d_p} < 1$. Però ara la despesa disminueix, en passar de 15 a 7. Gràficament, l'augment de despesa causat per comprar unitats a un preu superior (àrea *A*) és inferior a la disminució de despesa causada per deixar de comprar unitats que abans es compraven (àrea *B*).



Figs. 19 i 20. Elasticitat i despesa dels consumidors

➤ Il·lustrem amb la Fig. 20 el cas de demanda elàstica: en el pas de *b* a *a*, el preu cau i, en ser el punt de partida *b* a la part alta, $\underset{b\to a}{\varepsilon^d_p} > 1$. Per la Proposició 2, per a què la despesa augmenti, cal que la suma de preus sigui <u>superior</u> a $\frac{\alpha}{\beta} = 8$. En aquest cas, la suma de preus és $7 + 3 > 8$ i, efectivament, en el pas de *b* a *a*, la despesa augmenta: de 7 a 15.

Exercicis de la Lliçó 9

1. Sigui $q^d = 12 - p$ la funció de demanda d'un consumidor. Si $p = 4$, quin és l'increment més gran del preu que causa un augment de la despesa del consumidor?

2. Quan considerem la relació entre elasticitat preu de la demanda d'un punt a un altre i la despesa d'un consumidor, quina importància té que la variació dels preus sigui "gran" o "petita"?

3. A la funció de demanda d'un consumidor $q^d = 100 - p$, troba dos punts a i b tals que l'elasticitat preu de la demanda d'a a b sigui inferior a 1 i, en el pas d'a a b, el preu augmenti i la despesa del comprador disminueixi.

4. A la funció de demanda d'un consumidor $q^d = 100 - p$, troba dos punts a i b tals que l'elasticitat preu de la demanda d'a a b sigui superior a 1 i, en el pas d'a a b, el preu disminueix i la despesa del comprador augmenta.

5. (i) Calcula l'elasticitat preu de la demanda al punt $(p, q^d) = (3, 5)$. (ii) Determina què passa amb la despesa si el preu augmenta i què li passa si el preu disminueix.

6. Considera la funció de demanda de mercat $q^d = 20 - 2p$ i el punt $(p, q^d) = (2, 16)$. Sense fer càlculs, determina (i justifica) si duplicar el preu fa augmentar la despesa dels consumidors o no.

7. A la Fig. 19, partint d'a, troba un punt c sobre la funció de demanda que impliqui un augment del preu respecte d'a i una reducció de la despesa.

8. A la Fig. 20, partint de b, troba troba un punt c sobre la funció de demanda que impliqui una disminució del preu respecte de b i una reducció de la despesa.

9. <u>Non plus ultra</u>. Sigui la funció de demanda $q^d = 10 - p$. (i) Expressa la funció de despesa $D = p \cdot q^d$ corresponent a punts de la funció de demanda en termes només de q^d. (ii) Quin valor de q^d maximitza la despesa? A quin punt de la funció de la demanda es correspon aquest valor? (iii) Representa la funció de demanda i, a dalt, la funció de despesa obtinguda (a tots dos casos, q^d ha d'aparèixer a l'eix d'abscisses). (iv) Verifica a la representació gràfica que, a punts de la funció de demanda on l'elasticitat preu és superior a 1, reduccions successives del preu causen augments continuats de la despesa. (v) Verifica a la representació gràfica que, a punts de la funció de demanda on l'elasticitat preu és inferior a 1, augments successius del preu causen augments continuats de la despesa.

Lliçó 10. Altres elasticitats de la demanda

Per a cada variable que pugui afectar la quantitat demandada d'un bé es pot construir una elasticitat. A banda de l'elasticitat preu hi ha dues altres elasticitats destacades: l'elasticitat renda de la demanda i l'elasticitat preu creuada de la demanda.

DEFINICIÓ 1. L'<u>elasticitat renda</u> de la demanda quan la renda monetària (d'un consumidor o dels consumidors) passa d'm_0 a m_1 i, com a conseqüència, la quantitat demandada passa de $q^d{}_0$ a $q^d{}_1$, amb la resta de factors que afecten q^d constants (<u>incloent-hi el preu del bé</u>), és

$$\underset{a\to b}{\varepsilon_r^d} = \frac{\dfrac{q_1^d - q_0^d}{q_0^d}}{\dfrac{m_1 - m_0}{m_0}} = \frac{q_1^d - q_0^d}{m_1 - m_0}\frac{m_0}{q_0^d} = \frac{\Delta q^d}{\Delta m}\frac{m_0}{q_0^d}$$

on a es defineix ara com el parell $(m_0, q_0{}^d)$ i b es defineix com el parell $(m_1, q_1{}^d)$.

- La fórmula d'elasticitat renda de la demanda és idèntica a la fórmula d'elasticitat preu de la demanda (d'un punt a un altre) amb la diferència que es reemplaça el preu p per la renda m del consumidor (i no es canvia el signe).

- <u>La fórmula de l'elasticitat renda de la demanda només es pot aplicar quan el canvi en la quantitat demandada ha estat provocat exclusivament per un canvi de la renda</u>, perquè el propòsit de la fórmula és mesurar quant sensible ha estat la quantitat demandada a canvis en la renda.

REMARCA 2. <u>L'elasticitat renda de la demanda i tipus de béns</u>. Si, per a una variació donada de la renda resulta que

- $\varepsilon_r^d < 0$ aleshores el bé es comporta com un bé <u>inferior</u>;
- $\varepsilon_r^d > 0$ aleshores el bé es comporta com un bé <u>normal</u>;
- $\varepsilon_r^d > 1$ aleshores el bé es comporta com un bé <u>de luxe</u>;
- $0 < \varepsilon_r^d < 1$ aleshores el bé es comporta com un bé <u>de primera necessitat</u>.

Si, per a tota variació de la renda $\varepsilon_r^d < 0$, es diu que el bé <u>és inferior</u>; si $\varepsilon_r^d > 0$, que <u>és normal</u>; si $\varepsilon_r^d > 1$, que <u>és de luxe</u>; i si $0 < \varepsilon_r^d < 1$, que <u>és de primera necessitat</u>.

DEFINICIÓ 3. L'<u>elasticitat preu creuada</u> de la demanda del bé X respecte del bé Y quan el preu d'Y passa de p_{Y0} a p_{Y1} i, com a conseqüència, la quantitat demandada d'X passa de $q^d{}_0$ a $q^d{}_1$, amb la resta de factors que afecten q^d constants (<u>incloent-hi el preu del bé</u>), és

$$\underset{a\to b}{\varepsilon_{XY}^d} = \frac{\dfrac{q_1^d - q_0^d}{q_0^d}}{\dfrac{p_{Y1} - p_{Y0}}{p_{Y0}}} = \frac{q_1^d - q_0^d}{p_{Y1} - p_{Y0}}\frac{p_{Y0}}{q_0^d} = \frac{\Delta q^d}{\Delta p_Y}\frac{p_{Y0}}{q_0^d}$$

on a es defineix ara com el parell $(p_{Y0}, q_0{}^d)$ i b es defineix com el parell $(p_{Y1}, q_1{}^d)$.

- La fórmula d'elasticitat preu creuada de la demanda d'X respecte d'Y és idèntica a la de l'elasticitat preu de la demanda (d'un punt a un altre) del bé X amb la diferència que es reemplaça el preu p del bé X pel preu p_Y del bé Y (i no es canvia el signe).

- <u>La fórmula de l'elasticitat renda de la demanda només es pot aplicar quan el canvi en la quantitat demandada ha estat provocat exclusivament per un canvi en el preu d'Y</u>, perquè el propòsit de la fórmula és mesurar quant sensible ha estat q^d a canvis en p_Y.

REMARCA 4. Elasticitat preu creuada de la demanda i tipus de béns. Si, per a una variació donada del preu d'Y resulta que

- $\varepsilon^d_{XY} < 0$ aleshores el bé X es comporta com a complementari del bé Y;
- $\varepsilon^d_{XY} > 0$ aleshores el bé X es comporta com a substitutiu del bé Y;
- $\varepsilon^d_{XY} = 0$ aleshores el bé X es comporta com a independent del bé Y.

Si, per a tota variació de p_Y, $\varepsilon^d_{XY} < 0$, es diu que X és complementari d'Y; si $\varepsilon^d_{XY} > 0$, que és substitutiu d'Y; i si $\varepsilon^d_{XY} = 0$, que X és independent d'Y.

Exercicis de la Lliçó 10

1. Completa la següent taula en el que es pugui.

temps	m	p	q^d	ε_p^d	ε_m^d
1	8	1	10		
2		2		0'5	
3	6				3
4	5	3	12		

2. Si el preu d'un bé ha augmentat un 10%, la quantitat demandada ha disminuït un 50% i la renda ha disminuït un 25%: (i) obté l'elasticitat preu i l'elasticitat renda de la demanda; i (ii) indica si es tracta d'un bé inferior, de luxe o de primera necessitat.

3. A la següent taula, estableix de quin moment t a quin moment t' es pot calcular: (i) l'elasticitat preu de la demanda; (ii) l'elasticitat renda de la demanda; (iii) l'elasticitat preu creuada de la demanda. (iv) Hi ha dos moments entre els quals es pugui calcular més d'una elasticitat?

temps	p_X	p_Y	m	q^d_X
1	5	5	5	5
2	5	5	6	4
3	6	6	6	2
4	5	6	6	3
5	6	5	6	1

4. Quina és l'elasticitat renda de la demanda si la renda augmenta un 25% i la quantitat demanda disminueix un 50%? Què significa el valor obtingut?

5. És possible saber simultàniament que un bé és normal i que és complementari d'un altre bé?

Preguntes de tipus test del Tema 2

1. Quina de les següents funcions no pot ser considerada una funció de demanda?
(a) $q^d = 2/p$ (b) $q^d = 2 - p$
(c) $q^d = 2/p^2$ (d) $q^d = 2 + p$

2. Sigui $q^d = 16 - 2p$ una funció de demanda de mercat. El preu inicial és $p_0 = 3$ i augmenta fins a p_1. La despesa dels consumidors augmenta de p_0 a p_1 si, i només si:
(a) $p_0 = p_1$ (b) $p_0 + p_1 > 8$
(c) $p_0 + p_1 > 16$ (d) Res de l'anterior

3. L'excedent d'un consumidor és negatiu si el consumidor compra la quantitat $q = 2$ a preu
(a) $p = -1$ (b) $p = 0$
(c) $p = 2$ (d) Res de l'anterior

4. En el cas d'un bé inferior
(a) un augment de la renda desplaça la funció de demanda del consumidor cap a la dreta
(b) una reducció de la renda desplaça la funció de demanda del consumidor cap a l'esquerra
(c) un augment del preu del bé desplaça la funció de demanda del consumidor cap a la dreta
(d) cap de les afirmacions anteriors no és correcta

5. Amb funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p$, si $p = 2$ aleshores una reducció de p causa
(a) una disminució de la quantitat demandada
(b) un augment de la despesa dels consumidors
(c) un desplaçament a la dreta de la funció de demanda de mercat
(d) una reducció de la despesa dels consumidors

6. Si l'elasticitat preu de la demanda al punt (5, 5) d'una funció de demanda de la forma $q^d = \alpha - \beta p$ és 1, la funció de demanda
(a) no es pot determinar (b) és $q^d = 5 + 5p$
(c) és $q^d = 5 - 5p$ (d) és $q^d = 10 - p$

7. Si l'elasticitat preu de la demanda d'una funció de demanda de mercat és més gran que 1 i hi ha hagut un augment del preu
(a) la despesa dels consumidors no s'ha modificat
(b) la quantitat demandada ha augmentat
(c) la despesa dels consumidors ha augmentat
(d) la despesa dels consumidors ha disminuït

8. Si hi ha dos grups de consumidors d'un bé, amb funcions de demanda $q^d_1 = 10 - p$ i $q^d_2 = 20 - 2p$, la funció de demanda de mercat
(a) no es pot calcular (b) és $q^d = 10 - p$
(c) no existeix (d) és $q^d = 30 - 3p$

9. Si el preu d'un cert bé Y és 20, la quantitat demandada total d'un altre bé X és 20 i, com a conseqüència de la reducció a la meitat del preu d'Y, la quantitat demandada d'X també es redueix a la meitat
(a) X és complementari d'Y
(b) l'elasticitat renda de la demanda és 1
(c) l'elasticitat preu creuada de la demanda d'X respecte del preu d'Y és –1
(d) l'elasticitat preu creuada de la demanda d'X respecte del preu d'Y és 1

10. A la pregunta 9, el bé X es comporta com a bé
(a) inferior (b) subnormal
(c) anormal (d) Res de l'anterior

11. Què és més probable que desplaci la funció de demanda de mercat d'un bé normal cap a la dreta?
(a) La reducció del nombre de consumidors del bé
(b) La reducció del preu del bé
(c) La reducció de la renda dels consumidors
(d) L'augment de preferència pel bé per part dels consumidors

12. En el cas d'un bé inferior X que és complementari d'un bé normal Y, quan es produeix un augment en la renda dels consumidors i, alhora, una disminució del preu d'Y, la funció de demanda de mercat d'X
(a) desapareix (b) es mou a l'esquerra
(c) pateix un efecte incert (d) es mou a la dreta

13. Amb funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p$, l'excedent dels consumidors quan el preu és 4 i la quantitat adquirida és la que determina la funció de demanda de mercat és
(a) 18 (b) 36
(c) 24 (d) no es pot calcular

14. Amb funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p$ i preu inicial 1, si el preu és multiplica per 5 hi ha
(a) un augment de 5 unitats en la quantitat demandada
(b) un augment de l'excedent dels consumidors
(c) una reducció en la despesa dels consumidors
(d) Res de l'anterior

15. S'ha produït un augment del 10% en la renda d'un consumidor i, simultàniament, el preu d'un bé i la quantitat demandada del bé han disminuït un 10%. Quina afirmació és certa?
(a) L'elasticitat preu de la demanda és 1
(b) La situació anterior és impossible perquè el preu i la quantitat demandada han disminuït
(c) L'elasticitat preu de la renda és 1
(d) El bé es comporta com un bé inferior

16. Si es produeix una desplaçament cap a la dreta d'una funció de demanda d'un bé quan s'ha reduït la renda dels consumidors i, al mateix temps, s'ha reduït el nombre de consumidors del bé, és versemblant concloure que el bé és
(a) hipercomplementari (b) normal
(c) inferior (d) inelàstic

17. Si es produeix un desplaçament d'una funció de demanda individual d'un bé X cap a la dreta, una explicació pot ser que
(a) el preu del bé ha disminuït
(b) el bé és normal i la renda del consumidor ha minvat
(c) el preu d'un bé complementari d'X s'ha apujat
(d) la preferència del consumidor pel bé ha augmentat

18. S'ha produït un augment del 10% en la renda d'un consumidor i, simultàniament, el preu d'un bé ha disminuït un 5%. Si la quantitat demandada del bé pel consumidor ha augmentat un 50%
(a) l'elasticitat renda de la demanda és 5
(b) l'elasticitat preu de la demanda és 10
(c) la despesa del consumidor en el bé ha crescut un 250%
(d) no es poden calcular ni l'elasticitat preu ni l'elasticitat renda

19. Considera les funcions de demanda $q^d = 10 - p$ i $q^d = 15 - 2p$. Aleshores, l'elasticitat preu de la demanda al punt (5, 5)
(a) és igual a la primera que a la segona funció
(b) no hi ha prou informació per a determinar a quina funció és més gran
(c) és més gran a la primera que a la segona funció
(d) és més gran a la segona que a la primera funció

20. A les funcions de demanda lineals, l'elasticitat preu de la demanda d'un punt a a un punt b
(a) pren sempre el mateix valor
(b) coincideix amb l'elasticitat preu de la demanda del punt b a l'a
(c) coincideix amb l'elasticitat preu de la demanda al punt a
(d) cap de les respostes anteriors no és certa

21. Quan es diu que $q^d = 10 - 2p$ és una funció de demanda s'entén que q^d és zero si
(a) $p = 0$ (b) $p = 2$
(c) $p = 4$ (d) $p = 6$

22. El punt (p, q^d) de la funció de demanda de $q^d = 16 - 2p$ on 36 és l'excedent dels consumidors és
(a) (6, 4) (b) (5, 6)
(c) (4, 8) (d) Res de l'anterior

23. *L'elasticitat preu de la demanda del punt a al b d'una funció de demanda de mercat és superior a 1. Si entre aquests dos punts hi ha hagut una reducció del preu, és segur que*
(a) *la despesa ha augmentat en el pas d'a a b*
(b) *la despesa és màxima*
(c) *la despesa roman constant en el pas d'a a b*
(d) *res de l'anterior*

24. *Amb funció de demanda de mercat $q^d = 10 - 2p$, l'excedent dels consumidors quan $p = 2$ és*
(a) *15* (b) *6* (c) *12* (d) *9*

25. *Si la quantitat demandada d'un bé per part d'un consumidor ha augmentat un 100% com a conseqüència d'una reducció del 50% en la seva renda, el valor de l'elasticitat preu de la demanda*
(a) *no es pot calcular* (b) *està entre 50 i 100*
(c) *és inferior a 1* (d) *és superior a 1*

26. *A la funció de demanda de mercat $q^d = 16 - 2p$, l'elasticitat preu de la demanda és inferior a 1 quan el punt final és $(p_1, q^d_1) = (0, 16)$ i el punt inicial és $(p_0, q^d_0) =$*
(a) *(6, 4)* (b) *(5, 6)*
(c) *(4, 8)* (d) *(3, 10)*

27. *Un augment del preu d'un bé del qual el bé X és complementari combinat amb una reducció de la renda dels consumidors tendirà a produir sobre la funció de demanda de mercat d'X*
(a) *un desplaçament cap a la dreta sempre*
(b) *un desplaçament cap a l'esquerra sempre*
(c) *necessàriament no provoca cap canvi sobre la funció de demanda d'X*
(d) *un desplaçament cap a l'esquerra si X és un bé normal*

28. *Hi ha dos grups de consumidors d'un bé amb funcions de demanda $q^d = 8 - p$ i $q^d = 16 - 2p$. Quin dels següents punts (p, q^d) pertany a la funció de demanda de mercat corresponent?*
(a) *(10, 0)* (b) *(8, 24)*
(c) *(24, 8)* (d) *Res de l'anterior*

29. *Si només es produeix l'augment de preu d'un bé inferior, la funció de demanda d'un consumidor del bé es desplaçarà*
(a) *cap a l'esquerra*
(b) *cap a l'esquerra si, a més, la renda del consumidor es redueix*
(c) *cap a la dreta*
(d) *no es modificarà*

30. *Un consumidor racional preu acceptant tria la quantitat demandada per a*
(a) *maximitzar la seva utilitat marginal*
(b) *maximitzar la seva utilitat*
(c) *maximitzar la seva funció de demanda*
(d) *Res de l'anterior*

31. *La quantitat demandada per un consumidor racional preu acceptant amb funció d'utilitat $U = 2q - q^2$ quan el preu és 10*
(a) *és $q = 4$* (b) *és $q = 0$*
(c) *no es pot calcular* (d) *Res de l'anterior*

32. *Una funció de demanda de mercat d'un bé s'ha desplaçat cap a la dreta. Una possible causa és que*
(a) *el bé és normal*
(b) *l'elasticitat preu de la demanda és superior a 1*
(c) *l'excedent dels compradors és negatiu*
(d) *Res de l'anterior*

33. *Amb funció de demanda de mercat $q^d = 16 - 2p$, l'excedent dels consumidors quan el preu és 4 i la quantitat adquirida és 16 és*
(a) *0* (b) *positiu*
(c) *negatiu* (d) *no es pot calcular*

34. *A la funció de demanda de mercat $q^d = 16 - 2p$, si el preu inicial és $p_0 = 7$, l'únic preu p_1 que fa que q^d es dupliqui és*
(a) $p_1 = 6$ (b) $p_1 = 14$
(c) *ni (a) ni (b)* (d) *no existeix*

35. *Què provoca un efecte indeterminat sobre una funció de demanda de mercat d'un bé X de primera necessitat?*
(a) *Que el 50% dels consumidors augmentin el desig de consumir X i, simultàniament, l'altre 50% no desitgi consumir el bé*
(b) *La reducció de la renda de tots els consumidors*
(c) *L'augment del preu d'un bé del qual X és substitutiu*
(d) *La reducció del preu d'un bé Y que és independent d'X i del qual X és independent combinat amb un augment del preu d'X*

36. *L'elasticitat preu de la demanda del punt $(p_0, q_0^d) = (8, 2)$ a un punt (p_1, q_1^d) de la funció de demanda $q^d = 10 - p$ és inferior a 1 si*
(a) $p_1 = 8$ (b) $p_1 = 6$
(c) $p_1 = 4$ (d) *Res de l'anterior*

37. *Hi ha dos grups de consumidors, que tenen les funcions de demanda $q_1^d = 10 - p$ i $q_2^d = 10 - p/2$. Aleshores, la funció de demanda de mercat*
(a) *no es pot calcular*
(b) *és $Q^d = 20 - 3p/2$ per a tot $p \geq 0$*
(c) *coincideix amb la funció de demanda del grup 2 per a preus entre 10 i 20*
(d) *Res de l'anterior*

38. *Si la quantitat demandada del bé X s'ha duplicat com a conseqüència de la reducció a la meitat del preu d'un altre bé Y*
(a) *l'elasticitat preu creuada de la demanda d'X és positiva*
(b) *el bé X és un bé inferior*
(c) *la funció de demanda d'X s'ha modificat*
(d) *l'elasticitat preu de la demanda d'X és superior a 1*

39. *Un consumidor que vol maximitzar el seu excedent de la compra d'un bé té $U(q) = 10q - q^2/2$ com a funció d'utilitat del bé. Quan el preu del bé és $p = 2$, triarà la quantitat q tal que*
(a) *la utilitat marginal de q sigui superior a 2*
(b) $q = 8$
(c) *la utilitat marginal de q sigui inferior a 2*
(d) *Res de l'anterior*

40. *Si la quantitat demandada d'un bé d'un consumidor ha disminuït*
(a) *l'única explicació possible és que el preu d'un altre bé ha augmentat*
(b) *la renda del consumidor ha augmentat i el bé és de luxe*
(c) *podria ser que l'elasticitat renda de la demanda del bé fos negativa*
(d) *és segur que la funció de demanda del consumidor s'ha desplaçat a l'esquerra*

41. *Si l'elasticitat preu de la demanda del punt a al punt b d'una funció de demanda de mercat és superior a 1, i del punt a al punt b es produeix un augment del preu, la despesa dels consumidors*
(a) *ha augmentat* (b) *ha disminuït*
(c) *es manté constant* (d) *Res de l'anterior*

42. *Si l'elasticitat preu de la demanda entre dos punts és 2 i la quantitat ha disminuït un 10%, la conclusió és que el preu del bé ha augmentat*
(a) *un 20%* (b) *un 10%*
(c) *un 2%* (d) *un 5%*

43. *Quina afirmació no és falsa?*
(a) *Si tots els consumidors d'un bé tenen la mateixa funció de demanda del bé, la funció de demanda de mercat del bé és igual a la funció de demanda de cada consumidor*
(b) *La recta $q = 2$ defineix una funció de demanda perfectament elàstica*
(c) *Si una funció de demanda és lineal, l'elasticitat preu de la demanda pren el mateix valor a cada punt de la funció*
(d) *Les tres afirmacions anteriors són falses*

44. *La funció de demanda de mercat d'un bé inferior és $q^d = 10 - p$. Si es redueix el nombre de consumidors, augmenta la seva renda i s'apuja el preu d'un bé del qual X és complementari, quina funció podria ser la nova funció de demanda d'X?*
(a) $q^d = 5 - p$
(b) $q^d = 20 - p$
(c) *La funció de demanda no es modifica perquè no se sap què passa amb el preu del bé*
(d) *Res de l'anterior*

45. *Una funció d'utilitat creixent significa que*
(a) *la funció d'utilitat marginal és creixent*
(b) *la quantitat demandada serà sempre zero*
(c) *el consumidor està disposat a pagar cada cop més per cada quantitat del bé*
(d) *l'excedent del consumidor és màxim*

46. *Assumint que la utilitat de $q = 0$ és zero, la utilitat de $q = 10$ quan la funció d'utilitat marginal és $UMg = 20 - q$ és*
(a) *10* (b) *50*
(c) *150* (d) *No es pot calcular*

47. *A la funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p/2$, si la quantitat comprada és $q = 6$ i l'excedent dels consumidors és 24, el preu*
(a) *és 10* (b) *és 8*
(c) *no es pot calcular* (d) *Res de l'anterior*

48. *Sigui a el punt de la funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p/2$ on $p = 4$, b el punt on $p = 6$, c el punt on $p = 10$, d el punt on $p = 12$, e el punt on $p = 14$, f el punt on $p = 16$ i g el punt on $p = 20$. Ordenant els punts de menys a més elasticitat preu al punt*
(a) *resulta l'ordre a – b – c – d – e – f – g*
(b) *resulta l'ordre g – f – e – d – c – b – a*
(c) *no resulta ni (a) ni (b)*
(d) *resulta que no es pot determinar l'ordre*

49. *Davant un augment de la renda dels consumidors en un 100% i d'una disminució del preu d'un bé en un 100%, s'ha observat un augment de la quantitat demandada del bé en un 100%. D'aquestes dades es pot inferir que*
(a) *l'elasticitat preu de la demanda del bé és 1*
(b) *l'elasticitat renda de la demanda del bé és 1*
(c) *tant (a) com (b) són certes*
(d) *ni (a) ni (b) són certes*

50. *L'elasticitat preu creuada de la demanda d'un cert bé X respecte d'un altre bé Y*
(a) *és sempre positiva*
(b) *és negativa si la renda disminueix*
(c) *pot ser zero*
(d) *res de l'anterior*

51. *S'ha produït un desplaçament cap a la dreta d'una funció de demanda d'un bé X d'un consumidor. Una possible explicació és que*
(a) *el consumidor s'ha mort*
(b) *ha disminuït el preu d'un altre bé del qual X és complementari*
(c) *el preu d'X s'ha reduït*
(d) *la renda ha augmentat i X és un bé inferior*

52. *Amb a, b i c essent 3 punt diferents (amb quantitat positiva) d'una funció de demanda lineal, l'elasticitat preu*
(a) *d'a a c coincideix amb l'elasticitat preu de b a c*
(b) *d'a a c coincideix amb l'elasticitat preu de c a a*
(c) *d'a a c coincideix amb l'elasticitat renda de b a c*
(d) *Res de l'anterior*

53. *Què no pot causar un augment de la quantitat demandada?*
(a) *Una modificació de la funció d'utilitat*
(b) *Un canvi de la funció d'utilitat marginal*
(c) *Una modificació de la funció de demanda*
(d) *Res de l'anterior*

54. *Quina afirmació no és falsa?*
(a) *La funció d'excedent d'un consumidor s'obté maximitzant la seva funció de demanda*
(b) *La funció d'utilitat marginal d'un consumidor s'obté maximitzant la seva funció d'utilitat*
(c) *La funció demanda d'un bé d'un consumidor s'obté maximitzant l'elasticitat renda*
(d) *Les tres afirmacions anteriors són falses*

55. *L'excedent del consumidor amb funció de demanda $q^d = 10 - p/2$ és negatiu al punt*
(a) $(p, q) = (20, 10)$ (b) $(p, q) = (10, 10)$
(c) $(p, q) = (0, 10)$ (d) *Res de l'anterior*

Tema 3. Monopoli i duopoli

Lliçons 1–7

Antoine Augustin Cournot (1801–1877)
http://en.wikipedia.org/wiki/Cournot

Economista, matemàtic i filòsof francès. Pioner de l'economia matemàtica. Al seu llibre *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838) presenta i analitza els models de monopoli i duopoli.

Arthur Cecil Pigou (1877–1959)
http://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cecil_Pigou

Economista anglès. Estudiant d'Alfred Marshall. Pioner de l'Economia del Benestar. Formulà la distinció entre discriminació de preus de primer, segon i tercer grau a *The Economics of Welfare* (1920). John M. Keynes va escriure *The General Theory…* (1936) presentant Pigou com l'exemple del que estava malament a l'anàlisi macroeconòmica.

Heinrich Freiherr von Stackelberg (1905–1946)
http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Freiherr_von_Stackelberg

Economista alemany nascut a Moscou. Presentà el seu model de duopoli a *Marktform und Gleichgewicht* (*Mercat i equilibri*, 1934). El duopoli d'Stackelberg es diferencia del model de Cournot en el fet que un duopolista (el líder) decideix abans que l'altre (el seguidor).

Lliçó 1. Funcions de costs

DEFINICIÓ 1. La <u>funció de cost total</u> d'un productor d'un bé expressa el cost monetari total $C(q)$ per al productor de produir la quantitat (o volum de producció) q del bé.

- Al Tema 2, la funció d'utilitat ha estat l'element sobre el qual s'ha construït una teoria sobre com pren decisions un consumidor preu acceptant. En el cas d'un productor (no necessàriament preu acceptant), la funció de cost total és el punt de partida per a <u>representar com un productor d'un bé pren decisions sobre la quantitat del bé que desitja produir</u> i vendre.

DEFINICIÓ 2. El <u>cost fix</u> CF és el cost total $C(0)$ de produir $q = 0$ (o cost de no produir). La funció de <u>cost variable</u> $CV(q) = C(q) - CF$ és la diferència entre el cost total i el cost fix, i expressa el cost derivat del fet de produir.

- Per tant, el cost total és la suma d'un <u>cost fix</u> (cost que ha d'assumir el productor si no produeix) i un <u>cost variable</u> (cost causat per posar-se a produir). Així, tota funció de cost total $C(q)$ pot expressar-se de la forma $C(q) = CF + CV(q)$, on $CF = C(0)$ és el cost fix CF i $CV(q)$ és la funció de cost variable, definida de manera que $CV(0) = 0$.

EXEMPLE 3. A la funció de cost total $C(q) = 10 - \frac{q}{4} + 3q^2$, el cost fix CF és $C(0) = 10$ i la funció de cost variable és $CV(q) = C(q) - CF = \left(10 - \frac{q}{4} + 3q^2\right) - 10 = -\frac{q}{4} + 3q^2$.

DEFINICIÓ 4. La <u>funció de cost marginal</u> $CMg(q)$ que correspon a una funció de cost total $C(q)$ és la derivada $\frac{\partial C(q)}{\partial q}$ de la funció de cost total.

- Una funció de cost marginal expressa la <u>variació</u> en el cost total deguda a la producció de l'"última" de les unitats produïdes. Equivalentment, $CMg(q)$ és el <u>cost de producció generat per l'"última" unitat produïda</u> quan es produeix la quantitat q del bé.

REMARCA 5. Atès que $C(q) = CF + CV(q)$ i que CF (el cost fix) és una constant, <u>la funció de cost marginal també és la derivada de la funció de cost variable</u> $CV(q)$.

EXEMPLE 6. La funció de cost marginal de $C(q) = 10 - \frac{q}{4} + 3q^2$ és $CMg(q) = \frac{\partial C(q)}{\partial q} = -\frac{1}{4} + 6q$. Aquesta és la mateixa funció que s'obté derivant la funció de cost variable $CV(q) = -\frac{q}{4} + 3q^2$. Per exemple, $C(8) = 10 - \frac{8}{4} + 3\cdot 8^2 = 200$ diu que produir les 8 primeres unitats del bé genera una despesa de 200 unitats monetàries i $CMg(8) = -\frac{1}{4} + 6\cdot 8 = 47'25$ diu que l'"última" unitat produïda quan es produeix la quantitat 8 ha generat una despesa de 47'25 unitats monetàries.

EXEMPLE 7. Les següents representacions gràfiques són exemples de la relació entre una funció de cost total i la seva funció de cost marginal.

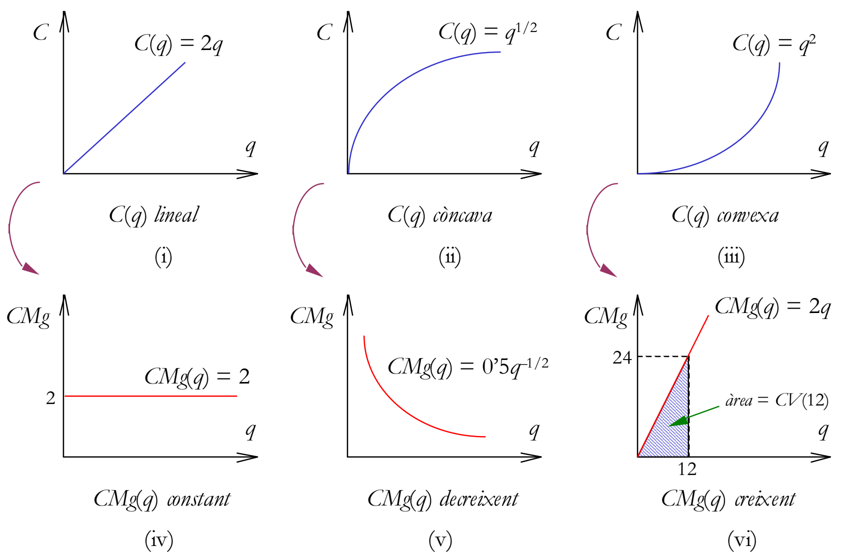


Fig. 1. Relació entre la funció de cost total i la funció de cost marginal

REMARCA 8. Atès que la funció de *CMg* és la derivada de la funció de cost variable i que el cost variable de $q = 0$ és zero, la funció de cost variable s'obté integrant la funció de *CMg*. Això significa que el cost variable és l'àrea per sota la funció de cost marginal.

- A tall d'exemple, sigui $CV(q) = q^2$ (Fig. 1(iii)). Aleshores, $CMg(q) = 2q$ (Fig. 1(vi)). Prenguem un valor qualsevol de q, com ara $q = 12$. L'àrea per sota la funció de cost marginal limitada a l'esquerra per l'eix d'ordenades i a la dreta per la recta vertical traçada sobre $q = 12$ és l'àrea d'un triangle amb base 12 (el valor de q) i alçada 24 (el cost marginal quan $q = 12$), tal i com mostra la Fig. 1(vi). L'àrea d'aquest triangle és $(12·24)/2 = 144$, que és el cost variable quan $q = 12$: $CV(12) = 12^2 = 144$.

Exercicis de la Lliçó 1

1. Representa gràficament les següents funcions de cost total i les corresponents funcions de cost marginal: (i) $C(q) = 2 + 3q$; (ii) $C(q) = 2 + 3q^{1/3}$; (iii) $C(q) = 2 + 3q^3$; (iv) $C(q) = 2$; (v) $C(q) = 2 \ln q$.

2. Omple la següent taula en el que es pugui, assumint que q només pren valors discrets.

q	*C*	*CF*	*CV*	*CMg*
0	5			
1			4	
2	30			
3			50	
4				20
5				
6				

Lliçó 2. El mercat monopolístic (o monopoli)

DEFINICIÓ 1. Un mercat monopolístic (o monopoli) és un mercat on hi ha un únic productor (anomenat monopolista), on tots els consumidors són preu acceptants i on el preu del bé (o preu de mercat del bé) és el mateix per a tots els consumidors.

- Els consumidors es representen mitjançant una funció de demanda de mercat. Per a simplificar, suposarem que la funció de demanda de mercat és lineal.

- El monopolista es representa mitjançant un funció de cost total (típicament, una funció derivable, creixent i convexa). S'assumeix que el monopolista sap quina és la funció de demanda de mercat.

REMARCA 2. Un monopoli pot ser interpretat com un joc seqüencial on: (i) inicialment, el monopolista tria tant un preu de mercat p com una quantitat produïda q; i (ii) a continuació, observant el preu p fixat pel monopolista, els consumidors trien (seguint la funció de demanda de mercat) la quantitat total demandada q^d.

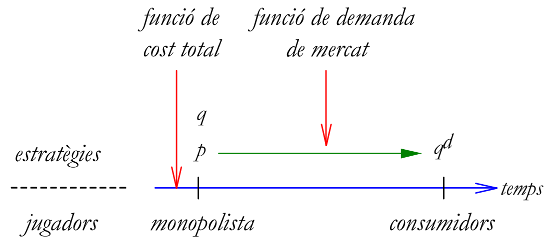


Fig. 2. Esquema del monopoli com a joc seqüencial

DEFINICIÓ 3. La funció d'ingrés total d'un monopolista és $I(p, q) = p·q$. Aquesta funció indica quin és l'ingrés que obté el monopolista quan ven la quantitat q a preu p.

DEFINICIÓ 4. La funció de beneficis d'un monopolista és $\Pi(p, q, q^d) = I(p, q^d) - C(q)$, on $q \leq q^d$. Aquesta funció indica quin és el benefici del monopolista quan produeix la quantitat q i ven la quantitat $q \leq q^d$ a preu p.

- Trobar la solució del monopoli consisteix en determinar quin és el preu de mercat i quina la quantitat intercanviada al mercat, és a dir, quina quantitat els consumidors compren (que no necessàriament és la quantitat que demanden) al monopolista.

- La solució del monopoli, com la de qualsevol joc, es trobarà suposant que consumidors i monopolista són racionals. Per a cada consumidor, racionalitat significa triar q de manera que es maximitza la seva funció d'excedent. Això implica triar d'acord amb el que indica la seva funció de demanda. Quan es consideren tots els consumidors, racionalitat implica triar d'acord amb la funció de demanda de mercat.

DEFINICIÓ 5. Un monopolista és racional si tria el preu de mercat p i la quantitat produïda q amb l'objectiu de maximitzar la seva funció de beneficis.

REMARCA 6. Que un monopolista produeixi la quantitat q no significa que vengui q: com a màxim, vendrà la quantitat q, però pot acabar venent menys. El que vengui, depèn dels consumidors i, específicament, de la quantitat demandada pels consumidors al preu de mercat.

REMARCA 7. Si el monopolista és racional i la seva funció de cost total és creixent, la llibertat que té de triar el parell (p, q) consistent en un preu de mercat p i una quantitat q a produir i vendre es troba sotmesa a una restricció: que el parell (p, q) que triï sigui un punt de la funció de demanda de mercat.

- El fet que el monopolista sigui l'únic venedor del bé li atorga el poder de triar tant el preu de mercat p del bé com la quantitat q a produir i vendre. Però si és racional, es veu forçat a triar p i q de forma que q sigui la quantitat total demandada a preu p. Això significa que, de fet, el monopolista no pot triar p i q independentment: si tria el valor d'una de les variables, el valor de l'altra el determina la funció de demanda de mercat.

- Per a il·lustrar aquest fet, sigui la funció de demanda de mercat $q^d = 120 - 2p$ de la Fig. 3. Comprovem que, si el monopolista és racional, no triarà un punt (p, q) fora de la funció de demanda de mercat. Raonem per contradicció: suposem que tria un punt fora la funció de demanda de mercat i mostrem que no maximitza beneficis.

- Opció 1: el monopolista tria un punt per damunt la funció de demanda de mercat. Suposem que tria a a la Fig. 3. Aquest punt representa la decisió de produir $q = 60$ i vendre cada unitat produïda a preu $p = 50$. Però si el monopolista fixa $p = 50$, només podrà vendre la quantitat demandada a preu $p = 50$, que és $q^d = 120 - 2{\cdot}50 = 20$. Així que el benefici del monopolista si fixa el preu $p = 50$, produeix $q = 60$ i només ven $q^d = 20$ serà $\Pi(50, 60, 20) = I(50, 20) - C(60)$. En canvi, si només produís $q = 20$ i se situés al punt b, el seu benefici seria $\Pi(50, 20, 20) = I(50, 20) - C(20)$. Assumint que la funció de cost total és creixent, $C(60) > C(20)$ i, d'aquí, $\Pi(50, 60, 20) < \Pi(50, 60, 20)$. En resum, al punt a el monopolista no maximitza beneficis, ja que al punt b el benefici és superior.

- Intuïtivament, al punt a el monopolista no maximitza el seu benefici perquè no ven tot el que produeix: produeix 60 i ven només 20, de forma que 40 unitats generen un cost de producció per al monopolista però no li proporcionen cap ingrés. Per tant, el monopolista augmentaria el benefici produint justament la quantitat que ven.

- Opció 2: el monopolista tria un punt per sota la funció de demanda de mercat. Suposem que tria d a la Fig. 3. Aquest punt representa la decisió de produir $q = 60$ i vendre cada unitat produïda a preu $p = 10$. El preu $p = 10$ permet al monopolista vendre $q = 60$. De fet, la funció de demanda de mercat indica que, a preu $p = 10$, el monopolista podria arribar a vendre $q^d = 120 - 2{\cdot}10 = 100$. La funció de demanda de mercat també estableix que el monopolista podria continuar venent la quantitat $q = 60$ a un preu superior. L'alçada de la funció de demanda corresponent a $q = 60$ indica quin és el preu màxim que permetria vendre $q = 60$. Aquest preu és 30. Així que el benefici del monopolista si triés d seria $\Pi(10, 60, 60) = I(10, 60) - C(60)$. Però a d no es maximitza el benefici perquè a c seria superior: el benefici a c seria $\Pi(30, 60, 60) = I(30, 60) - C(60)$. A c el cost de producció és el mateix però l'ingrés és superior, d'on resulta un benefici més gran.

- Resumint, si el monopolista pretén vendre $q = 60$: (i) un preu superior al preu $p = 30$ que estableix la funció de demanda no farà possible vendre $q = 60$, de manera que el monopolista assumirà un sobrecost per produir unitats que no ven; i (ii) un preu inferior a $p = 30$ fa que el monopolista desaprofiti l'oportunitat de carregar un preu més gran sense córrer el risc de no vendre $q = 60$. Així que si el monopolista vol vendre $q = 60$ fixarà el preu $p = 30$ que indica la funció de demanda de mercat i acabarà triant el punt c de la Fig. 4.

- En general, si el monopolista pretén vendre la quantitat q^* haurà de fixar el preu que determina la inversa de la funció de demanda de mercat per a $q = q^*$. La inversa de $q^d = 120 - 2p$ és $p = 60 - \dfrac{q}{2}$ (on s'escriu q en comptes de q^d), de forma que si el monopolista vol vendre q^*, fixarà el preu $p^* = 60 - \dfrac{q^*}{2}$. Al cas tractat anteriorment, $q^* = 60$ i el preu seria $p^* = 60 - \dfrac{60}{2} = 30$. El parell resultant (p^*, q^*) es correspon amb el punt c a la Fig. 4.

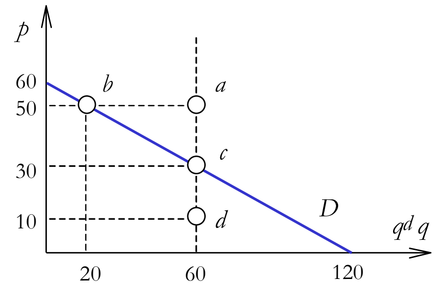


Fig. 3. Monopolista i funció de demanda de mercat

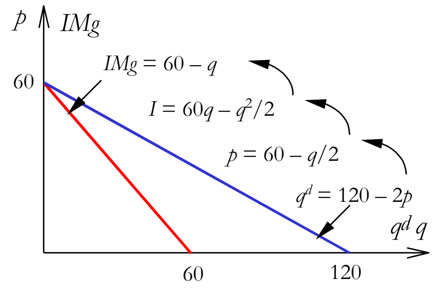


Fig. 4. Obtenció de la funció d'*IMg*

REMARCA 8. Per la Remarca 7, la decisió d'un monopolista racional consisteix en triar un punt de la funció de demanda de mercat.

- El fet que el parell (p, q) que tria el monopolista sigui un punt de la funció de demanda de mercat fa que, atès que aquesta funció s'assumeix decreixent, el monopolista hagi d'acceptar reduir el preu si pretén augmentar la quantitat venuda. Per exemple, si el monopolista ha triat inicialment el punt c a la Fig. 3 i volgués augmentar la quantitat venuda de 60 a 80, no tindria cap més remei que reduir el preu, en aquest cas de 30 a 20.

- El fet que el parell (p, q) que tria el monopolista hagi de ser un punt de la funció de demanda de mercat permet simplificar les funcions d'ingrés total i de beneficis del monopolista, ja que p és funció de q segons estableix la funció de demanda de mercat. Per exemple, un monopolista que s'enfrontés a la funció de demanda de mercat $q^d = 120 - 2p$ triaria un parell (p, q) tal que $q = 120 - 2p$ (o tal que $p = 60 - \frac{q}{2}$).

REDEFINICIÓ 9. La <u>funció d'ingrés total</u> d'un monopolista és $I(q) = p(q)\cdot q$, on <u>$p(q)$ és la inversa de la funció de demanda de mercat</u>.

- La funció d'ingrés total determina, per a cada quantitat q, <u>quin és l'ingrés que obtindria el monopolista si fixés el preu que la funció de demanda de mercat associa amb la quantitat q</u>.

- Per exemple, amb funció de demanda de mercat $q^d = 120 - 2p$, la funció inversa és $p = 60 - \frac{q}{2}$. La funció d'ingrés total que s'obtindria seria $I(q) = (60 - \frac{q}{2})\cdot q = 60q - \frac{q^2}{2}$. Si el monopolista decideix vendre $q = 10$ i fixa el preu $p = 60 - \frac{q}{2} = 55$ que estableix la funció de demanda de mercat per a $q = 10$, obtindrà un ingrés total $I(q) = 60q - \frac{q^2}{2} = 60\cdot 10 - \frac{10^2}{2} = 550$. Aquest resultat no és més que el producte pq de $p = 55$ per $q = 10$.

DEFINICIÓ 10. La <u>funció d'ingrés marginal</u> $IMg(q)$ d'un monopolista és la <u>derivada</u> $\frac{\partial I(q)}{\partial q}$ de la funció d'ingrés total i indica en <u>quant fa variar l'ingrés total l'"última" unitat de la quantitat q</u>.

- Una funció d'ingrés marginal $IMg(q)$ expressa la <u>variació</u> en l'ingrés total deguda a la venda de l'"última" de les q unitats venudes. $IMg(q)$ és, equivalentment, l'ingrés generat per l'"última" unitat venuda quan es ven la quantitat q del bé.

- Atès que la funció d'ingrés marginal s'obté d'una funció d'ingrés total i, aquesta, d'una funció de demanda, <u>la funció d'ingrés marginal expressa com varia l'ingrés total quan ens desplacem "una mica" al llarg d'una funció de demanda</u>.

- La Fig. 4 mostra l'obtenció de la funció d'ingrés marginal $IMg = 60 - q$ que correspon a la funció de demanda de mercat $q^d = 120 - 2p$. Per a <u>funcions de demanda lineals</u> del tipus $q^d = \alpha - \beta p$, on α i β són constants positives, la funció d'ingrés marginal corresponent és $IMg(q) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{2}{\beta}q$. Quan es compara la funció d'IMg amb la inversa $p = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q$ de la funció de demanda, s'observa que <u>el pendent (en termes absoluts) de la funció d'IMg és el doble del pendent de la funció de demanda</u>. La Fig. 4 il·lustra aquesta relació entre les funcions de demanda i d'ingrés marginal.

REDEFINICIÓ 11. La <u>funció de beneficis</u> d'un monopolista és $\pi(q) = I(q) - C(q)$, on $I(q)$ és la funció d'ingrés total obtinguda de la funció de demanda de mercat a què s'enfronta el monopolista i $C(q)$ és la funció de cost total del monopolista.

- La nova definició de la funció de beneficis d'un monopolista s'obté de la Definició 4 incorporant dues hipòtesis. La primera és que $q = q^d$, que significa que, per a tot preu p que triï el monopolista, el monopolista només produirà la quantitat que sap que vendrà, això és, la quantitat q^d que la funció de demanda de mercat diu que els consumidors estan disposats a comprar a preu p.

- La primera hipòtesi fa que la funció de beneficis depengui de dues variables, el preu de mercat p i la quantitat produïda q. La segona hipòtesi és que el monopolista és racional. Aquesta segona hipòtesi implica, per la Remarca 8, que p i q estan lligats per la relació que estableix la funció de demanda de mercat. Així que el monopolista pot procedir de dues maneres: (i) triar p i després produir la quantitat q^d que la funció de demanda de mercat associa amb p; o bé (ii) triar la quantitat q a produir i després fixar el preu més alt p que fa que la quantitat demandada q^d a preu p sigui justament q.

- Si suposem que el monopolista actua de la segona manera, tot a la seva funció de beneficis acaba depenent de q: el monopolista simplement tria q i aquesta elecció determina, d'una banda, el preu de mercat que estableix (el preu que la funció de demanda associa amb q) i, d'una altra, la quantitat q^d que acaba venent (la qual, per la forma en què s'ha triat el preu de mercat p, serà igual a la quantitat produïda q).

- En resum, la <u>decisió del monopolista</u> es redueix a triar q per tal de maximitzar la funció de beneficis $\pi(q) = I(q) - C(q)$, on $I(q)$ és la funció d'ingrés total obtinguda de la funció de demanda de mercat a què s'enfronta el monopolista.

Exercicis de la Lliçó 2

1. Considera les següents funcions de demanda de mercat: (i) $q^d = 10 - p$; (ii) $q^d = 10 - 2p$; (iii) $q^d = 10 - \frac{p}{2}$; (iv) $q^d = \frac{2}{p}$. (a) Determina les funcions d'ingrés total associades amb les funcions de demanda. (b) Calcula i representa gràficament les funcions d'ingrés marginal corresponents.

2. Determina i representa gràficament la funció d'ingrés marginal corresponent a la funció de demanda $q^d = a - bp$, on a i b són constants positives.

3. Sigui la funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p$.
(i) Si un monopolista racional vol vendre la quantitat $q = 5$, per què no fixarà el preu $p = 2$?
(ii) Per què tampoc no fixarà $p = 7$
(iii) Quin preu fixarà i per quin motiu?

Lliçó 3. La solució del monopoli

DEFINICIÓ 1. La solució del monopoli és un parell (p^M, q^M) tal que: (i) (p^M, q^M) és un punt de la funció de demanda de mercat; i (ii) q^M maximitza la funció de beneficis del monopolista (construïda assumint que p a la funció d'ingrés total és la inversa de la funció de demanda de mercat).

- La solució de monopoli és un equilibri perfecte en subjocs del joc que juguen monopolista i consumidors. D'entrada, donat el preu p que tria el monopolista, quina és la millor resposta per als consumidors? La manera en què s'ha obtingut la funció de demanda de mercat dóna la resposta: la millor resposta dels consumidors a p és triar la quantitat demandada total q^d que la funció de demanda de mercat associa amb p.

- Passant ara a l'arrel del joc, la hipòtesi que el monopolista coneix la funció de demanda de mercat li permet anticipar quina serà la resposta dels consumidors per a cada preu de mercat que el monopolista fixi. Així que, sabent què faran els consumidors a cada preu, el monopolista triarà el preu que porti associada una quantitat demandada tal que es maximitzin els seus beneficis. Per tant, trobar la solució de monopoli es redueix a calcular el valor q^* que maximitza la funció de beneficis del monopolista. Trobada aquesta quantitat, anirem a la inversa de la funció de demanda de mercat per a obtenir el preu p^* corresponent. El monopolista triarà (p^*, q^*) sabent que, a preu p^*, la quantitat demandada total pels consumidors serà q^*.

PROPOSICIÓ 2. *Sigui la funció de demanda de mercat lineal $q^d = \alpha - \beta p$. Sigui la funció de cost marginal creixent o constant. Suposem que la funció de cost marginal satisfà: (i) $CMg(0) < \frac{\alpha}{\beta}$; i (ii) per a tot $q > 0$, $CMg(q) > 0$. Aleshores existeix un únic valor q^* que maximitza la funció de beneficis del monopolista $\pi(q) = I(q) - C(q)$. Aquest valor és l'únic valor q^* que satisfà $IMg(q^*) = CMg(q^*)$.*

- *Demostració*. Primer comprovem què cal per a què algun valor $q^* > 0$ maximitzi la funció de beneficis. Apliquem les condicions de 1r i 2n ordre de màxim a la funció π.

- La condició de 1r ordre estableix que la derivada de π s'ha d'anul·lar quan s'avalua a $q = q^*$, això és, $\frac{\partial \pi(q^*)}{\partial q} = 0$. Atès que $\pi(q) = I(q) - C(q)$, resulta que $\frac{\partial \pi(q^*)}{\partial q} = \frac{\partial I(q^*)}{\partial q} - \frac{\partial C(q^*)}{\partial q} = IMg(q^*) - CMg(q^*)$. Per tant, $\frac{\partial \pi(q^*)}{\partial q} = 0$ significa que $IMg(q^*) = CMg(q^*)$: l'ingrés rebut per l'última unitat si es ven la quantitat q^* és igual al cost de produir aquesta unitat.

- La condició de 2n ordre diu que la derivada segona de π ha de ser negativa quan s'avalua a $q = q^*$, això és, $\frac{\partial^2 \pi(q^*)}{\partial q^2} < 0$. Atès que $\frac{\partial \pi(q^*)}{\partial q} = IMg(q^*) - CMg(q^*)$, $\frac{\partial^2 \pi(q^*)}{\partial q^2} = \frac{\partial IMg(q^*)}{\partial q} - \frac{\partial CMg(q^*)}{\partial q}$. Per tant, $\frac{\partial^2 \pi(q^*)}{\partial q^2} < 0$ implica $\frac{\partial IMg(q^*)}{\partial q} < \frac{\partial CMg(q^*)}{\partial q}$. Pel fet que

la funció IMg s'obté d'una funció de demanda lineal decreixent, la funció IMg és decreixent i, en conseqüència, $\frac{\partial IMg(q^*)}{\partial q} < 0$. Per la hipòtesi que la funció CMg és creixent o constant, $\frac{\partial CMg(q^*)}{\partial q} \geq 0$. Així que la condició de 2n ordre es compleix per a tot $q > 0$ i, en particular, per a $q = q^*$.

- L'anàlisi anterior demostra que si algun valor $q^* > 0$ maximitza la funció de beneficis, aquest valor el trobarem resolent l'equació $IMg(q^*) = CMg(q^*)$.

- La inversa de la funció de demanda de mercat és $p = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q$. Això fa que la funció d'ingrés totat sigui $I(q) = \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta}q\right)q = \frac{\alpha}{\beta}q - \frac{1}{\beta}q^2$. D'aquí, la funció d'ingrés marginal és $IMg(q) = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{2}{\beta}q$, funció que arrenca del valor $IMg = \frac{\alpha}{\beta}$ i decreix contínuament (Fig. 5).

- Quan la funció CMg és constant, la hipòtesi $CMg(0) < \frac{\alpha}{\beta}$ implica que la recta horitzontal que defineix la funció de CMg es troba per sota el valor $\frac{\alpha}{\beta}$. I la hipòtesi que, per a tot $q > 0$, $CMg(q) > 0$ implica que la recta es troba per damunt el valor 0. Per tant, com il·lustra la Fig. 5, la intersecció entre IMg i CMg és única. Aquesta intersecció determina el valor q^* tal que $IMg(q^*) = CMg(q^*)$.

- Quan la funció CMg és creixent, la hipòtesi $CMg(0) < \frac{\alpha}{\beta}$ implica que la funció CMg comença a créixer en un valor de l'eix vertical inferior a $\frac{\alpha}{\beta}$. I la hipòtesi que, per a tot $q > 0$, $CMg(q) > 0$ implica que la funció CMg pren valors positius. Per tant, com il·lustra la Fig. 6, la intersecció entre IMg i CMg és única. Aquesta intersecció determina el valor q^* tal que $IMg(q^*) = CMg(q^*)$.

- Tot plegat prova que, si hi ha algun valor $q^* > 0$ que maximitza la funció de beneficis: (i) aquest valor és únic; i (ii) satisfà $IMg(q^*) = CMg(q^*)$. Resta per comprovar que l'opció de no produir no proporciona més beneficis que produir el valor q^* trobat. Per tant, si $\pi(q^*) > \pi(0)$ el valor de q que maximitza beneficis és q^*; si $\pi(q^*) < \pi(0)$, el valor de q que maximitza beneficis és 0; i si $\pi(q^*) = \pi(0)$ tant q^* com 0 maximitzen beneficis.

- D'una banda, $\pi(q^*) = I(q^*) - CV(q^*) - CF$. D'una altra, $\pi(0) = I(0) - CV(0) - CF = 0 - 0 - CF = -CF$. Així, $\pi(q^*) > \pi(0)$ és equivalent a $I(q^*) - CV(q^*) - CF > -CF$. O el que és el mateix, $\pi(q^*) > \pi(0)$ equival a $I(q^*) > CV(q^*)$. En paraules: produir q^* proporciona més beneficis que no produir si, i només si, l'ingrés obtingut per la venda de q^* és superior al cost variable de produir q^*. El requisit $I(q^*) > CV(q^*)$ s'anomena condició de tancament: si els ingressos no cobreixen ni tan sols els costs directament imputables a la producció, és millor no produir (i assumir només el cost fix). En el cas de *CMg* constant, la Fig. 5 mostra que la condició de tancament es compleix; en el cas de *CMg* creixent, és la Fig. 6 que ho mostra. A tots dos casos, $I(q^*)$ és la suma de les àrees *A*, *B* i *C*. De fet, $I(q^*) = p^*q^*$, on p^* és el preu que la inversa de la funció de demanda de mercat assigna a q^*. També a tots dos casos, l'àrea *A* representa el cost variable $CV(q^*)$ de produir q^*: és l'àrea per sota la funció *CMg* limitada a la dreta per valor q^*. Així que $I(q^*) > CV(q^*)$ (la diferència $I(q^*) - CV(q^*)$ és la suma de les àrees *B* i *C*). Això demostra que es compleix la condició de tancament i que q^* maximitza beneficis.■

- La Proposició 2 diu que, amb funció de demanda de mercat lineal i funció de cost marginal amb valors no negatius que sigui constant o creixent, l'únic valor q^* que maximitza els beneficis del monopolista és tal que el que ingressa el monopolista per l'última unitat quan ven la quantitat q^* (aquest ingrés és $IMg(q^*)$) és igual al que li costa al monopolista produir aquesta darrera unitat (aquest cost és $CMg(q^*)$).

- La justificació d'aquesta condició és similar a la justificació de la condició $UMg(q^*) = p$ del Tema 2. Si $IMg(q^*) < CMg(q^*)$, el monopolista estaria obtenint una pèrdua de l'última unitat venuda, ja que el cost de produir-la és superior a l'ingrés que obté per ella. Així, el monopolista augmentaria el benefici no produint ni venent aquesta unitat i, per tant, produir i vendre q^* no maximitza beneficis si $IMg(q^*) < CMg(q^*)$.

- D'altra banda, si fos el cas que $IMg(q^*) > CMg(q^*)$, una unitat addicional també tindria un cost marginal inferior a l'ingrés marginal. Per tant, la producció i venda d'aquesta unitat faria augmentar els beneficis, ja que el cost de produir-la seria inferior a l'ingrés que s'obtindria per la seva venda. Així que si $IMg(q^*) > CMg(q^*)$ el monopolista tampoc no maximitza els beneficis produint i venent q^*, perquè els beneficis augmentarien produint ni venent "una mica" més.

- Com a resultat, cal que $IMg(q^*) = CMg(q^*)$ per a què q^* maximitzi els beneficis. Quan es compleixen les condicions de 2n ordre i tancament, $IMg(q^*) = CMg(q^*)$ és condició necessària i suficient per a què q^* maximitzi beneficis. Geomètricament, $IMg(q^*) = CMg(q^*)$ vol dir que la funció d'ingrés marginal creua la de cost marginal quan $q = q^*$.

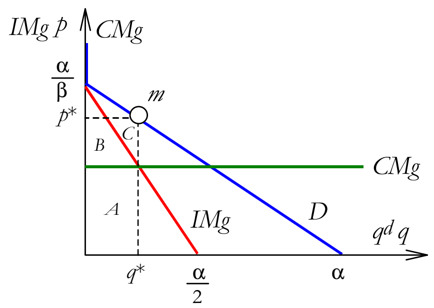


Fig. 5. Solució de monopoli (*CMg* constant)

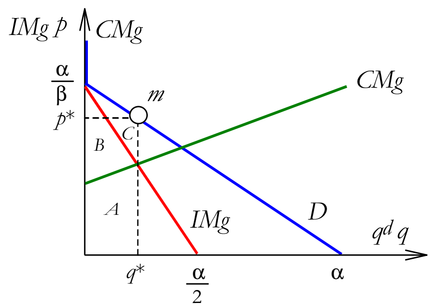


Fig. 6. Solució de monopoli (*CMg* creixent)

REMARCA 3. Assumint les condicions de la Proposició 2, la solució de monopoli ve donada pel punt (p^*, q^*) de la funció de demanda de mercat (punt *m* a les Figs. 5 i 6) tal que: (i) la quantitat produïda i intercanviada q^* satisfà $IMg(q^*) = CMg(q^*)$; i (ii) p^* és el preu que la inversa de la funció de demanda de mercat atribueix a la quantitat q^*.

EXEMPLE 4. Sigui $q^d = 120 - 2p$ la funció de demanda de mercat i $C(q) = 100 + q^2$ la funció de cost total del monopolista (la Fig. 7 il·lustra gràficament la solució).

- La inversa de la funció de demanda de mercat és $p = 60 - \frac{q}{2}$, la funció d'ingrés total és $I(q) = 60q - \frac{q^2}{2}$ i la funció d'ingrés marginal és $IMg(q) = 60 - q$. La funció de cost marginal és $CMg(q) = 2q$. Aquesta funció compleix les condicions de la Proposició 2 (comprova-ho). Per tant, el valor q^* que maximitza la funció de beneficis $\pi(q) = (60q - \frac{q^2}{2}) - (100 + q^2)$ satisfà $IMg(q^*) = CMg(q^*)$. Això és, $60 - q^* = 2q^*$. D'aquí, $q^* = 20$. El preu p^* que fixaria el monopolista s'obtindria substituint $q^* = 20$ a la inversa de la funció de demanda de mercat $p = 60 - \frac{q}{2}$. En conseqüència, $p^* = 60 - \frac{q^*}{2} = 60 - \frac{20}{2} = 50$. La solució de monopoli seria $(p^*, q^*) = (50, 20)$.

- El valor $q = 20$ també s'obté igualant a zero la derivada de la funció de beneficis: si $\pi(q) = (60q - \frac{q^2}{2}) - (100 + q^2)$, $\frac{\partial\pi}{\partial q} = 60 - q - 2q$. Així, $60 - q - 2q = 0$ implica $q = 20$.

- Per la Proposició 2, no cal verificar ni la condició de 2n ordre ni la condició de tancament per a concloure que $q^* = 20$ maximitza beneficis, però comprovem que se satisfan. La condició de tancament requereix assegurar-se que el benefici de produir i vendre $q^* = 20$ no és inferior al benefici de no produir. Sabent que el preu que resulta quan $q = 20$ és $p = 50$, $\pi(20) = I(20) - C(20) = 50 \cdot 20 - (100 + 20^2) = 500$ i $\pi(0) = I(0) - C(0) = 0 - (100 + 0^2) = -100$. Per consegüent, $\pi(20) > \pi(0)$ i la condició de tancament se satisfà.

- La condició de 2n ordre requereix que $\frac{\partial IMg(20)}{\partial q} < \frac{\partial CMg(20)}{\partial q}$. Del fet que $IMg(q) = 60 - q$, se'n desprèn que $\frac{\partial IMg(q)}{\partial q} = -1$: a tot punt de la funció d'*IMg* el pendent és -1 (la funció decreix) i, en particular, també ho serà quan $q = 20$. Així que $\frac{\partial IMg(20)}{\partial q} = -1$. Atès que $CMg(q) = 2q$, $\frac{\partial CMg(q)}{\partial q} = 2$: a tot punt de la funció de *CMg* el pendent és 2 (la funció creix). Així que $\frac{\partial CMg(20)}{\partial q} = 2$. Conclusió: la condició de 2n ordre se satisfà, ja que $-1 = \frac{\partial IMg(20)}{\partial q} < \frac{\partial CMg(20)}{\partial q} = 2$.

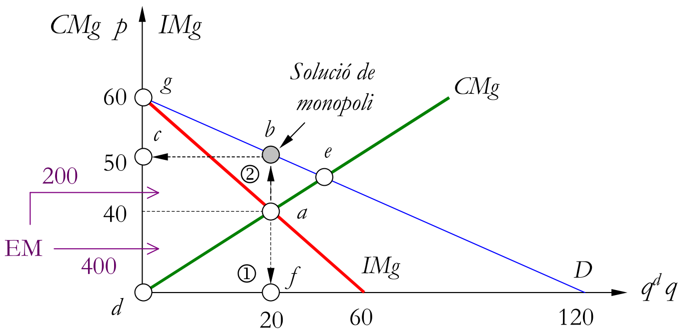


Fig. 7. Solució de monopoli

REMARCA 5. <u>Efectes sobre la solució de monopoli d'un canvi de la funció de *CMg*</u> (amb funció *IMg* decreixent i *CMg* creixent). (i) El desplaçament a l'esquerra de la funció de *CMg*, causa un augment del preu i una reducció de la quantitat intercanviada. (ii) El desplaçament a la dreta de la funció de *CMg*, causa una reducció del preu i un augment de la quantitat intercanviada.

- Aquests efectes s'il·lustren a la Fig. 8. Per exemple, partint de l'Exemple 4, si la funció de cost total canvia a $C(q) = 100 + 2q^2$, el pas de la solució inicial de monopoli *b* fins a la nova solució *d* implica $\Delta p = 4$ i $\nabla q = 8$.

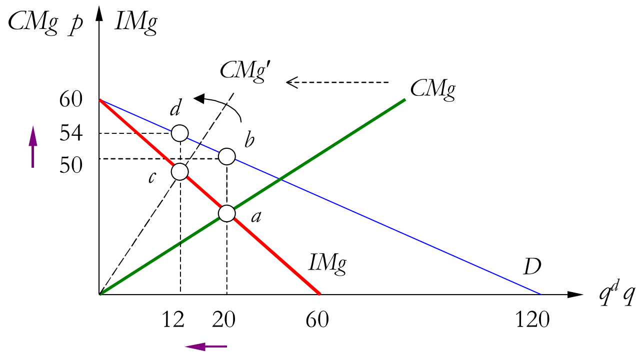


Fig. 8. Efecte sobre la solució de monopoli d'un canvi de la funció de *CMg*

REMARCA 6. <u>Efectes sobre la solució de monopoli d'un canvi de la funció de demanda de mercat</u> (amb funció *IMg* decreixent i *CMg* creixent). (i) El desplaçament a la dreta de la funció de demanda de mercat causa un augment tant del preu com de la quantitat intercanviada. (ii) El desplaçament a l'esquerra de la funció de demanda de mercat causa una reducció tant del preu com de la quantitat intercanviada.

- Aquests efectes s'il·lustren a la Fig. 9. Per exemple, partint de l'Exemple 4, si la funció de demanda de mercat canvia a $q^d = 180 - 2p$, el pas de la solució inicial de monopoli *b* fins a la nova solució *d* implica $\Delta p = 25$ i $\Delta q = 10$.

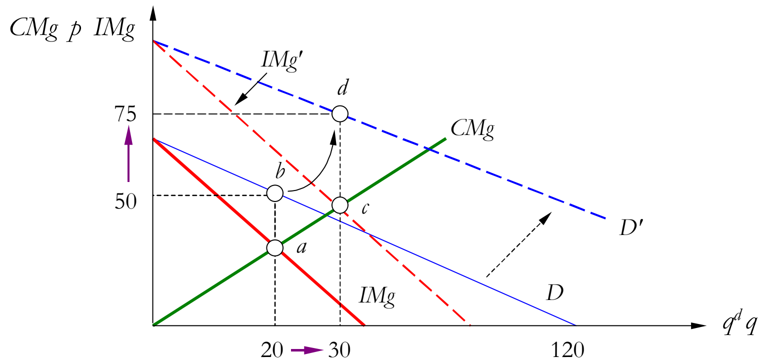


Fig. 9. Efecte sobre la solució de monopoli d'un canvi de la funció de demanda de mercat

DEFINICIÓ 7. L'<u>excedent del monopolista</u> quan produeix i ven la quantitat *q* a preu *p* es defineix com $\text{EM}(p, q) = p \cdot q - CV(q)$.

- <u>L'excedent del monopolista és el benefici</u> (ingrés total menys cost total) <u>més el cost fix</u>: si restem el cost fix *CF* de l'excedent EM(*p*, *q*), s'obté el benefici quan es produeix i ven la quantitat *q* al preu *p*. La Fig. 7 indica l'excedent del monopolista a l'Exemple 4.

- L'excedent del monopolista representa el guany derivat de posar-se a produir (el guany sense tenir en compte el cost fix).

- La <u>condició de tancament</u> es pot redefinir de la següent manera: per a tot volum de producció q^* que aspiri a maximitzar la funció de beneficis del monopolista, l'<u>excedent del monopolista ha de ser no negatiu</u> quan produeix i ven q^* al preu p^* que la funció de demanda de mercat associa amb q^*.

REMARCA 8. Atès que la diferència entre excedent del monopolista i benefici del monopolista és una constant (el cost fix), <u>maximitzar el benefici és equivalent a maximitzar l'excedent</u>.

- La decisió sobre produir o no significa que <u>el monopolista produeix només si de la quantitat produïda obté un excedent no negatiu</u>. Si l'excedent és negatiu, no produeix. Per tant, la condició de tancament $I(q^*) \geq CV(q^*)$ significa que l'excedent que obté el monopolista decidint produir i vendre la quantitat q^* no és negatiu. A la solució de monopoli de l'Exemple 4, l'excedent del monopolista és $\text{EM}(50, 20) = 50 \cdot 20 - CV(20) = 1000 - 20^2 = 600$. Descomptant el cost fix $CF = 100$ s'hi arriba al benefici del monopolista: $\pi(20) = I(20) - C(20) = 50 \cdot 20 - (100 + 20^2) = 500$.

1. Amb les dades de l'Exercici 1 de la Lliçó 2, calcula la solució de monopoli si el cost marginal del monopolista és la funció constant CMg = 5.

2. Calcula i representa gràficament la solució de monopoli en els següents tres casos. A cada cas, obté el benefici del monopolista, el seu excedent i l'excedent dels consumidors a la solució de monopoli.

(i) La inversa de la funció de demanda de mercat és p = 120 – q i la funció de cost marginal del monopolista és CMg = 30.

(ii) La inversa de la funció de demanda de mercat és p = 120 – 2q i la funció de cost total del monopolista és $C(q) = 10 + 30q^2$.

(iii) La funció de cost total del monopolista és $C(q) = 4q^3 - 2q^2 + 10$ *i la funció de demanda de mercat és* $q^d = 54 - \dfrac{p}{2}$.

3. Troba i representa gràficament la solució del monopoli quan la inversa de la funció de demanda de mercat és p = a – bq i la funció de cost marginal és la funció constant CMg = c, essent a, b i c constants positives.

4. Determina la solució de monopoli si les funcions de demanda de mercat i de cost total del monopolista són:

(i) $q^d = 10 - p$ *i* $C(q) = \dfrac{12}{q}$; *i*

(ii) $q^d = \dfrac{10}{p}$ *i* $C(q) = q^2$.

5. Amb les dades de l'Exercici 2(i), determina la variació que experimenta el preu de mercat i la quantitat intercanviada a la solució de monopoli com a conseqüència dels següents esdeveniments.

(i) El cost marginal es duplica

(ii) El cost marginal es redueix a la meitat

(iii) La funció de demanda de mercat és el resultat de l'existència de 120 consumidors idèntics i el nombre de consumidors es duplica.

(iv) La funció de demanda de mercat és el resultat de l'existència de 120 consumidors idèntics i el nombre de consumidors es redueix a la meitat

(v) Succeeix (i) i (iii)

(vi) Succeeix (i) i (iv)

(vii) Succeeix (ii) i (iii)

(viii) Succeeix (ii) i (iv)

(ix) Suceeix (i), (ii), (iii) i (iv)

6. Sigui $q^d = 24 - 2p$ *la funció de demanda de mercat i* $C(q) = 1 + q^2$ *la funció de cost total del monopolista.*

(i) Calcula la solució de monopoli.

(ii) Representa gràficament la solució de monopoli.

(iii) Computa el benefici i l'excedent del monopolista a la solució de monopoli.

(iv) Obté l'excedent dels consumidors a la solució de monopoli.

(v) Respon a les mateixes preguntes si $C(q) = 2 + q^2$.

(vi) Respon a les mateixes preguntes si la funció de cost marginal del monopolista és $CMg(q) = 2q$.

Lliçó 4. Discriminació de preus

DEFINICIÓ 1. Hi ha discriminació de primer grau quan cada unitat es ven al preu més alt que algun comprador està disposat a pagar (http://en.wikipedia.org/wiki/Price_discrimination).

- En fer pagar cada consumidor el màxim que està disposat a pagar, el monopolista extreu tot l'excedent dels consumidors.
- Per exemple, si la inversa de la funció de demanda de mercat és $p = 20 - 2q$ i el bé es ven en unitats discretes, la discriminació de primer grau significa fixar $p = 20 - 2\cdot 1 = 18$ per la primera unitat, $p = 20 - 2\cdot 2 = 16$ per la segona, $p = 20 - 2\cdot 3 = 14$ per la tercera, etc.
- Les subhastes d'unitat en unitat del bé són un mecanisme per a aplicar aquesta discriminació (les subhastes són una forma de mercat que Internet ha permès generalitzar a través d'intermediaris com *eBay*, http://www.ebay.com/).
- A la subhasta anglesa (o ascendent), el preu de la unitat que es posa a la venda va pujant a partir de licitacions que fan els compradors, fins que s'hi arriba a un preu que ningú no vol apujar. El comprador que ha ofert el darrer preu s'emporta la unitat subhastada.
- A la subhasta holandesa (o descendent), el venedor va cridant preus de la unitat que es posa a la venda cada cop més petits fins que apareix un primer comprador acceptant el preu que assenyala el venedor. Aquest comprador s'emporta la unitat subhastada.

DEFINICIÓ 2. Hi ha discriminació de segon grau quan el preu que efectivament paga cada comprador per una unitat del bé depèn de la quantitat total que compra.

- La tarifa doble i la quota d'accés són mecanismes de fixació de preus que permeten implementar la discriminació de segon grau.

DEFINICIÓ 3. S'estableix una tarifa doble quan cada unitat comprada per sota un cert volum q^* (la unitat q^* inclosa) té un preu p_1 i cada unitat comprada per sobre el volum q^* té un altre preu $p_2 < p_1$. L'expressió $[p_1, p_2, q^*]$ designarà la tarifa doble segons la qual p_1 és el preu de cada unitat fins a q^* (la unitat q^* inclosa) i p_2 és el preu de les unitats que hi ha més enllà de la unitat q^*.

- La tarifa doble porta implícit un descompte per volum. Per exemple, sigui la tarifa doble $[p_1, p_2, q^*] = [6, 3, 4]$. Si es compren 4 unitats, el preu mitjà p_4 pagat és 6, perquè es paga el mateix preu $p_1 = 6$ per cada unitat. Si es compren 5, el preu mitjà p_5 és $\dfrac{6+6+6+6+3}{5} = \dfrac{27}{5} = 5'4 < p_4$. Si es compren 6, el preu mitjà p_6 és $\dfrac{6+6+6+6+3+3}{6} = \dfrac{30}{6} = 5 < p_5$. Això mostra que com més quantitat es compri, més baix és el preu mitjà (preu per unitat) pagat.

- La tarifa doble crea un interrogant: quina quantitat demanda un consumidor que s'enfronta a dos preus si la seva funció de demanda s'ha construït suposant que el preu és únic? La resposta no és difícil de trobar si s'assumeix que el consumidor té com a objectiu maximitzar el seu excedent. Els següents tres exemples il·lustren com s'obté la resposta.

EXEMPLE 4. Sigui $q^d = 10 - p$ la funció de demanda d'un consumidor que s'enfronta a la tarifa doble $[p_1, p_2, q^*] = [6, 3, 4]$.

- Determinem primerament la quantitat demandada al preu p_1 de les primeres unitats, perquè cal estar disposat a comprar almenys $q^* = 4$ per a gaudir del preu inferior p_2 de les unitats més enllà de $q^* = 4$. Si $p = 6$, $q^d = 10 - 6 = 4$. Per tant, el consumidor està disposat a comprar totes les unitats necessàries per a poder accedir a la rebaixa de preu per les unitats següents. De fet, el consumidor continuaria comprant més enllà de $q = 4$ perquè per la següent unitat estaria disposat a pagar més que p_2. Donat $p_2 = 3$, el consumidor arribaria fins a $q^d = 10 - 3 = 7$. Així que el consumidor compraria fins a $q = 4$ a preu $p_1 = 6$ (fent una despesa de 24) i després compraria des de $q = 4$ fins a $q = 7$ pagant per aquestes unitats el preu $p_2 = 3$ (fent una despesa de $(7 - 4)\cdot 3 = 9$). El total de la despesa s'apujaria a 33. L'excedent 12'5 seria la suma de l'excedent 8 obtingut fins a $q = 4$ i l'excedent 4'5 obtingut entre $q = 4$ i $q = 7$.

EXEMPLE 5. Sigui $q^d = 10 - p$ la funció de demanda d'un consumidor que s'enfronta a la tarifa doble $[p_1, p_2, q^*] = [6, 3, 3]$.

- En rebaixar-se respecte de l'Exemple 4 la quantitat que, a preu p_1, cal comprar per a poder accedir al preu inferior p_2, és obvi que el consumidor comprarà el mateix que abans. D'entrada, a preu $p_1 = 6$, estaria disposat a comprar $q^d = 10 - 6 = 4$. Però ara només cal que pagui $p_1 = 6$ fins a $q^* = 3$. Per les següents, ha de pagar $p_2 = 3$. Com abans, amb $p_2 = 3$, el consumidor arribaria fins a $q^d = 10 - 3 = 7$. Així que ara el consumidor compraria fins a $q = 3$ a preu $p_1 = 6$ (fent una despesa de 18) i després compraria des de $q = 3$ fins a $q = 7$ pagant per aquestes unitats el preu $p_2 = 3$ (fent una despesa de $(7 - 3)\cdot 3 = 12$). El total de la despesa pujaria a 30. L'excedent 15 seria la suma de l'excedent 7'5 obtingut fins a $q = 3$ i l'excedent 7'5 obtingut entre $q = 3$ i $q = 7$.

EXEMPLE 6. Sigui $q^d = 10 - p$ la funció de demanda d'un consumidor que s'enfronta a la tarifa doble $[p_1, p_2, q^*] = [6, 3, 5]$.

- En principi, a preu p_1, el consumidor estaria disposat a comprar $q^d = 10 - 6 = 4$. Si hagués de comprar una unitat addicional, hauria de pagar per ella més del que la valora. Per exemple, per la unitat 4'1, el consumidor estaria disposat a pagar (segons la inversa $p = 10 - q$ de la seva funció de demanda) com a màxim $p = 10 - 4'1 = 5'9 < p_1 = 6$. Com a conseqüència, no compraria la unitat 4'1. Això és obvi donat que, a preu $p_1 = 6$, la quantitat màxima que vol comprar és el 4 que marca la funció de demanda.

- Semblaria, doncs, que el consumidor no compraria més de $q = 4$. Però no s'ha de descartar la possibilitat que l'excedent negatiu que el consumidor obté comprant entre $q = 4$ i $q = 5$ sigui compensat per l'excedent positiu que obté des de $q = 5$ fins a $q = 7$ (que és la quantitat a què arribaria com a màxim a preu $p_2 = 3$). De fet, comprar des de $q = 4$ fins a $q = 5$ a preu $p = 6$ implica obtenir l'excedent – ½, però comprar des de $q = 5$ fins a $q = 7$ a preu $p = 3$ suposa aconseguir l'excedent 2, que compensa amb escreix l'excedent negatiu de les unitats compreses entre $q = 4$ i $q = 5$. En resum, el consumidor també compraria fins a $q = 7$, tot i que ara faria una despesa de 30 per les unitats fins a $q = 5$ i una despesa de 6 per les unitats entre $q = 5$ i $q = 7$. L'excedent 15 seria la suma de l'excedent 7'5 obtingut fins a $q = 5$ i l'excedent 2 obtingut entre $q = 5$ i $q = 7$.

PROPOSICIÓ 7. *Amb funció de demanda lineal $q^d = \alpha - \beta p$, $p_1 > p_2$ i tarifa doble $[p_1, p_2, q^*]$, sigui $q_1 = \alpha - \beta p_1$ la quantitat demandada a preu p_1 i $q_2 = \alpha - \beta p_2$ la quantitat demandada a preu p_2. Aleshores:*

(i) si $q^* \leq q_1$, el consumidor compra la quantitat q_2;
(ii) si $q_2 \leq q^*$, el consumidor compra la quantitat q_1;
(iii) si $q_1 < q^* < q_2$ i $EC(p_1, q_1) + EC(p_2, q_2) > EC(p_1, q^*) + EC(p_2, q^*)$, el consumidor compra q_2; i
(iv) si $q_1 < q^* < q_2$ i $EC(p_1, q_1) + EC(p_2, q_2) < EC(p_1, q^*) + EC(p_2, q^*)$, el consumidor compra q_1.

- *Demostració*. Cas 1: $q^* \leq q_1$. La Fig. 10 il·lustra aquest cas. A preu p_1, cal comprar la quantitat q^* per a beneficiar-se de la reducció de preu de les següents unitats. Però, a preu p_1, el consumidor estaria disposat a comprar més que q^*. Per tant, és evident que el consumidor compraria q^* a preu p_1 i després continuaria comprant fins a q_2, en aquest darrer cas a preu p_2.

- Cas 2: $q_2 \leq q^*$. La Fig. 11 il·lustra aquest cas. El consumidor ha de comprar fins a $q^* > q_2$ per a obtenir la rebaixa de preu. Però encara que obtingués la rebaixa, el consumidor no compraria q^*: s'aturaria a q_2 (analitza el cas $q^* = q_2$). Així, el consumidor compraria només q_1 a preu p_1, ja que l'excedent de cada unitat entre q_1 i q_2 és negatiu.

- Cas 3: $q_1 < q^* < q_2$. La Fig. 12 il·lustra aquest cas. Per a beneficiar-se de la reducció de preu, el consumidor ha de comprar a preu p_1 una quantitat q^* superior a la quantitat màxima q_1 que compraria a preu p_1. Però la quantitat q_1 s'ha determinat suposant que el preu de totes les unitats és el mateix. Ara, però, el consumidor podria compensar l'excedent negatiu que resulta de comprar a preu p_1 les unitats entre q_1 i q^* (l'àrea del triangle *ace*) amb l'excedent positiu que resulta de comprar a preu p_2 les unitats entre q^* i q_2 (l'àrea del triangle *bde*). En conseqüència, el consumidor s'atura a q_1 si l'àrea *ace* és més gran que l'àrea *bde*, però avança fins a q_2 si l'àrea *bde* és més gran que l'àrea *ace* (què passa si les àrees són iguals?). L'àrea *ace* és l'excedent al punt *c* menys l'excedent al punt *a*; això és, l'àrea *ace* és $EC(p_1, q^*) - EC(p_1, q_1)$. L'àrea *bde* és l'excedent al punt *b* menys l'excedent al punt *d*; això és, l'àrea *bde* és $EC(p_2, q_2) - EC(p_2, q^*)$.

- En resum, al cas 3, el consumidor tria q_1 si $EC(p_1, q^*) - EC(p_1, q_1) > EC(p_2, q_2) - EC(p_2, q^*)$, condició que equival a $EC(p_1, q^*) + EC(p_2, q^*) > EC(p_1, q_1) + EC(p_2, q_2)$. I el consumidor tria q_2 si $EC(p_1, q^*) - EC(p_1, q_1) < EC(p_2, q_2) - EC(p_2, q^*)$, condició que equival a $EC(p_1, q^*) + EC(p_2, q^*) < EC(p_1, q_1) + EC(p_2, q_2)$.■

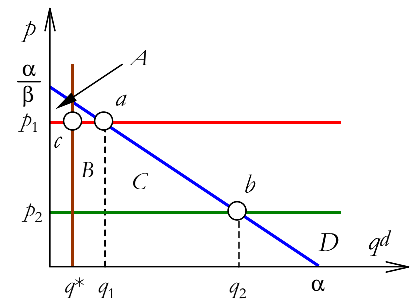


Fig. 10. Compra amb tarifa doble: cas 1 de 3

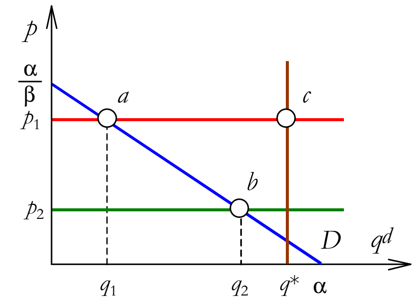


Fig. 11. Compra amb tarifa doble: cas 2 de 3

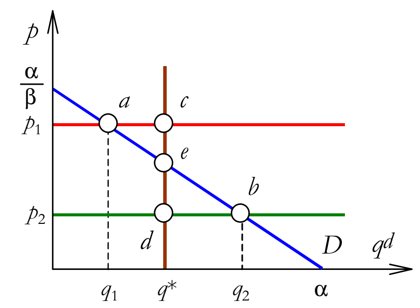


Fig. 12. Compra amb tarifa doble: cas 3 de 3

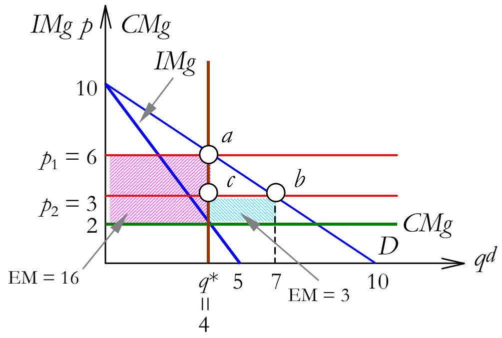


Fig. 13. Anàlisi d'una tarifa doble

REMARCA 8. L'excedent del consumidor als Exemples 4, 5 i 6 és més gran que l'excedent que obtindria si preu $p_1 = 6$ fos l'únic preu. En tal cas, el consumidor compraria fins a $q = 4$, fent una despesa de 24 i obtenint un excedent de 8. Així que una tarifa doble pot ser beneficiosa pels consumidors. Pot ser-ho simultàniament per al monopolista? L'Exemple 9 mostra que sí.

EXEMPLE 9. Cada consumidor té $q^d = 10 - p$ per funció de demanda. La funció de cost marginal del monopolista és $CMg(q) = 2$. El monopolista estableix la tarifa doble $[p_1, p_2, q^*] = [6, 3, 4]$, que es mostra a la Fig. 13.

- Si el preu ha de ser únic, el monopolista fixaria $p = 6$, venent a cada comprador la quantitat $q = 4$ i obtenint de cada comprador l'excedent EM = 6·4 – 2·4 = 16.

- Amb la tarifa doble $[p_1, p_2, q^*] = [6, 3, 4]$, per la Proposició 7, cada consumidor compraria $q^d = 7$, pagant $p_1 = 6$ per fins a la unitat $q^* = 4$ i pagant $p_2 = 3$ per cada unitat entre $q^* = 4$ i $q^d = 7$.

- El monopolista extreu de cada consumidor l'excedent EM_1 = 6·4 – 2·4 = 16 de les unitats comprades a preu $p_1 = 6$. I extreu de cada consumidor l'excedent EM_2 = 3·3 – 2·3 = 3 de les unitats comprades a preu $p_2 = 3$. En total, l'excedent del monopolista és $EM_1 + EM_2 = 16 + 3 = 19$, superior al que tindria si no apliqués la tarifa doble.

- D'altra banda, cada consumidor també augmenta el seu excedent amb la tarifa doble. Sense ella, cada consumidor se situa al punt *a* de la Fig. 13, punt on obté l'excedent $EC(6, 4) = 8$. Amb la tarifa doble, cada consumidor també compra $q = 4$ a preu $p = 6$, però continua comprant fins a arribar al punt *b*. L'excedent addicional de cada consumidor és l'àrea 4'5 del triangle *abc*. L'excedent de cada consumidor és ara 12'5.

- Una qüestió interessant però fora de l'àmbit del curs diu: quina és la tarifa doble que maximitza l'excedent del monopolista?

EXEMPLE 10. La quota d'accés. Una quota d'accés al consum d'un bé és un import monetari que el comprador ha de pagar consumeixi o no el bé. A la quota d'accés s'afegeix després el preu per cada unitat consumida del bé. Seguint amb l'Exemple 9, suposem que el monopolista fixa una quota fixa *Q* per a tenir dret a comprar el bé i un preu *p* per cada unitat comprada.

- Per exemple, el servei de subministrament d'aigua potable inclou un cànon fix a pagar per la connexió a la xarxa i després la despesa corresponent al consum d'aigua.

- El valor de l'excedent que cada comprador obté de la quantitat comprada és el límit màxim de la quota *Q* que pot fixar el monopolista. Per exemple, a la Fig. 13, si el monopolista només pogués fixar un preu, fixaria $p = 6$. Cada consumidor compraria $q^d = 4$, situant-se al punt *a*. L'excedent al punt *a* és 4·(10 – 6) / 2 = 8. Aquest és el guany net que obté cada consumidor en comprar $q^d = 4$ unitats i pagar $p = 6$ per cada una d'elles. Per tant, la quota *Q* que fixi el monopolista no pot ser superior a 8: si ho fos, l'excedent de cada comprador descomptant-hi la quota seria negatiu i el millor per a cada comprador seria no comprar.

DEFINICIÓ 11. Hi ha discriminació de tercer grau quan els consumidors són dividits en grups i es fixa un preu per a cada grup.

- La discriminació de tercer grau requereix que el monopolista identifiqui diferents grups de consumidors i estableixi un preu per a cada grup. Quan això succeeix, es diu que el monopolista segmenta el mercat (el fet que un mercat estigui segmentat no té res a veure amb l'existència d'un monopoli).

- Per exemple, el mercat de DVDs és un mercat segmentat geogràficament en regions, desde la regió 0 fins a la 9 (detalls a http://en.wikipedia.org/wiki/Dvd_region o http://www.hometheaterinfo.com/dvd3.htm). Aquesta segmentació fa que la mateixa pel·lícula es pugui vendre a diferents regions a diferent preu, ja que, en principi, els lectors de DVDs d'una regió no poden llegir els DVDs d'una altra (tret de la 0, que és absència de regió). També es practica segmentació en certs locals d'esbarjo on els homes paguen entrada i les dones no. Certs serveis a les universitats també estan sotmesos a segmentació: pagues un preu si ets professor i un altre si ets estudiant.

EXEMPLE 12. Segmentació de mercat (Fig. 14). Hi ha 2 grups de consumidors. La funció de demanda que agrega les funcions de demanda dels consumidors del primer grup és $q^d{}_1 = 10 - \dfrac{p}{2}$; la que agrega les del segon, $q^d{}_2 = 20 - 2p$. La funció de cost marginal del monopolista és $CMg(q) = 4$.

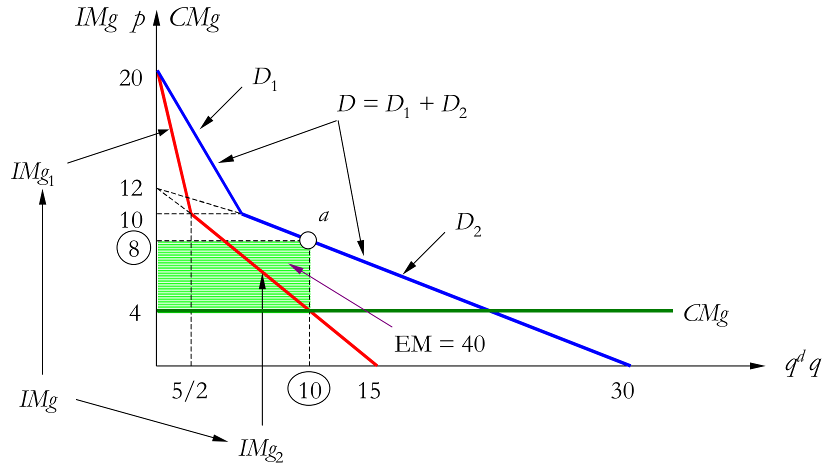


Fig. 14. Solució del monopoli sense segmentació de mercat

- Si el monopolista no segmenta el mercat, fixa el preu considerant el tram rellevant de la funció de demanda de mercat (el tram on intersecta la recta CMg), que és D_2 a la Fig. 14. L'equació que defineix aquest tram és $q^d = 30 - 5\dfrac{p}{2}$, per a $10 \le p \le 0$. Aïllant p, s'obté $p = 12 - 2\dfrac{q}{5}$. D'aquí resulta la funció d'ingrés marginal $IMg = 12 - 4\dfrac{q}{5}$. El monopolista produeix i ven $q = 10$ a preu $p = 8$. El seu excedent és EM = 8·10 – 4·10 = 40.

- Si el monopolista pot i decideix separar els dos grups, ha de maximitzar la funció de beneficis conjunta $\pi(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - C(q)$, on p_i és el preu que el monopolista fixa al grup $i \in \{1, 2\}$, q_i és la quantitat que ven al grup $i \in \{1, 2\}$ i $q = q_1 + q_2$ és la quantitat total que el monopolista produeix i ven.

- El problema del monopolista rau en determinar la quantitat total a produir i com distribuir aquesta quantitat entre els dos grups. Un cop determinada quina quantitat q_i ven al grup $i \in \{1, 2\}$, el monopolista establirà el preu $p_i(q_i)$ que indica la funció de demanda del grup i. Això es mostra a la Fig. 15.

- Les variables de decisió del monopolista són dues, q_1 i q_2, ja que: (i) sabent q_1 i q_2, se sap la quantitat total $q = q_1 + q_2$; (ii) sabent q_1, se sap p_1 gràcies a la funció de demanda del grup 1; i (iii) sabent q_2, se sap p_2 gràcies a la funció de demanda del grup 2.

- Per a maximitzar $\pi(q_1, q_2)$ respecte de les dues variabels q_1 i q_2, apliquem la condició de 1r ordre, segons la qual la derivada de $\pi(q_1, q_2)$ respecte de cada variable s'iguala a zero: $\dfrac{\partial\pi}{\partial q_1} = 0$ i $\dfrac{\partial\pi}{\partial q_2} = 0$. La funció a maximitzar és $\pi(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1 + q_2)$, ja que el cost total el determina la producció total $q_1 + q_2$ a realitzar. La funció inversa de demanda del primer grup és $p_1 = 20 - 2q_1$. La funció inversa de demanda del primer grup és $p_2 = 10 - q_2/2$. Per la regla de la cadena,

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_1}q_1 + p_1 - \frac{\partial C}{\partial q_1} = (-2)q_1 + (20 - 2q_1) - 4 = 0 \qquad (1)$$

i

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_2}q_2 + p_2 - \frac{\partial C}{\partial q_2} = (-\frac{1}{2})q_2 + (10 - \frac{q_2}{2}) - 4 = 0 \qquad (2)$$

- Per l'equació (1), $q_1 = 4$. El mateix resultat s'obté de la següent manera. Considerem la funció d'ingrés marginal $IMg_1(q_1) = 20 - 4q_1$ que correspon a la funció de demanda $p_1 = 20 - q_1$ del grup 1. La condició (1) és equivalent a $IMg_1(q_1) = CMg(q)$: l'ingrés marginal obtingut per la venda de la quantitat q_1 al grup 1 ha de ser igual al cost marginal de produir tota la quantitat $q = q_1 + q_2$ venuda a tots dos grups. Atès que $CMg(q) = 4$, sigui quin sigui el valor q, la condició $IMg_1(q_1) = CMg(q)$ es concreta en $20 - 4q_1 = 4$, d'on resulta $q_1 = 4$.

- Per l'equació (2), $q_2 = 6$. Com abans, considerem la funció d'ingrés marginal $IMg_2(q_2) = 10 - q_2$ que correspon a la funció de demanda $p_2 = 10 - \dfrac{q_2}{2}$ del grup 2. La condició (2) és equivalent a $IMg_2(q_2) = CMg(q)$: l'ingrés marginal obtingut per la venda de la quantitat q_2 al grup 2 ha de ser igual al cost marginal de produir tota la quantitat $q = q_1 + q_2$. La condició $IMg_2(q_2) = CMg(q)$ es concreta en $10 - q_2 = 4$, d'on resulta $q_2 = 6$.

- Per tant, podem trobar el parell (q_1, q_2) que maximitza la funció de beneficis $\pi(q_1, q_2)$ derivant-la respecte de q_1 i després respecte de q_2 i igualant cada equació a zero (equacions (1) i (2)) o bé podem aplicar directament la condició $IMg_1(q_1) = IMg_2(q_2) = CMg(q)$: per al parell (q_1, q_2) que maximitza la funció de beneficis $\pi(q_1, q_2)$, l'ingrés per l'última unitat venuda a un grup és igual al l'ingrés per l'última unitat venuda al grup 2, que és igual al cost de l'última unitat produïda (es vengui al grup que es vengui).

- En resum, si el parell (q_1^*, q_2^*) maximitza la funció de beneficis $\pi(q_1, q_2)$, cal que

$$IMg_1(q_1^*) = CMg(q^*) = IMg_2(q_2^*) \qquad (3)$$

on $q^* = q_1^* + q_2^*$. Per (3), l'ingrés marginal de la producció venuda a cada grup coincideix amb el cost marginal de tota la producció: l'última unitat produïda genera el mateix ingrés a cada grup i té un cost igual a l'ingrés que genera. Per a què (3) doni la solució, caldria verificar el compliment de la condició de 2n ordre i de la condició de tancament. N'hi ha prou amb dir que totes dues es compleixen.

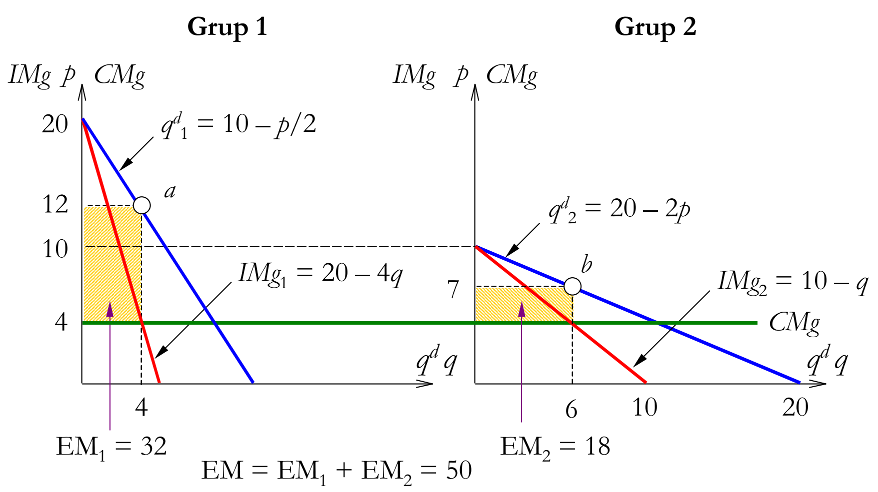


Fig. 15. Solució del monopoli amb segmentació de mercat en dos grups

Exercicis de la Lliçó 4

1. Sigui $C(q) = 2q$ la funció de cost total d'un monopolista és i sigui $q^d = 10 - p$ la funció de demanda de mercat. Determina el benefici del monopolista, el seu excedent i l'excedent dels consumidors a cadascun dels següents casos.

(i) El monopolista no discrimina.

(ii) El monopolista aplica la discriminació de 1r grau.

(iii) La funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p$ és la suma de les funcions de demanda de 10 consumidors idèntics i el monopolista aplica discriminació de 2n grau mitjançant una quota d'accés que captura el màxim d'excedent de cada consumidor.

(iv) La funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p$ és la suma de dos grups idèntics de consumidors i el monopolista aplica discriminació de 3r grau.

2. Un monopolista amb cost marginal constant i igual a 1 participa a un mercat on hi ha 20 consumidors idèntics amb funció de demanda individual $p = 6 - \frac{q}{2}$. Determina el preu, la quantitat intercanviada, el benefici del monopolista, el seu excedent i l'excedent dels consumidors a la solució obtinguda a cadascun dels següents casos.

(i) El monopolista no discrimina.

(ii) El monopolista discrimina amb la tarifa doble $[p_1, p_2, q^*] = [5, 2, 3]$.

(iii) El monopolista discrimina amb la tarifa doble $[p_1, p_2, q^*] = [5, 2, 2]$.

(iv) El monopolista discrimina amb la tarifa doble $[p_1, p_2, q^*] = [5, 2, 1]$.

(v) El monopolista estableix el preu que maximitza els seus beneficis quan no pot discriminar i fixa una quota d'accés al bé que li permeti capturar tot l'excedent de cada consumidor.

(vi) 10 consumidors abandonen el mercat.

3. Un monopolista amb funció de cost marginal $CMg = 8$ participa a un mercat on hi ha 2 grups de consumidors, amb funcions de demanda $q^d = 20 - p/4$ i $p = 10 - q^d$. Determina el preu, la quantitat intercanviada, el benefici del monopolista, l'excedent del monopolista i l'excedent dels consumidors a la solució obtinguda si:

(i) el monopolista no discrimina;

(ii) si discrimina fixant preu $p = 4$ per les 6 primeres unitats i preu $p = 2$ per les següents;

(iii) si discrimina fixant el preu $p = 5$ per les 2 primeres unitats i un preu $p = 2$ per les següents;

(iv) si discrimina fixant el preu $p = 5$ per la primera unitat i un preu $p = 2$ per les següents;

(v) si estableix el preu que maximitza els seus beneficis quan no pot discriminar i fixa una quota d'accés al bé que li permeti capturar tot l'excedent de cada consumidor; i

(vi) si segmenta el mercat en aquests dos grups i aplica una discriminació de preus de 3r grau.

4. Un mercat pot ser segmentat en dos grups, amb funcions de demanda $q^d_1 = 6 - p$ i $q^d_2 = 12 - p$. Compara les solucions d'un monopolista amb funció de cost marginal $CMg = 2$ que resulten quan segmenta i quan no segmenta el mercat en els dos grups.

5. A la Proposició 7, què compra el consumidor si si $q_1 < q^* < q_2$ i $EC(p_1, q_1) + EC(p_2, q_2) = EC(p_1, q^*) + EC(p_2, q^*)$?

6. Un monopoli està format per un productor amb funció de cost marginal constant $CMg = 2$ i dos grups de consumidors amb funcions de demanda $q^d_1 = 12 - p$ i $q^d_2 = 24 - 4p$. Calcula:

(i) el preu de mercat i la quantitat intercanviada si el monopolista no pot discriminar;

(ii) la quantitat total intercanviada i el preu que fixa a cada grup si pot discriminar fixant un preu per a cada grup; i

(iii) l'excedent del monopolista i dels consumidors a cada cas.

(iv) Si en comptes de dos grups es tractessin de dos consumidors, quina quota d'accés imposaria com a màxim el monopolista? I quina imposaria com a mínim?

7. Comprova que als Exemples 4, 5 i 6 es compleix el que diu la Proposició 7.

8. Obté la quantitat que compraria un consumidor amb funció de demanda $q^d = 16 - p$ si s'enfronta a la tarifa múltiple tal que el preu és 14 per cadascuna de les dues primeres unitats, és 10 per les tres següents, 6 per la sisena i 2 per la setena i següents.

9. A la Fig. 10, què representen les àrees A, B i C?

10. Un consumidor té $q^d = 10 - p$ com a funció de demanda d'un bé i paga una quota d'accés de 2 unitats monetàries. Les unitats del bé es mesuren en unitats discretes. Si el preu és $p = 4$, determina el preu mitjà que paga el consumidor si compra: (i) una unitat; (ii) dues unitats; (iii) 3 unitats; (iv) 4 unitats; (v) 5 unitats; (vi) 6 unitats; i (vii) 7 unitats.

11. Verifica que la solució donada a l'Exemple 12 compleix la condició de tancament.

Lliçó 5. Competència potencial

REMARCA 1. El fet que un monopolista estigui sol al mercat com a únic productor no vol dir que no s'hagi de preocupar de productors que podrien entrar al mercat (productors potencials).

- L'Exemple 2 a continuació il·lustra el fet que no cal que hi hagi més productors per a què el monopolista fixi un preu inferior al preu de monopoli: l'amenaça que puguin entrar altres productors pot ser suficient per a induir el monopolista a restringir l'ús del seu poder de mercat.

EXEMPLE 2. Hi ha un monopolista amb funció de cost total $C(q) = 1100 + 20q$. La funció de demanda de mercat és $q^d = 120 - p$. El monopolista es planteja fixar el preu $p = 70$ que maximitza els seus beneficis o un preu $p = 50$ (entre $p = 70$ i el cost marginal $CMg = 20$). Un productor d'un altre bé es planteja incorporar-se al mercat del monopolista produint al mateix cost. Ambdós saben que si hi ha dos productors al mercat, cadascú ven la meitat de la quantitat demandada al preu de mercat (repartiment del mercat al 50%). Quin preu fixa el monopolista?

- El joc de la Fig. 16 descriu l'Exemple 2, on els pagaments són els beneficis obtinguts al mercat del monopolista, el jugador 1 és el monopolista (que tria $p = 50$ o $p = 70$) i el jugador 2 és el rival potencial (que decideix si entrar o no al mercat del monopolista).

- La inducció cap enrere selecciona la jugada on el rival potencial no entra al node x, però entra al node y, i el monopolista fixa el preu més baix, $p = 50$ (que no és el preu que resulta de la maximització de la funció de beneficis del monopolista).

- Aquest exemple suggereix que estimular condicions per a l'entrada a un mercat pot ser una alternativa a mesures dràstiques per a reduir el poder del monopoli, com ara obligar el monopolista a fixar un preu inferior al de monopoli o trossejar-li l'empresa (sentència inicial al cas Microsoft, http://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft_trial).

- Si, a l'Exemple 2, el cost fix fos 1300, el rival mai no entraria i el monopolista podria fixar el preu més alt, $p = 70$. L'Estat podria incentivar l'entrada del rival potencial mitjançant una rebaixa fiscal o una subvenció que li permetés obtenir guanys si entra amb $p = 70$.

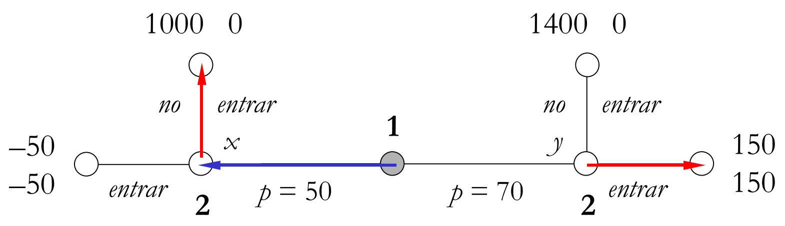


Fig. 16. Joc entre un monopolista i un rival potencial

Exercici de la Lliçó 5

1. La funció de demanda de mercat és $q^d = 100 - p$ en tant que la funció de cost total del monopolista és $C(q) = 800 + 10q$.

(i) Calcula el preu p que maximitzaria els beneficis del monopolista.*

(ii) El monopolista ha de decidir si fixar com a preu p o p*/2, sabent que, a continuació, un competidor potencial decidirà, coneixent el preu fixat pel monopolista, si entra al mercat o no. Si el competidor entra fixa el mateix preu que el monopolista i es reparteix amb el monopolista la quota de mercat al 50% (cadascú ven la meitat de la quantitat demandada al preu que ha fixat el monopolista). Representa aquesta situació com a joc seqüencial i resol el joc per inducció cap enrere.*

Lliçó 6. El duopoli de Cournot

L'Exemple 2 de la Lliçó 5 suggereix que l'augment de la competència (l'augment del nombre de productors d'un bé) tendeix a reduir el preu de mercat del bé. Aquesta lliçó pretén contrastar aquesta impressió en el cas més simple: quan la competència potencial es fa real i entra un segon productor al mercat. El mercat resultant s'anomena duopoli.

Hi ha diferents maneres de representar què succeeix a un duopoli. En general, diferents hipòtesis sobre el que saben o trien els productors a un duopoli conduiran a diferents resultats. En aquesta lliçó s'estudia un model de duopoli degut a Antoine Augustine Cournot (1838); a la lliçó següent s'estudia un altre model de duopoli, degut a Heinrich von Stackelberg (1934).

DEFINICIÓ 1. El model de duopoli de Cournot (o duopoli de Cournot, per a abreujar) consta de tres elements: una funció de demanda de mercat, representant els consumidors del bé; i, per a cada duopolista, una funció de cost total (o, en el seu defecte, una funció de cost marginal).

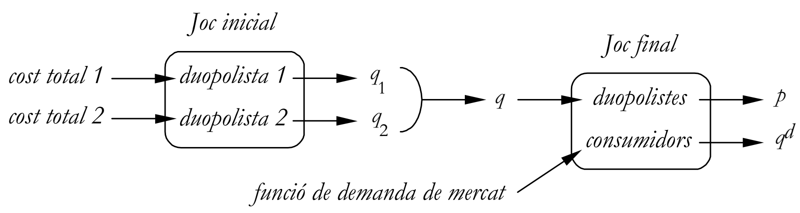


Fig. 17. El duopoli de Cournot com una seqüència de dos jocs

- El duopoli de Cournot es pot interpretar com una seqüència de dos jocs: un joc inicial (o JOC_1) i un joc final (o JOC_2). La Fig. 17 il·lustra aquest joc doble. El joc final és un joc seqüencial on s'enfronten dos jugadors "col·lectius": un jugador que representa els duopolistes i un altre que representa els consumidors. Així que, al JOC_2, els duopolistes juguen plegats contra els consumidors. Els duopolistes comencen jugant i, actuant com a grup, decideixen conjuntament quin és el preu de mercat del bé. Com al monopoli, s'assumeix que els duopolistes coneixen la funció de demanda de mercat. A continuació juguen els consumidors que, també actuant com a grup, trien la quantitat demandada seguint el que dicta la funció de demanda de mercat. De forma que, al JOC_2, els duopolistes fixen primer el preu i, sabent aquest preu, els consumidors (agregats i considerats un únic jugador) trien la quantitat total demandada que determina la funció de demanda de mercat al preu fixat pels duopolistes.

- El joc inicial JOC_1 és un joc simultani. Al JOC_1 només juguen els dos duopolistes. Però si al JOC_2 tots dos jugaven plegats cooperativament contra els consumidors, ara, al JOC_1, juguen l'un contra l'altre no cooperativament. El propòsit del JOC_1 es determinar com els duopolistes es reparteixen la quantitat total q que anticipen, per inducció cap enrere, que serà la quantitat que els consumidors compraran al JOC_2. Al JOC_1, cada duopolista ha de triar la quantitat que vol produir, ignorant la quantitat que tria el rival, amb l'objectiu de maximitzar la seva funció de beneficis. El resultat que ens interessa del JOC_1 és la quantitat total q que produeixen tots dos duopolistes.

- La seqüència de jocs es resol per inducció cap enrere. Primer es resol el JOC_2. En aquest joc, la inducció cap enrere dicta que els consumidors, donat el preu p que hagin triat els duopolistes, escolliran la quantitat demandada q^d que especifica la funció de demanda de mercat quan el preu és p. Sabent això, i coneixent la quantitat total $q = q_1 + q_2$ que ha resultat del JOC_1 entre els duopolistes, aquests trien el preu p que fa que la quantitat demandada q^d a continuació pels consumidors coincideixi amb la quantitat total q que els duopolistes han decidit produir al JOC_1.

- Fins a cert punt, el JOC_2 és com el joc entre un monopolista i els consumidors. Primer, un cop el monopolista ha decidit quina quantitat q produir, el fet de conèixer la funció de demanda de mercat li permet descobrir i fixar el preu més alt p que assegura la quantitat demandada sigui q. I, a continuació, els consumidors, donat p, no fan sinó triar justament com a quantitat demandada la quantitat q (ja que p es va escollir de manera que el valor de la funció de demanda de mercat a preu p sigui q). Com al cas del monopoli, la solució del JOC_2 serà un punt (p, q) de la funció de demanda de mercat. L'única diferència rau en com es determina la quantitat q: quan hi ha un monopolista, és ell qui la determina; quan hi ha duopolistes, cal un joc previ (el JOC_1) per a determinar la quantitat total q produïda a partir de la decisió que, independentment, fa cada duopolista.

- Resolt inicialment el JOC_2, es resol a continuació el JOC_1. Al JOC_1 cada duopolista especifica la seva funció de beneficis sabent que, al JOC_2, el preu es determinarà aplicant la quantitat total que resulti del JOC_1 a la funció de demanda de mercat. Amb aquesta informació, cada duopolista tria la seva producció amb l'objectiu de maximitzar la seva funció de beneficis. La solució escollida per a aplicar al JOC_1 és l'equilibri de Nash. L'equilibri de Nash del JOC_1 s'anomena equilibri de Cournot (de forma que es podria dir que Cournot descobrí l'equilibri de Nash abans que Nash).

DEFINICIÓ 2. L'equilibri de Cournot al duopoli de Cournot consisteix en una quantitat q_1* produïda pel duopolista 1 i una quantitat q_2* produïda pel duopolista 2 tals que: (i) el preu de mercat p és el valor que la inversa de la funció de demanda de mercat associa amb la quantitat total que produeixen els duopolista; (ii) donat q_2*, q_1* maximitza la funció de beneficis del duopolista 1 (assumint que 1 considera la producció q_2 triada pel duopolista 2 una constant); i (iii) donat q_1*, q_2* maximitza la funció de beneficis del duopolista 2 (assumint que 2 considera la producció q_1 triada pel duopolista 1 una constant).

DEFINICIÓ 3. La solució del duopoli de Cournot és un triple (q_1*, q_2*, p*) tal que (q_1*, q_2*) és un equilibri de Cournot i p* és el valor que la inversa de la funció de demanda de mercat fa correspondre amb $q^* = q_1^* + q_2^*$ (això és, p* fa que la quantitat demandada sigui q*).

- La quantitat total produïda a la solució del duopoli de Cournot és $q^* = q_1^* + q_2^*$. Com al monopoli, la solució del duopoli pressuposa que la funció de demanda determina el preu més alt que permet la venda de la quantitat q*.

EXEMPLE 4. Una versió discreta del duopoli de Cournot. Sigui $p = 300 - 3q$ la inversa de la funció de demanda de mercat i $C_i(q_i) = 30q_i$ la funció de cost total del duopolista $i \in \{1, 2\}$. En aquesta versió simplificada, els duopolistes només poden escollir entre tres nivells de producció: 20, 30 i 50. La Fig. 18 representa aquesta situació com a joc simultani, on els pagaments són els beneficis de cada duopolista.

1 \ 2	$q_2 = 50$	$q_2 = 30$	$q_2 = 20$
$q_1 = 50$	–1500 –1500	1500 900	3000 1200
$q_1 = 30$	900 1500	2700 2700	3600 2400
$q_1 = 20$	1200 3000	2400 3600	3000 3000

Fig. 18. Versió simplificada del duopoli de Cournot

- Per exemple, si $q_1 = 50$ i $q_2 = 30$, la quantitat total produïda és $q = q_1 + q_2 = 80$. Això fa que el preu de mercat sigui $p = 300 - 3q$, $p = 60$. La funció de beneficis del duopolista 1 és $\pi_1 = pq_1 - 30q_1 = 60·50 - 30·50 = 1500$ i la del duopolista 2 és $\pi_2 = pq_2 - 30q_2 = 60·30 - 30·30 = 900$. D'aquí que el vector de pagaments de la jugada (50, 30) sigui (1500, 900).

- El joc de la Fig. 18 té un únic equilibri de Nash: la jugada (30, 30), on tots dos duopolistes trien produir 30. Aquest és l'equilibri de Cournot del duopoli de Cournot.

- Al duopoli de Cournot els duopolistes poden triar qualsevol quantitat, de manera que el joc és un on cada jugador té un nombre infinit d'estratègies. La solució del duopoli de Cournot és, en essència, un equilibri de Nash d'aquest joc amb infinites estratègies.

EXEMPLE 5. Sigui $p = 300 - 3q$ la inversa de la funció de demanda de mercat i $C_i(q_i) = 30q_i$ la funció de cost total del duopolista $i \in \{1, 2\}$. L'equilibri de Cournot s'obté com segueix.

- Especifiquem la funció de beneficis del duopolista 1, $\pi_1(q_1, q_2) = p(q)\cdot q_1 - C_1(q_1)$, on $p(q)$ és la inversa de la funció de demanda de mercat, $C_1(q_1)$ és la funció de cost total del duopolista 1 i $q = q_1 + q_2$ és la quantitat total produïda. La funció π_1 depèn de dues variables, q_1 i q_2, però el duopolista 1 només controla una d'elles, q_1. L'equilibri de Cournot pressuposa que q_2 no depèn de q_1. Formalment, això significa que $\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = 0$: quan 1 decideix quin valor tindrà q_1, creu que la seva decisió no afecta a la tria de q_2 que fa l'altre duopolista.

- Amb les dades de l'Exemple 5, $p(q)$ és la funció $p = 300 - 3q = 300 - 3(q_1 + q_2)$. Per tant, $\pi_1(q_1, q_2) = [300 - 3(q_1 + q_2)]q_1 - 30q_1$. La condició de 1r ordre per a trobar un màxim respecte de q_1 estableix que $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0$. Així, $0 = \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 300 - 6q_1 - 3q_2 - 30$. Aquesta no és més que la condició $IMg_1(q_1) = CMg_1(q_1)$, ja que $IMg_1(q_1) = 300 - 6q_1 - 3q_2$ i $CMg_1(q_1) = 30$. Atès que $IMg_1(q_1)$ és una funció decreixent i $CMg_1(q_1)$ és una funció no decreixent, la condició de 2n ordre també es compleix. Verifica tu mateix el compliment de la condició de tancament un cop calculades totes les variables: la producció de cada duopolista, la producció total i el preu de mercat. En resum, $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0$ esdevé

$$q_1 = 45 - \frac{q_2}{2}. \tag{4}$$

- La funció (4) s'anomena funció de reacció del duopolista 1 (o, abreujant, FR_1) i indica, per a cada volum de producció q_2 que pot triar el duopolista 2, quin és el volum de producció q_1 que maximitza la funció de beneficis del duopolista 1 (on s'entén que si $q_2 > 90$, el volum de producció q_1 que maximitza els beneficis d'1 és $q_1 = 0$). La Fig. 19 representa FR_1 (on no interessa què passa si $q_2 > 90$). La funció (4) és la regla que ha de seguir el duopolista 1 si vol maximitzar beneficis: si el rival tria la quantitat q_2 (que encara no s'ha determinat quina serà), el millor per a 1 serà triar $q_1 = 45 - \frac{q_2}{2}$.

- Per a l'altre duopolista es fa el mateix: s'especifica la seva funció de beneficis $\pi_1(q_1, q_2) = p(q)\cdot q_2 - C_2(q_2)$, es deriva respecte de q_2 (que és la variable que controla el duopolista 2), s'iguala la derivada resultant a zero i s'aïlla q_2. La funció de reacció del duopolista 2 (o FR_2 per a abreujar) és (5). La funció FR_2 també es representa a la Fig. 19 (on s'obvia què succeeix si $q_1 > 90$).

$$q_2 = 45 - \frac{q_1}{2} \tag{5}$$

- Les funcions de reacció (4) i (5) són simètriques. Això es deu al fet què els dos duopolistes tenen la mateixa funció de cost marginal. En general, les funcions de reacció no seran simètriques, ja que en general les funcions de cost marginal no seran iguals.

- L'equilibri de Cournot és el punt $c = (30, 30)$ on s'intersecten les dues funcions de reacció. L'equilibri de Cournot és l'únic equilibri de Nash del joc amb infinites estratègies on es trien quantitats. En aquest joc, les estratègies de cada jugador són punts de l'eix on es representa la quantitat triada pel jugador i cada funció de reacció estableix quina és la millor resposta d'un jugador a la quantitat que tria l'altre jugador.

- El parell $(q_1, q_2) = (30, 30)$ és l'equilibri de Cournot del joc perquè, donat $q_1 = 30$, $q_2 = 30$ és la millor resposta del duopolista 2 (és la quantitat que li maximitza la funció de beneficis) i, a la inversa, donat $q_2 = 30$, $q_1 = 30$ és la millor resposta del duopolista 1 (és la quantitat que li maximitza la funció de beneficis).

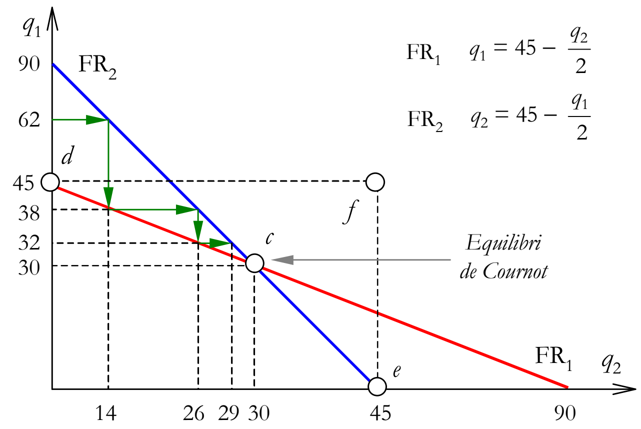


Fig. 19. Funcions de reacció al model de Cournot i equilibri de Cournot

- L'equilibri de Cournot c a la Fig. 19 és estable: si es parteix de qualsevol punt diferent de c, la seqüència de respostes i contrarespostes entre els duopolistes acaba portant a c. Il·lustrem la convergència cap a l'equilibri de Cournot c amb un exemple. Suposem que 1 tria inicialment $q_1 = 62$. La millor resposta de 2 a $q_1 = 62$ és, segons FR_2, $q_2 = 45 - \frac{q_1}{2} = 14$. Però la millor resposta d'1 a $q_2 = 14$ no és l'elecció inicial $q_1 = 62$, sinó, seguint FR_1, $q_1 = 45 - \frac{q_2}{2} = 38$. I la millor resposta de 2 a $q_1 = 38$ és $q_2 = 26$; i la millor d'1 a $q_2 = 26$ és $q_1 = 32$; i la de 2 a $q_1 = 32$ és $q_2 = 29$… de manera de tant q_1 com q_2 s'apropen a 30.

REMARCA 6. El punt d de la Fig. 19 estableix la millor resposta $q_1 = 45$ del duopolista 1 a $q_2 = 0$. Que $q_2 = 0$ es pot interpretar con l'abandó del duopolista 2 del mercat. Per tant, $q_2 = 0$ significa que 1 esdevé un monopolista. Si 1 fos un monopolista amb funció de cost total $C(q) = 30q$ que s'enfronta a $p = 300 - 3q$ com a inversa de la funció de demanda de mercat, la solució de monopoli implicaria produir $q = 45$. Així que el duopoli de Cournot inclou com a cas particular el monopoli: el punt d representa la solució quan el duopolista 1 és un monopolista i, de manera anàloga, el punt e representa la solució quan el duopolista 2 és un monopolista.

REMARCA 7. Comparació de solucions. Amb les dades de l'Exemple 5, l'equilibri Cournot *c* implica una producció total $q = q_1 + q_2 = 30 + 30 = 60$ i un preu $p = 300 - 3{\cdot}60 = 120$. El benefici d'1 (el seu pagament a l'equilibri de Cournot) és $\pi_1 = (p - 30)q_1 = (120 - 30){\cdot}30 = 2700$. El benefici de 2 és $\pi_2 = (p - 30)q_2 = (120 - 30){\cdot}30 = 2700$. Si 1 fos l'únic productor (i, per tant, $q_2 = 0$), s'obtindria la solució de monopoli amb quantitat $q_1 = 45$ (punt *d* de la Fig. 19) i preu $p = 300 - 3{\cdot}45 = 165$. El benefici d'1 seria $\pi_1 = (p - 30)q_1 = (165 - 30){\cdot}45 = 6075$, superior al de duopoli. Si 2 fos l'únic productor (i, per tant, $q_1 = 0$), s'obtindria la solució de monopoli amb quantitat $q_2 = 45$ (punt *e* de la Fig. 19) i preu $p = 165$. El benefici de 2 seria $\pi_1 = (p - 30)q_1 = (165 - 30){\cdot}45 = 6075$.

REMARCA 8. Si els duopolistes es plantegen jugar cooperativament el JOC_2, perquè no cooperen també al JOC_1? Dit d'una altra manera: per què els duopolistes no col·laboren quan determinen quant produeix cadascú? La raó es que la col·lusió al JOC_1 no és estable, de la mateixa forma que la cooperació en el dilema del presoner no és estable.

- Si els duopolistes cooperen i es col·lusionen, trien conjuntament la producció: tots dos decideixen els valors de q_1 i q_2 amb l'objectiu de maximitzar el benefici conjunt $\pi_1 + \pi_2$. Definint $q = q_1 + q_2$, resulta que $\pi_1 + \pi_2 = (p - 30)q_1 + (p - 30)q_2 = (p - 30)(q_1 + q_2) = (p - 30)q$. Si un dels duopolistes fos un monopolista, la seva funció de beneficis seria $\pi = pq - 30q = (p - 30)q$. Així que quan els duopolistes es col·lusionen i trien la producció per a maximitzar el benefici conjunt, s'enfronten al mateix problema que tindrien si un d'ells fos un monopolista. Com d'altra banda era d'esperar, si els duopolistes s'ajunten per a obtenir el màxim benefici conjunt, la solució no pot ser sinó la de monopoli, que estableix el màxim benefici quan només hi ha un productor. Segons la solució de monopoli, la quantitat total produïda és $q = 45$ i el preu és $p = 165$.

- El problema per als duopolistes és com dividir els beneficis. Tenint tots dos la mateixa estructura de costs, una opció natural és dividir la producció (i, per tant, els beneficis) a parts iguals: per a produir $q = 45$, es fa $q_1 = q_2 = 22'5$. El benefici conjunt és 6075. Repartit a parts iguals, cada duopolista rep 3037'5, benefici superior al que obtenen a l'equilibri de Cournot. Conclusió: els duopolistes tenen incentiu a col·lusionar-se i explotar el poder de monopoli que genera la col·lusió, ja que hi ha un acord (dividir la producció de monopoli a parts iguals) que permet augmentar el benefici d'ambdós.

- Però l'acord de repartir-se la producció i els beneficis a parts iguals és inestable si cada duopolista coneix la funció de reacció del rival. Si 1 expecta que 2 respecti l'acord, preveu $q_2 = 22'5$. Donat això, segons FR_1, el millor per a 1 és produir 33'75. Però 2 anticipa la resposta d'1 i, donada FR_2, el millor per a 2 quan $q_1 = 33'75$ és $q_2 = 28'125$. El duopolista 1 també preveu aquesta resposta de 2 i, donada FR_1, el millor per a 1 si $q_2 = 28'125$ és $q_1 = 30'9375$. El duopolista 2 sap això i, donada FR_2, el millor per a 2 quan $q_1 = 30'9375$ és $q_2 = 29'53125$... I així successivament fins a arribar a l'equilibri de Cournot, $q_1 = q_2 = 30$. En suma: tot acord diferent de l'equilibri de Cournot no és estable i la seqüència de reaccions i contrareaccions durà eventualment a l'equilibri de Cournot.

- Curiositat: a http://www.res.otaru-uc.ac.jp/~uzawa/cal-economics/floodOne-c114(522-594)jpg-e.html hi ha una animació del duopoli de Cournot.

Exercicis de la Lliçó 6

1. A un duopoli de Cournot, la funció de demanda de mercat és $q^d = 240 - p$ i la funció de cost total per a cada productor és $C(q) = 60q$. (i) Representa com a joc simultani (on els pagaments són els beneficis) el cas en què cada duopolista es planteja si produir $q = 40$, $q = 50$ o $q = 60$. (ii) Troba tots els equilibris de Nash del joc.

2. Considera la funció de demanda de mercat i les funcions de cost total de l'Exercici 1.

(i) Troba i representa gràficament les funcions de reacció de cada duopolista

(ii) Calcula l'equilibri de Cournot i identifica aquest equilibri a la representació gràfica anterior.

(iii) Obté la solució de Cournot i el benefici de cada duopolista a la solució de Cournot.

(iv) Compara la solució de Cournot amb la de monopoli (amb només un duopolista al mercat).

(v) Compara el benefici de cada duopolista a la solució de Cournot amb el que s'obtindrien si acordessin produir a parts iguals el volum de producció q^* que maximitza el benefici conjunt.

(vi) Indica per a cada duopolista quin és el volum de producció que maximitza el seu benefici quan el duopolista expecta que el rival acompleixi l'acord de repartir-se la producció de q^* de (v) a la meitat.

(vii) Obté els sis primers elements de la seqüència de reaccions que s'inicia quan un dels duopolistes produeix el volum de producció q^* del punt (v) i representa gràficament els resultats.

3. Hi ha dos productors cadascú amb un cost marginal constant i igual a 1. (i) Calcula quant produeix cada productor a l'equilibri de Cournot i el preu de mercat si la funció de demanda de mercat és $q^d = 16 - p$. (ii) Representa gràficament les funcions de reacció de tots dos productors i identifica l'equilibri de Cournot a la representació.

4. La inversa de la funció de demanda de mercat és $p = a - bq$ i la funció de cost marginal de cada duopolista és la funció constant $CMg = c$, on a, b i c són constants positives. (i) Troba i representa gràficament l'equilibri de Cournot. (ii) Compara la solució del duopoli de Cournot amb la solució de monopoli.
[Solució: $q^M = (a - c)/2b$ i $q^C = 2(a - c)/3b$, amb $q_1^C = q_2^C = (a - c)/3b$]

5. Al duopoli de Cournot, la funció de demanda de mercat és $p = 50 - 4q$ i les funcions de cost total dels duopolistes són $C(q) = 2q$ i $C(q) = 4q$.

(i) Respon a les preguntes de l'Exercici 2.

(ii) Representa com a un joc simultani la situació en què els productors només trien entre tres volums de producció ($q = 6, 8, 12$) i els pagaments del joc consisteixen en els beneficis respectius. Troba tots els equilibris de Nash d'aquest joc.

6. Hi ha dos productors, cadascun amb funció de cost total $C(q) = 10q$. La funció de demanda de mercat és $q^d = 30 - p$. Cadascun dels productors decideix si produir 5 o 10 unitats. (i) Representa com a joc simultani la situació anterior, assumint que el pagament de cada productor és el seu benefici. (ii) Explica si alguna estratègia és dominada i calcula tots els equilibris de Nash.

7. Torba ls solució de Cournot si la funció de demanda de mercat és $q^d = 120 - p$ i les funcions de cost total són $C(q) = 20q$ i $C(q) = 30q$.

8. L'oligopoli de Cournot (oligopoli = "pocs" productors). Amb funció de demanda de mercat $q^d = 240 - p$, troba la solució de Cournot quan hi ha $n \geq 2$ productors idèntics al mercat, cadascú amb funció de cost total $C(q) = 60q$.
[Suggeriment: si tots els productors són iguals, tots acaben produint el mateix a la solució de Cournot].

Lliçó 7. El duopoli d'Stackelberg

DEFINICIÓ 1. El duopoli d'Stackelberg es diferencia del duopoli de Cournot només en el que fet que un duopolista tria primer la quantitat que produeix (es diu que és el "líder") i l'altre duopolista (el "seguidor"), coneixent la decisió del líder, tria a continuació quant produir.

- Com al duopoli de Cournot, un cop determinades la quantitat q_1 del líder i la quantitat q_2 del seguidor, el preu es determina per la funció de demanda de mercat fent $q^d = q_1 + q_2$.

EXEMPLE 2. Considerem l'Exemple 5 de la Lliçó 6 quan el duopolista 1 fa de líder (tria primer). La Fig. 20 representa el duopoli d'Stackelberg, corresponent a aquesta situació, com a joc seqüencial. La Fig. 21 soluciona el joc mitjançant la inducció cap enrere: a x, 2 tria 30; a y, 30; a z, 20; i donat això, 1 tria 50 al node inicial r.

- Per tant, la solució del duopoli d'Stackelberg és tal que $q_1 = 50$ i $q_2 = 20$, amb $p = 300 - 3(50 + 20) = 90$. La solució beneficia al líder perquè la seva decisió determina com respondrà el seguidor: a la solució del duopoli de Cournot, els beneficis de tots dos duopolistes són 2700: cadascun ingressa 120·30 i assumeix un cost de producció igual a 30·30. En canvi, a la solució d'Stackelberg, els beneficis del líder són 3000 en tant que els beneficis del seguidor són 1200. En cas de monopoli, els beneficis serien 7425 – 1350 = 6075.

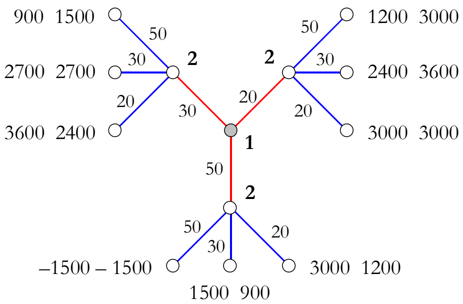


Fig. 20. Duopoli d'Stackelberg com a joc

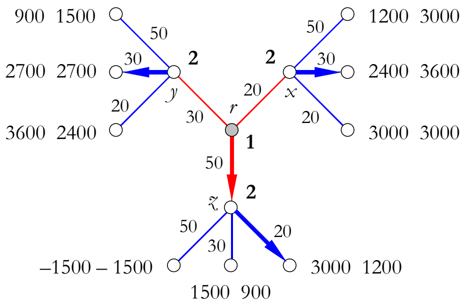


Fig. 21. Solució del duopoli d'Stackelberg

EXEMPLE 3. Sigui $p = 300 - 3q$ la inversa de la funció de demanda de mercat i $C(q_i) = 30q_i$ la funció de cost total del duopolista $i \in \{1, 2\}$. Suposem que el duopolista 1 tria primer la seva producció q_1 i, observant aquesta decisió, el duopolista 2 tria a continuació la seva producció q_2. L'equilibri d'Stackelberg s'obté per inducció cap enrere com segueix.

- Anem al final del joc, on tria 2. L'elecció q_1 del duopolista 1 ja està feta i no es pot alterar. Així que 2 incorpora el valor q_1 a la seva funció de beneficis com una dada més. La funció de beneficis de 2 serà $\pi_2(q_1, q_2) = [300 - 3(q_1 + q_2)]q_2 - 30q_2$. El duopolista 2 tria q_2 per a maximitzar aquesta funció. El resultat, com al model de Cournot, és la funció de reacció $q_2 = 45 - \frac{q_1}{2}$ que indica al duopolista 2 quina és la seva millor resposta a la decisió q_1 que prengui el duopolista 1.

- Passem ara a l'inici del joc, on el duopolista 1 anticipa, per a cada elecció q_1 que faci, quina serà la resposta del duopolista 2. Això permet a 1 incorporar a la seva funció de beneficis la resposta $q_2 = 45 - \frac{q_1}{2}$ que farà 2. D'aquesta manera, allà on a la funció de beneficis d'1 aparegui q_2, es podrà substituir q_2 per $45 - \frac{q_1}{2}$, de forma que la funció de beneficis d'1 només depèn de q_1. Així, $\pi_1(q_1, q_2) = [300 - 3(q_1 + q_2)]q_1 - 30q_1$ esdevé $\Pi_1(q_1) = \left[300 - 3\left(q_1 + \left(45 - \frac{q_1}{2}\right)\right)\right]q_1 - 30q_1 = 135q_1 - \frac{3}{2}q_1^2$. Derivant i igualant a zero, s'obté $135 = 3q_1$ i, d'aquí, $q_1 = 45$.

- Donat que 1 tria $q_1 = 45$ a l'inici i que 2 aplica la regla $q_2 = 45 - \frac{q_1}{2}$ per a determinar la seva millor resposta al que tria 1, resulta que $q_2 = 45 - \frac{45}{2} = 22'5$. La quantitat total produïda serà $q = q_1 + q_2 = 45 + 22'5 = 77'5$. El preu de mercat serà $p = 300 - 3q = 300 - 3 \cdot 77'5 = 300 - 232'5 = 67'5$. Els beneficis del duopolista 1 (el líder) són $\pi_1 = (p - 30)q_1 = (67'5 - 30) \cdot 45 = 1687'5$. Els beneficis del duopolista 2 (el seguidor) són $\pi_2 = (p - 30)q_2 = (67'5 - 30) \cdot 22'5 = 843'75$. El líder aconsegueix un benefici superior al seguidor, però inferior al que obtenia a la solució del duopoli de Cournot.

Exercicis de la Lliçó 7

1. Partint de la situació de l'Exercici 1 de la Lliçó 6, suposa que un dels duopolistes fa de líder i l'altre de seguidor.

(i) Representa el joc seqüencial d'Stackelberg corresponent.

(ii) Troba la solució del joc aplicant la inducció cap enrere i compara-la amb l'equilibri de Nash trobat al susdit Exercici 1.

2. A un duopoli d'Stackelberg, sigui $q^d = 240 - p$ la funció de demanda de mercat i $C(q) = 60q$ la funció de cost total de cada duopolista. Determina la solució del duopoli d'Stackelberg si un duopolista fa de líder i l'altre de seguidor.

3. A un duopoli d'Stackelberg la funció de demanda de mercat és $q^d = 120 - p$, la funció de cost total del duopolista 1 és $C_1(q) = 20q$ i la funció de cost total del duopolista 2 és $C_2(q) = 30q$.

(i) Calcula la solució del duopoli d'Stackelberg si 1 fa de líder.

(ii) Torna a calcular-la si el líder és 2.

(iii) Compara els beneficis de cada duopolista a (i) i (ii) amb els beneficis de la solució de Cournot.

Preguntes de tipus test del Tema 3

1. Un monopolista que no pot discriminar tria
(a) un preu i una quantitat produïda
(b) una funció de demanda i una quantitat demandada
(c) una tarifa doble i dos grups de consumidors
(d) res de l'anterior

2. Un monopolista que no pot discriminar tria la quantitat produïda
(a) igualant ingrés marginal i cost marginal
(b) de la funció de demanda de mercat
(c) de la seva funció d'oferta
(d) res de l'anterior

3. Si un monopolista que no pot discriminar tria produir $q = 5$*, el preu que fixarà serà*
(a) $p = 5$
(b) $p > 5$
(c) res de l'anterior perquè el monopolista no tria el preu
(d) no es pot saber sense més informació

4. Amb funció de demanda de mercat $q^d = 8 - 2p$*, la funció d'ingrés marginal d'un monopolista és*
(a) $p = 4 - q/2$
(b) $q^d = 8 - 4p$
(c) no es pot determinar
(d) res de l'anterior

5. Si la funció inversa de demanda de mercat és $p = 10 - q$ *i la funció de cost marginal d'un monopolista és* $CMg = 8$*, el preu que fixa el monopolista (si no pot discriminar) és*
(a) $p = 9$
(b) $p = 2$
(c) $p = 8$
(d) res de l'anterior

6. Si un monopolista fixa una quota per a accedir al consum del bé que produeix i fixa un mateix preu per cada unitat consumida, està aplicant una discriminació de preus de
(a) 1r grau
(b) 3r grau
(c) 2n grau
(d) no és cert que estigui discriminant

7. Per a aplicar la discriminació de 3r grau
(a) cal que cada unitat produïda sigui venuda al preu més alt que algun consumidor pagaria
(b) cal aplicar descomptes per la quantitat comprada
(c) cal poder segmentar el mercat en almenys dos grups de consumidors
(d) res de l'anterior

8. Un monopolista produeix i ven 5 unitats. El seu cost fix és 25. Si el preu de cada unitat és 5,
(a) l'excedent del monopolista és zero
(b) el benefici del monopolista és zero
(c) el cost variable és necessàriament zero
(d) Res de l'anterior

9. El duopoli d'Stackelberg es diferencia del duopoli de Cournot
(a) en què un duopolista es retira del mercat
(b) en què tots dos duopolistes es col·lusionen
(c) en res, perquè el duopoli d'Stackelberg és un cas particular del duopoli de Cournot, el qual és un cas particular del duopoli d'Stackelberg
(d) res de l'anterior

10. Si una funció de demanda de mercat és lineal i decreixent, la corresponent funció d'ingrés marginal
(a) és creixent
(b) és lineal
(c) és sempre la funció de demanda
(d) no es pot calcular

11. Amb funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p/2$*, la funció d'ingrés marginal és*
(a) $p = 10 - q/2$ *(b) no es pot calcular*
(c) $p = 20 - 2q$ *(d) res de l'anterior*

12. Si $CMg = 8$ *és la funció de cost marginal d'un monopolista,* $p = 10$ *és el preu que el monopolista estableix i* $q = 4$ *és la quantitat intercanviada, l'excedent del monopolista*
(a) és positiu
(b) és negatiu perquè $p > CMg$
(c) és zero perquè $CMg > q$
(d) no es pot calcular

13. Si tots els consumidors tenen $q^d = 18 - p$ *com a funció de demanda individual i el monopolista, tenint* $CMg = 6$ *com a funció de cost marginal i triant p i q per a maximitzar beneficis, decideix establir una quota d'accés al consum del bé que sigui igual per a tots els consumidors, no podrà establir una quota superior a*
(a) 18 *(b) 12*
(c) 6 *(d) 0*

14. L'establiment d'una tarifa doble és un exemple de discriminació
(a) de 1r grau *(b) de 2n grau* *(c) de 3r grau*
(d) una tarifa doble no representa cap tipus de discriminació de preus

15. El duopoli de Cournot és un model format
(a) per les funcions d'oferta i demanda de mercat
(b) per la funció de demanda de mercat i la funció de cost total del monopolista
(c) per la funció de demanda de mercat i les funcions de cost total dels productors (o, en el seu defecte, les de cost marginal)
(d) res de l'anterior

16. L'equilibri de Cournot és, de fet,
(a) un equilibri de Nash
(b) l'equilibri d'una multisubhasta hiperbòlica
(c) la solució del monopolista
(d) l'equilibri en desequilibri quan es reequilibra

17. Amb funció de demanda de mercat $q^d = 10 - 2p$*, l'equilibri de Cournot és*
(a) $p = 10$ *(b)* $q = 20$
(c) no es pot determinar *(d)* $q_1 = q_2$

18. Al duopoli de Cournot, si la funció inversa de demanda de mercat és $p = 10 - q$ *i la funció de cost total d'un dels duopolistes és* $C(q) = 4q$*, la seva funció de reacció és*
(a) $q_1 = 3 - q_2/2$ *(b)* $q_1 = 3$
(c) no es pot calcular *(d) res de l'anterior*

19. Quina afirmació no és falsa?
(a) La solució d'un monopoli on la funció de cost marginal és $CMg = 2$ *i la funció de demanda de mercat és* $Q^d = 12 - 2p$ *la dóna un punt de la funció de demanda de mercat*
(b) La funció de reacció d'un duopolista al duopoli de Cournot indica quina reacció ha de tenir el duopolista quan l'altre duopolista augmenta el preu
(c) Si un monopolista fixa el preu $p = 5$ *per les 3 primeres unitats que es compren i* $p = 2$ *per les següents, un consumidor maximitzador del seu excedent i amb funció de demanda* $q^d = 12 - 2p$ *compraria la quantitat* $q = 2$
(d) Les tres afirmacions anteriors són certes

20. La diferència entre el cost total i el cost fix és
(a) l'ingrés total *(b) l'ingrés marginal*
(c) el cost marginal *(d) res de les anterior*

21. El preu de mercat al duopoli de Cournot és, en comparació amb el preu de mercat que resulta quan desapareix un dels productors,
(a) generalment més gran
(b) generalment el mateix
(c) generalment més petit
(d) un preu que no es pot determinar

22. La col·lusió al duopoli de Cournot per a què cada duopolista obtingui un benefici superior al que obté a l'equilibri de Cournot
(a) és inestable
(b) porta a la solució de competència perfecta
(c) implica que la producció total és superior a la producció total que resulta de l'equilibri de Cournot
(d) és l'equilibri de Cournot

23. Al duopoli de Cournot, si la funció inversa de demanda de mercat és $p = 10 - q$ *i la funció de cost total de cada duopolista és* $C(q) = 4q$*, l'equilibri de Cournot és*
(a) $p = 12$ *(b) no es pot calcular*
(c) $q_1 = 2$ *i* $q_2 = 3$ *(d) res de l'anterior*

24. Geomètricament, l'equilibri de Cournot és
(a) el punt on s'intersecten les funcions de reacció dels duopolistes
(b) el punt on intersecta una funció de reacció amb un dels eixos
(c) l'àrea entre les funcions de reacció dels duopolistes
(d) el punt on s'intersecten la funció de reacció i la funció de demanda de mercat

25. Quina afirmació no és falsa?
(a) L'amenaça de la competència potencial pot fer que un monopolista estableixi un preu inferior al que establiria sense competència potencial
(b) Un monopolista que maximitzi beneficis sempre tria un preu i quantitat fora de la funció de demanda de mercat
(c) Un monopolista que maximitzi beneficis aplica la discriminació de 2n grau si així redueix el seu excedent
(d) Un monopolista no discriminador que maximitzi beneficis tria el nivell de producció que maximitza el seu ingrés marginal

26. Amb funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p$ *i funció de cost marginal* $CMg = 2$*, l'excedent del monopolista si apliqués la discriminació de 1r grau seria*
(a) no es pot calcular *(b) zero*
(c) negatiu *(d) positiu*

27. La funció de cost marginal és
(a) ingrés total menys cost total
(b) la derivada de la funció de demanda
(c) la derivada de la funció de cost variable
(d) cap de les anteriors

28. Una funció de cost total relaciona
(a) cost de producció i producció
(b) preu i quantitat produïda
(c) ingrés marginal i cost marginal
(d) res de l'anterior

29. La funció de cost marginal corresponent a la funció de cost total $C(q) = 10 + q + q^2$
(a) és $CMg = 1 + 2q$ *(b) és decreixent*
(c) no es pot calcular *(d) res de l'anterior*

30. Amb funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p$*, quin punt* (p, q^d) *de la funció podria correspondre a la solució d'un monopoli quan el cost fix és positiu?*
(a) (6, 4) *(b) (6, 1)*
(c) (6, 7) *(d) Res de l'anterior*

31. Amb funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p$ *i funció de cost marginal* $CMg = 2$*, l'excedent del monopolista a la solució de monopoli és*
(a) positiu *(b) negatiu*
(c) Res de l'anterior *(d) No es pot calcular*

32. Amb funció de demanda de mercat $q^d = 10 - p$ *i funció de cost marginal* $CMg = 2$*, l'excedent del monopolista a la solució de monopoli és*
(a) 4 *(b) 8* *(c) 16* *(d) no es pot calcular*

33. Amb funció de demanda de mercat lineal, si la funció de cost marginal constant del monopolista passa de $CMg = c$ *a* $CMg = 2c$*, si hi ha solució amb quanitat positiva, en el pas de la primera a la segona solució de monopoli hi ha*
(a) un augment de la quantitat intercanviada
(b) un augment del preu
(c) un augment de l'excedent dels consumidors
(d) res de l'anterior

34. Hi ha 1000 consumidors idèntics, cadascú amb funció de demanda individual $q^d = 10 - p$. Si la funció de cost marginal d'un monopolista és CMg = 2, quina quota d'accés al consum del bé segur que no fixaria el monopolista si tractés de maximitzar el seu benefici?
(a) 7 (b) 10
(c) ni (a) ni (b) (d) tant (a) com (b)

35. La funció de demanda d'un bé d'un consumidor és $q^d = 10 - p$. Sigui la tarifa del bé tal que el preu és $p = 5$ per la primera, segona o tercera unitats; $p = 4$ per la quarta, cinquena o sisena; i $p = 1$ per la setena i següents. Aleshores, el consumidor faria una despesa de
(a) 0 (b) no es pot calcular
(c) 30 (d) res de l'anterior

36. Un monopolista amb funció de cost marginal CMg = 2 segmenta el seu mercat en dos grups de consumidors, amb funcions de demanda $q^d_1 = 10 - p$ i $q^d_2 = 20 - 2p$. Aleshores el preu p_1 que fixaria per al primer grup i el preu p_2 per al segon satisfarien
(a) $p_1 = 2p_2$ (b) $p_2 = 2p_1$
(c) $p_1 = p_2$ (d) res de l'anterior

37. Al duopoli de Cournot, si la funció inversa de demanda de mercat és $p = 10 - q$ i la funció de cost marginal d'un dels duopolistes és CMg = 2, la seva funció de reacció serà
(a) la funció de cost marginal del rival
(b) $q_1 = 10 - p$
(c) res de l'anterior
(d) no es pot calcular

38. Al duopoli de Cournot, la funció inversa de demanda de mercat és $p = 10 - q$ i la funció de cost marginal de cada productor és CMg = 2. Per tant, la solució de Cournot implica que
(a) el preu és $p = 20$
(b) un productor produeix el doble que l'altre
(c) tots dos productors produeixen la mateixa quantitat
(d) la producció total és inferior a la de monopoli

39. La condició de tancament per a un monopolista que maximitza la seva funció de beneficis diu que
(a) el monopolista ha de tancar sempre si el seu benefici és negatiu o no és prou positiu o és zero.
(b) no pot produir i vendre una quantitat q a un preu tal que l'ingrés total sigui inferior al cost variable de produir la quantitat q.
(c) l'excedent del monopolista pot ser negatiu.
(d) Res de l'anterior.

40. Si la funció de cost marginal és CMg = 1 + q,
(a) el cost fix és 1
(b) al funció de cost variable és la derivada de la funció de cost marginal
(c) la funció de cost total pot ser $C = 2 + q + q^2/2$
(d) Res de l'anterior

41. A un monopoli on la funció de demanda de mercat és tal que $Q^d = 12 - 2p$,
(a) $(p, q) = (4, 4)$ no podria ser mai la solució de monopoli
(b) $(p, q) = (4, 5)$ no podria ser mai la solució de monopoli
(c) existeix un valor de la constant a a la funció de cost total $C = aq$ del monopolista que fa que $(p, q) = (4, 4)$ sigui la solució de monopoli i existeix un altre valor d'a a la funció de cost total $C = aq$ que fa que $(p, q) = (4, 5)$ sigui la solució de monopoli
(d) Tot l'anterior és fals

42. Un monopolista aplica la discriminació de 3r grau
(a) quan ven cada unitat produïda al preu més alt que està disposat a pagar algun consumidor
(b) quan aplica una tarifa doble combinada amb una quota d'accés
(c) quan segmenta el mercat en almenys dos grups de consumidors i fixa un preu per a cada grup
(d) Res de l'anterior

43. A un monopoli on $Q^d = 12 - p$ és la funció de demanda de mercat, el monopolista té una funció de cost marginal CMg = c < 12. Si c augmenta fins a d < 12,
(a) la solució de monopoli no canvia
(b) la quantitat a la solució de monopoli si CMg = d és inferior a la quantitat a la solució de monopoli si CMg = c
(c) el preu a la solució de monopoli si CMg = d és inferior al preu a la solució de monopoli si CMg = c
(d) Res de l'anterior

44. Quina afirmació no és falsa?
(a) Atès que IMg = CMg és una condició necessària per a maximitzar beneficis quan es produeix, si un monopolista produeix i ven una quantitat q^* que satisfà IMq(q^*) = CMq(q^*) el seu benefici és màxim
(b) A l'equilibri de Cournot els dos productors produeixen sempre la mateixa quantitat
(c) El duopoli d'Stackelberg és el model d'un monopolista que aplica una discriminació de preus de segon grau que s'enfronta a un competidor potencial
(d) Les tres afirmacions anteriors són falses

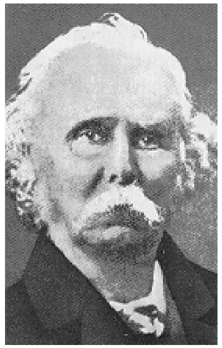
45. Quin dels següents fets demostra inequívocament que un monopolista no està maximitzant beneficis?
(a) Que ha segmentat el mercat
(b) Que el cost fix és superior al cost variable
(c) Que està produint una quantitat on la derivada de la funció de cost marginal és positiva
(d) Res de l'anterior

Tema 4. El mercat perfectament competitiu

Lliçons 1–12

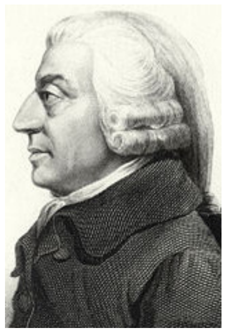
Antoine Augustin Cournot (1801–1877)
http://en.wikipedia.org/wiki/Cournot

Economista, matemàtic i filòsof francès. El seu llibre *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838) analitza matemàticament el model de competència perfecta. L'Economia és una disciplina que sembla tenir molts pares. D'Adam Smith es diu que és el pare de l'Economia, d'Alfred Marshall que és el pare de l'Economia moderna i, de Cournot, que és el pare de l'Economia Matemàtica (tot i que tots tres tenen rivals en les respectives paternitats).



Alfred Marshall (1842–1924)
http://es.wikipedia.org/wiki/Alfred_Marshall

Economista anglès. Va escriure el manual d'Economia més influent de la seva època, *Principles of Economics* (1890), on s'analitzava i aplicava el model de competència perfecta (o model d'oferta i demanda). Va casar-se amb una estudiant seva, Mary Paley (1850–1944). Plegats van publicar *The Economics of Industry* (1879). Mary va ajudar-lo en els *Principles* (de fet, sembla que Mary hi va contribuir substancialment).



Adam Smith (1723–1790)
http://en.wikipedia.org/wiki/Adam_Smith

Filòsof i economista escocès. Al seu llibre *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations* (1776) defensa que, als mercats no intervinguts, l'interès propi produeix resultats socialment desitjables. El llibre és considerat una contribució pionera a l'Economia, tot i que, com succeeix amb els *Principles* de Marshall, es basa en un considerable estoc de contribucions de predecessors. Smith ocupa el lloc 30 al rànquing de Michael H. Hart (1992) de les persones més influents de la història.
http://www.adherents.com/adh_influ.html

Lliçó 1. Funció d'oferta d'un productor preu acceptant

DEFINICIÓ 1. Un productor d'un bé es diu preu acceptant (o competitiu) si no decideix el preu al qual ven el bé que produeix.

- Un productor competitiu pren el preu del bé com a una dada i assumeix que les seves decisions no tenen una influència significativa sobre el preu del bé.

REMARCA 2. Tot el que calia saber d'un consumidor preu acceptant per a determinar com pren decisions sobre la quantitat demandada d'un bé estava contingut en una funció d'utilitat del bé, de manera que un consumidor preu acceptant podia identificar-se amb una funció d'utilitat. De manera anàloga, un productor preu acceptant serà identificat amb una funció de cost total $C(q)$, que en general s'assumirà derivable, no decreixent i convexa.

DEFINICIÓ 3. La funció d'ingrés total d'un productor preu acceptant és $I(q) = pq$, on p és el preu del bé que el productor pren com a donat (el productor tracta p com si fos una constant).

- La funció d'ingrés total dóna l'ingrés derivat de la venda de q unitats al preu donat p.

DEFINICIÓ 4. La funció de beneficis d'un productor preu acceptant amb funció de cost total $C(q)$ és $\pi(q) = pq - C(q)$, on p és el preu del bé que el productor pren com a donat.

- La funció de beneficis és la diferència entre les funcions d'ingrés total i de cost total, i determina, per a cada volum de producció q, quin és el benefici que s'obtindria si es vengués la quantitat q al preu donat p.

REMARCA 5. L'objectiu de tot productor preu acceptant és triar la quantitat q^* del bé que maximitza la seva funció de beneficis $\pi(q) = pq - C(q)$, on p és el preu del bé que el productor pren com a donat i $C(q)$ és la funció de cost total del productor.

- En el cas d'un consumidor preu acceptant, la seva decisió sobre quant consumir s'explicava especificant un objectiu (maximitzar l'excedent) i una funció d'utilitat (que estableix el valor monetari $U(q)$ per al consumidor de consumir la quantitat q del bé).

- En el cas d'un productor preu acceptant, la seva decisió sobrè quant produir s'explicarà especificant un objectiu (maximitzar el benefici) i una funció de cost total (que indica el cost monetari $C(q)$ per al productor de produir la quantitat q del bé).

- La representació d'un productor preu acceptant és idèntica a la representació d'un monopolista (funció de cost total + maximització de beneficis) amb l'única diferència que el productor preu acceptant tracta el preu p del bé com a una constant (en el cas del monopolista, p era una variable objecte de decisió).

- El problema del productor preu acceptant consisteix en triar un volum de producció q^* que maximitzi la seva funció de beneficis. Aquesta solució q^* al problema de maximització de beneficis d'un productor preu acceptant s'obté de la mateixa manera que la solució del problema de maximització d'un monopolista (Proposició 2 de la Lliçó 3 del Tema 3): q^* ha de satisfer la condició de 1r ordre, la condició de 2n ordre i la condició de tancament. L'única diferència és que p no és ara la inversa de la funció de demanda de mercat sinó que es considera una constant sobre la que el productor no té cap influència.

REMARCA 6. Condició de 1r ordre: si la funció de cost total $C(q)$ és derivable i $q^* > 0$ maximitza la funció de beneficis $\pi(q) = pq - C(q)$ quan p es considera una constant, aleshores $\dfrac{\partial\pi(q^*)}{\partial q} = 0$.

- La derivada de π respecte de q, quan p es considera una constant, és $\dfrac{\partial\pi(q)}{\partial q} = \dfrac{\partial(pq)}{\partial q} - \dfrac{\partial C(q)}{\partial q} = p - CMg(q)$. Això fa que tot volum de producció $q^* > 0$ candidat a maximitzar $\pi(q)$ hagi de satisfer la condició $p = CMg(q^*)$: el cost produir la "darrera" de les q^* unitats és el preu p que el productor pren com a donat.

- La funció de beneficis $\pi(q) = pq - C(q)$ està definida per a valors de q no negatius. Això vol dir que no poden definir-se límits de la funció per a valors negatius de q, fet que implica la inexistència de la derivada de π quan $q = 0$. Per tant, si fos el cas que $q = 0$ és una solució del problema de maximització de beneficis, no es podria descobrir aquest fet emprant derivades. L'ús de derivades només permet trobar solucions que no són a l'extrem de l'interval de valors de q on està definida la funció. D'aquí que, per a què l'ús de derivades permeti descobrir un valor de q que maximitza π, cal que $q > 0$. La condició de tancament és la que permetrà verificar si $q = 0$ és solució o no.

REMARCA 7. Condició de 2n ordre: si la funció de cost marginal $CMg(q)$ és derivable i si la derivada segona $\dfrac{\partial^2\pi(q^*)}{\partial q^2}$ de π respecte de q avaluada quan $q = q^*$ és negativa, aleshores q^* maximitza la funció de beneficis quan la funció de beneficis es restringeix a valors positius de q.

- Com al cas de la condició de 1r ordre, la validesa de la condició de 2n ordre requereix limitar la cerca dels valors de q que maximitzen π als valors positius. La condició de 2n ordre serveix per a determinar si els candidats a maximitzar la funció de beneficis obtinguts de la condició de 1r ordre són efectivament valors que maximitzen, i no valors que minimitzen, la funció de beneficis.

- Per tant, $\dfrac{\partial^2\pi(q^*)}{\partial q^2} < 0$ significa que q^* maximitza la funció de beneficis π quan q^* només pot prendre valors positius. Això vol dir que si el productor es veu forçat a produir (si ha de triar un valor positiu de q) i q^* és l'únic valor positiu que satisfà $\dfrac{\partial^2\pi(q^*)}{\partial q^2} < 0$, aleshores el productor produirà q^*.

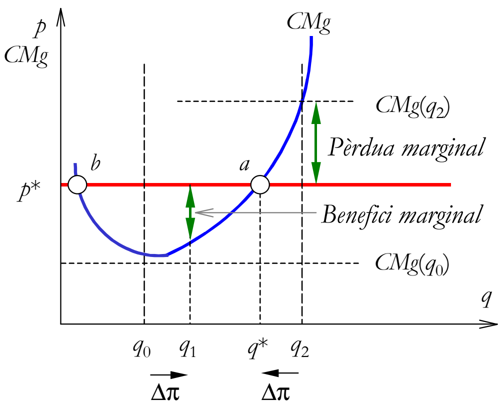
- Atès que $\frac{\partial \pi(q)}{\partial q} = p - CMg(q)$, se segueix que $\frac{\partial^2 \pi(q)}{\partial q^2} = \frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial CMg(q)}{\partial q}$. El fet que p es consideri una constant implica que $\frac{\partial p}{\partial q} = 0$. En conseqüència, $\frac{\partial^2 \pi(q)}{\partial q^2} = -\frac{\partial CMg(q)}{\partial q}$ i, com a resultat, $\frac{\partial^2 \pi(q)}{\partial q^2} < 0$ és equivalent a $\frac{\partial CMg(q^*)}{\partial q} > 0$. Això demostra que la condició de 2n ordre és el mateix que $\frac{\partial CMg(q^*)}{\partial q} > 0$: <u>la funció de cost marginal ha de ser creixent a tot valor q^* que maximitzi la funció π</u> (quan el màxim es busca entre els valors positius de q).

REMARCA 8. <u>Condició de tancament</u>: si q^* és l'únic valor de q que satisfà les condicions de 1r i 2n ordre, aleshores q^* maximitza la funció de beneficis si $\pi(q^*) \geq \pi(0)$; i si $\pi(q^*) < \pi(0)$, llavors $q = 0$ és l'únic valor de q que maximitza la funció de beneficis.

- Assumint derivabilitat de les funcions de cost total i marginal, les condicions de 1r i 2n ordre permeten identificar tots els valors de q que maximitzen π quan aquests valors són <u>diferents de zero</u>: si q^* satisfà les condicions de 1r i 2n ordre, aleshores, per a tot $q > 0$, $\pi(q^*) \geq \pi(q)$. Restaria per comparar $\pi(q^*)$ amb $\pi(0)$: <u>si $\pi(q^*) \geq \pi(0)$, el productor produeix q^*; si $\pi(q^*) < \pi(0)$, el productor no produeix</u>.

- Donat que $\pi(0) = -CF$, $\pi(q^*) \geq \pi(0)$ equival a $pq^* \geq CV(q^*)$, que equival a $p \geq \frac{CV(q^*)}{q^*}$, on el quocient $\frac{CV(q)}{q}$ és el <u>cost variable mitjà</u> de produir la quantitat q.

- En resum, si hi ha un únic q^* que satisfà les condicions de 1r i 2n ordre, <u>el productor produeix q^* si l'ingrés total pq^* cobreix el cost variable $CV(q^*)$</u>; <u>en cas contrari</u>, si $\pi(q^*) < -CF$, <u>el productor no produeix</u>.



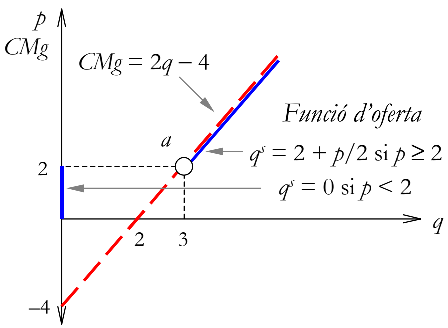


Fig. 1. Maximitzant benefici (productor preu acceptant)

Fig. 2. Funció d'oferta individual

EXEMPLE 9. La Fig. 1 permet il·lustrar les condicions de 1r i 2n ordre, on p^* és el preu que el productor pren com a donat i CMg és la funció de cost marginal del productor.

- La condició de 1r ordre diu que $CMg(q^*) = p^*$: si q^* maximitza π per a valors positius de q, la funció de cost marginal i la recta que representa el preu p^* s'intersecten a q^*.

- A la Fig. 1, el cost marginal és igual al preu als punts a i b. Quan $q = q_0$, l'ingrés marginal de q_0 (l'ingrés obtingut per l'última de les q_0 unitats) és p^*; en canvi, el cost marginal $CMg(q_0)$ de q_0 (el cost de produir l'última de les q_0 unitats) és inferior. Això significa que el benefici marginal de l'última unitat quan es venen q_0 unitats és positiu. Aquest benefici marginal positiu és senyal que el benefici augmentari produint una mica més, per exemple, fins a q_1.

- Quan $q = q_2$, l'última unitat produïda genera un benefici marginal negatiu (una pèrdua marginal), ja que el cost $CMg(q_2)$ d'aquesta unitat és superior al l'ingrés p^* obtingut de la seva venda. No produir aquesta darrera unitat augmentaria els beneficis, perquè s'evita la pèrdua $CMg(q_2) - p$ causada per l'última unitat.

- La condició de 2n ordre estableix que la funció de cost marginal ha de ser creixent en el valor de q que maximitzi beneficis. A la Fig. 1, això només passa al punt a: al punt b se satisfà la condició de 1r ordre però no la de 2n. <u>Al punt b no es maximitzen beneficis perquè cada unitat produïda a partir del punt b i fins al punt a genera un benefici positiu</u> (ja que cadascuna d'aquestes unitats es ven a un preu superior al seu cost de producció). Així, aturar la producció al punt b suposaria perdre tot el benefi representat per l'àrea entre la recta $p = p^*$ i la funció de cost marginal entre a i b.

DEFINICIÓ 10. La <u>funció d'oferta d'un productor preu acceptant</u> d'un bé és una regla que assigna a cada preu p del bé, la quantitat q^* que, donat p, maximitza la funció de beneficis π del productor. El valor $q^s(p)$ que la funció d'oferta assigna al preu p és la <u>quantitat oferta</u> a preu p pel productor.

PROPOSICIÓ 11. *Sigui $CMg(q)$ una funció de cost marginal creixent tal que, per a algun q, $CMg(q) > 0$. Aleshores, la <u>funció d'oferta d'un productor preu acceptant</u> és la funció $q^s(p)$ tal que*

$$q^s(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \frac{CV(q^*)}{q^*} \\ q^* & \text{si } p \geq \frac{CV(q^*)}{q^*} \end{cases}$$

on, per a cada p, q^* és l'unic valor de q tal que $p = CMg(q^*)$.

- *Demostració*. La Proposició 11 se segueix de les Remarques 6, 7 i 8.■

- La Proposició 11 diu que <u>la funció d'oferta d'un bé d'un productor preu acceptant s'obté de la funció de cost marginal del productor</u>. Per la condició de 2n ordre, aquella part on la funció de cost marginal decreixi no pot ser part de la funció d'oferta, perquè al tram decreixent d'una funció de cost marginal no podrem trobar el nivell de producció que maximitza beneficis. D'altra banda, la condició de tancament pot tornar a retallar la part de la funció de cost marginal que sigui funció d'oferta: <u>només el tram de la funció de cost marginal per damunt del punt més baix de la funció cost variable mitjà $\frac{CV(q)}{q}$ pot ser part de la funció d'oferta</u>.

EXEMPLE 12. Sigui, per a $q > 0$, $CV(q) = 9 + q^2 - 4q$. Per a $q = 0$, sigui $CV(0) = 0$. Quina és la funció d'oferta que s'obté d'aquesta funció de cost variable?

- La funció de cost marginal és, per a $q > 0$, $CMg(q) = 2q - 4$. Donat $p > 0$, hi ha un únic valor q^* que satisfà $p = CMg(q^*)$. Aquest valor s'obté d'aïllar q a $p = 2q - 4$. Així, $q^* = 2 + \frac{p}{2}$. La funció $CMg(q)$ satisfà les condicions de la Proposició 11: és creixent i, per a tot $q > 2$, $CMg(q) > 0$. Per la Proposició 11, la funció d'oferta és $q^s(p) = q^* = 2 + \frac{p}{2}$ si $p \geq 2$ i $q^s(p) = 0$ si $0 \leq p < 2$. La Fig. 2 representa gràficament aquesta funció.

- <u>Condició de 1r ordre</u>: $p = CMg(q^*)$. Atès que la funció de cost marginal és tant la derivada de la funció de cost total com de la funció de cost variable, $CMg(q) = 2q - 4$. D'aquí, $p = CMg(q)$ implica $p = 2q - 4$. Per tant, $q^* = 2 + \frac{p}{2}$ és el candidat a ser el valor de la funció d'oferta quan el preu és p.

- <u>Condició de 2n ordre</u>: $\frac{\partial CMg(q^*)}{\partial q} > 0$. La condició es compleix per a tot $q > 0$, atès que $CMg(q) = 2q - 4$ fa que $\frac{\partial CMg(q)}{\partial q} = 2 > 0$. De fet, la funció $CMg(q) = 2q - 4$ és creixent i, com a conseqüència, la seva derivada a qualssevol dels seus punts serà positiva.

- <u>Condició de tancament</u>: $\pi(q^*) \geq -CF$ o $I(q^*) \geq CV(q^*)$ o $p \geq \frac{CV(q^*)}{q^*}$. El candidat a funció d'oferta és $q^* = 2 + \frac{p}{2}$. Fent la inversa, $p = 2q^* - 4$. Com $I(q^*) = pq^* = (2q^* - 4)q^*$, $I(q^*) \geq CV(q^*)$ requereix $q^* \geq 3$. I com $q^* = 2 + \frac{p}{2}$, cal que $p \geq 2$. Així que tots els punts de la funció $q^* = 2 + \frac{p}{2}$ tals que $p \geq 2$ satisfan la condició de tancament.

- Per exemple, comprovem que el punt de $q^* = 2 + \frac{p}{2}$ tal que $p = 1$ no satisfà la condició de tancament. Si $p = 1$, $q^* = 2 + \frac{p}{2}$ fa que $q^* = \frac{5}{2}$. D'aquí, $\pi(\frac{5}{2}) = I(\frac{5}{2}) - CF - CV(\frac{5}{2}) = 1\cdot(\frac{5}{2}) - CF - (9 + \frac{25}{4} - 4\cdot\frac{5}{2}) = \frac{5}{2} - CF - \frac{21}{2} = -CF - \frac{11}{4} < -CF = \pi(0)$. Un preu $p = 1$ es massa baix com per a cobrir el cost variable mitjà (el cost efectiu de produir cada unitat) i, en conseqüència, quan $p = 1$, el benefici es maximitza no produint.

REMARCA 13. Una funció d'oferta individual (això és, una funció d'oferta d'un productor preu acceptant) serà <u>creixent</u> en la mesura que la funció de cost marginal del productor sigui creixent a partir d'un cert valor de la producció. <u>En essència, una funció d'oferta individual coincideix amb (el tram creixent d') una funció de cost marginal</u>.

- A l'Exemple 12, la funció d'oferta coincideix amb la funció de cost marginal per damunt del punt de tancament *a* de la Fig. 2: si el preu del bé és inferior al preu que correspon al punt *a*, el productor "tanca"i no produeix.

REMARCA 14. <u>Tot el que faci augmentar, per a cada volum de producció q, el cost marginal</u> de produir la quantitat q desplaçarà la funció de CMg a l'esquerra i, per tant, <u>desplaçarà la funció d'oferta individual (potser parcialment) a l'esquerra</u>.

REMARCA 15. <u>Tot el que faci reduir, per a cada volum de producció q, el cost marginal</u> de produir la quantitat q desplaçarà la funció de CMg a la dreta i, per tant, <u>desplaçarà la funció d'oferta individual (potser parcialment) a la dreta</u>.

- Tot desplaçament de la funció de cost marginal d'un productor preu acceptant desplaçarà la funció d'oferta del productor en el mateix sentit. Grosso modo, <u>esdeveniments "favorables" a la producció tendiran a desplaçar una funció d'oferta cap a la dreta i esdeveniments "desfavorables", cap a l'esquerra</u>.

- Atès que el cost fix no afecta el cost marginal, modificacions del cost fix no afecten la funció de CMg i, per tant, no afecten la funció d'oferta.

Exercicis de la Lliçó 1

1. Quina diferència hi ha entre cost fix i variable? Quina relació tenen amb el cost total?

2. Fes un esbós de la gràfica de les següents funcions de cost total i troba les corresponents funcions de cost marginal: (i) $C(q) = 3q + 6$; (ii) $C(q) = 3q^{1/3} + 6$; (iii) $C(q) = 3q^3 - 3$; (iv) $C(q) = q^2 + q$; (v) $C(q) = 3$.

3. Per a cada funció de cost total de l'Exercici 2: (i) construeix la funció de beneficis d'un productor preu acceptant; (ii) determina els volums de producció que satisfan la condició de 1r ordre de maximització de beneficis; i (iii) determina els volums de producciós que satisfan les condicions de 1r i 2n ordre i il·lustra gràficament com s'han obtingut aquests volums de producció.

4. Explica què és una funció de cost marginal i quina relació té amb una funció de cost total. Compara aquesta relació amb la que tenen una funció d'utilitat i la seva funció d'utilitat marginal.

5. Demostra que $\pi(q) \geq \pi(0)$ és equivalent a $pq \geq CV(q)$.

6. Per a cada funció de cost total de l'Exercici 2: (i) determina si la condició de tancament imposa alguna restricció; (ii) especifica les equacions que descriuen la funció d'oferta individual corresponent; (iii) representa gràficament cada funció d'oferta individual obtinguda; i (iv) obté la quantitat oferta si p = 1, si p = 2 i si p = 10.

7. Indica en quina direcció és previsible que els següents factors modifiquin una funció d'oferta individual d'un cert bé X i justifica la resposta.

(1) Reducció del nombre de productors d'X
(2) Reducció del nombre de consumidors d'X
(3) Augment del nombre de béns que són substitutius d'X en el consum
(4) Disminució del nombre de béns que són complementaris d'X en el consum
(5) Augment dels impostos que paguen els productors quan venen X
(6) Declarar il·legal la producció d'X
(7) Anunci que X perjudica la salut
(8) Augment del preu d'un recurs emprat en la producció d'X
(9) Descobriment d'una tecnologia de producció d'X que redueix el cost marginal
(10) Reducció del preu d'X
(11) Concedir una subvenció als productors d'X
(12) Millores en la organització de la producció
(13) La sortida de la meitat del productors i l'entrada de la meitat dels que surten
(14) Expectativa dels productors que el preu d'X es reduirà

8. (i) Per què $q^s = p$, $q^s = p + 2$ i $q^s = p - 2$ poden totes tres ser considerades funcions d'oferta? (ii) Representa-les gràficament. (iii) Indica quina és la quantitat oferta si el preu és 1 i quina és la variació de la quantitat oferta si el preu es duplica. (iv) Determina tots els punts de les funcions on l'ingrés seria 8. (v) Obté les funcions inverses d'oferta i representa-les gràficament.

9. Què fa que una funció d'oferta individual sigui creixent? Què significa que sigui creixent?

10. Obté la inversa de cadascuna de les següents funcions d'oferta: (i) $q^s = 100 + 5p$; (ii) $q^s = 10 + p/2$; (iii) $q^s = p^2$; (iv) $q^s = \ln 2p$; i (v) $q^s = 2p^{1/2}$.

11. Si la funció d'oferta d'un productor preu acceptant és creixent, què succeeix amb els beneficis del productor si el preu augmenta?

12. Si el preu és 10, determina la producció i els beneficis d'un productor preu acceptant amb funció d'oferta individual $q^s = p$. Fes el mateix si la funció d'oferta fos $q^s = p - 2$. I si el cost fix fos 10?

Lliçó 2. Funció d'oferta de mercat

DEFINICIÓ 1. La funció d'oferta de mercat d'un bé (tots els productors del qual són preu acceptants) és la suma de les funcions d'oferta individual dels productors del bé.

- Una funció d'oferta de mercat d'un bé és una regla que assigna, a cada preu p del bé, la quantitat total $Q^s(p)$ que, a preu p, ofereixen els productors del bé. Una funció d'oferta de mercat representa el pla agregat de venda de tots els productors: a cada p, quina és la quantitat oferta tota.

REMARCA 2. Si les funcions d'oferta individual de les que prové una funció d'oferta de mercat són creixents, aleshores la funció d'oferta de mercat també serà creixent.

REMARCA 3. El procés d'obtenció d'una funció d'oferta de mercat a partir de les funcions d'oferta individuals és anàleg al que se segueix per a obtenir una funció de demanda de mercat.

- Per exemple, a la Fig. 3 hi ha dos grups de productors, amb funcions d'oferta S_1 i S_2. Identifiquem, per a cada grup, el preu a partir del qual la quantitat oferta és positiva. Aquests preus (p_1 i p_2) són aquells on les funcions d'oferta tallen l'eix vertical. Ordenem els preus de més petit a més gran (a la Fig. 3, primer p_1 i després p_2). Per a preus inferiors a p_1, la quantitat oferta total és zero; per a preus entre p_1 i p_2, la quantitat oferta total coincideix amb la del grup del qual s'obté p_1; i per a preus superiors a p_2, la quantitat oferta total és la suma de la quantitat positiva oferta per cada grup.

- En concret, si S_1 és $q^s_1 = p - 1$ i S_2 és $q^s_2 = p/2 - 2$, resulta que $p_1 = 1$, que $p_2 = 4$ i que la funció d'oferta de mercat és tal que $Q^s = 0$ si $p < p_1 = 1$, $Q^s = q^s_1 = p - 1$ si $1 = p_1 < p < p_2 = 4$ i $Q^s = q^s_1 + q^s_2 = (p - 1) + (p/2 - 2) = 3p/2 - 3$ si $p \geq p_2 = 4$.

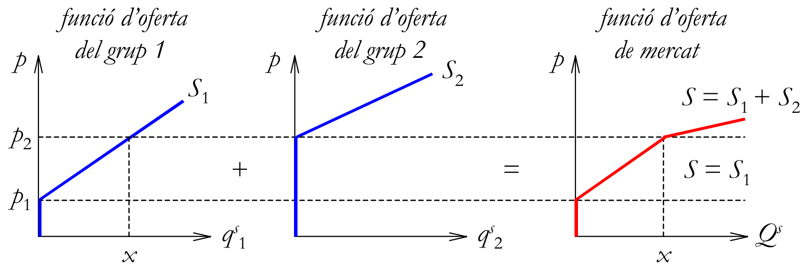


Fig. 3. Obtenció de la funció d'oferta de mercat

REMARCA 4. Tot factor que desplaci les funcions d'oferta individual en un mateix sentit, desplaçarà la funció d'oferta de mercat resultant en el mateix sentit.

- Una variable que afecta característicament a la funció d'oferta de mercat és el nombre de productors: un augment del nombre de productors desplaça la funció d'oferta de mercat (potser parcialment) cap a la dreta; i una reducció, cap a l'esquerra. Per exemple, a la Fig. 3, si inicialment només hi ha el grup 1, S_1 és la funció d'oferta de mercat. Però si s'incorpora el grup 2, la funció d'oferta de mercat passa a ser S.

DEFINICIÓ 5. L'elasticitat preu de l'oferta (sigui d'una funció d'oferta individual o de mercat) del punt $a = (p_0, q^s_0)$ al punt $b = (p_1, q^s_1)$ d'una funció d'oferta és

$$\underset{a\to b}{\varepsilon^s_p} = \frac{\dfrac{q^s_1 - q^s_0}{q^s_0}}{\dfrac{p_1 - p_0}{p_0}} = \frac{q^s_1 - q^s_0}{p_1 - p_0}\frac{p_0}{q^s_0} = \frac{\Delta q^s}{\Delta p}\frac{p_0}{q^s_0}.$$

- Atès que la funció d'oferta és generalment creixent, no s'altera el signe de l'elasticitat.

- L'elasticitat preu de l'oferta és una mesura de la <u>sensibilitat de la quantitat oferta a canvis en el preu</u>. Es parla d'"oferta elàstica" (quantitat oferta sensible a canvis en p) si $\varepsilon_p^s > 1$ i d'"oferta inelàstica" (quantitat oferta poc sensible a canvis en p) si $\varepsilon_p^s < 1$.

- L'elasticitat preu de l'oferta <u>a un punt</u> (p_0, q_0^s) seria $E_p^s = \dfrac{\partial q^s}{\partial p}\dfrac{p_0}{q_0^s}$.

Exercicis de la Lliçó 2

1. Explica què és la funció d'oferta individual d'un bé i en què es diferencia d'una funció d'oferta de mercat del mateix bé.

2. Indica en quina direcció és previsible que els factors de l'Exercici 7 de la Lliçó 1 modifiquin una funció d'oferta de mercat d'un cert bé X i justifica la resposta.

3. (i) Obté i representa gràficament la funció d'oferta de mercat si hi ha 50 productors idèntics, cadascun amb funció d'oferta individual $q^s = p - 1$. (ii) Quina és la quantitat total oferta i quina la quantitat oferta per cada productor si $p = 5$?

4. Obté la funció d'oferta de mercat si hi ha dos productors, un amb funció d'oferta $q^s = p - 10$ i l'altre amb funció inversa d'oferta $p = q^s - 10$.

5. Obté la funció d'oferta de mercat si hi ha 3 grups de productors, amb funcions d'oferta $q^s = p$, $q^s = p - 10$ i $q^s = p + 10$.

6. (i) Quina és l'elasticitat preu de l'oferta si el preu d'un bé ha disminuït un 10% i q^s ha disminuït un 50%? (ii) Si l'elasticitat preu de l'oferta és ½ i q^s ha augmentat un 5%, quina ha estat la variació del preu?

7. Sigui $a = (p, q^s) = (1, 2)$ i $b = (p, q^s) = (4, 4)$. Calcula l'elasticitat preu de l'oferta del punt a al punt b i compara-la amb l'elasticitat preu de l'oferta del punt b al punt a.

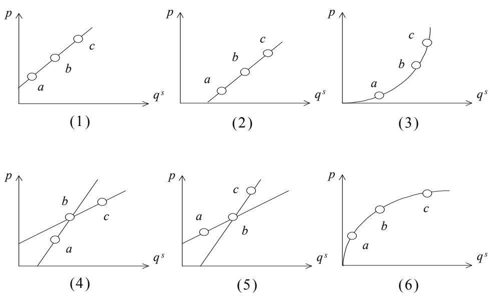
8. Què voldria dir que una elasticitat preu de l'oferta prengués un valor negatiu?

9. (i) Troba la funció d'oferta lineal que passa pels punts $(p, q^s) = (0, 0)$ i $(p, q^s) = (4, 8)$. (ii) Demostra que l'elasticitat entre dos punts (un dels quals no sigui (0, 0)) és sempre el mateix valor. (iii) Prova que el resultat anterior és cert per a totes les funcions d'oferta tals que $q^s = ap$, on a és una constant positiva.

10. (i) Troba dos punts sobre la funció d'oferta $q^s = p - 4$ on l'elasticitat preu de l'oferta d'un punt a l'altre sigui 1. (ii) Troba dos altres punts per als quals sigui 2.

11. Quina és l'equació d'una funció d'oferta lineal amb pendent 2 i que té elasticitat 2 al punt (p, q^s) on $p = 4$?

12. Ordena els següents punts en funció del valor de l'elasticitat preu de l'oferta a un punt.



Lliçó 3. Excedent del productor i excedent dels productors

REMARCA 1. En provenir d'una funció de cost marginal, l'<u>alçada d'una funció d'oferta individual</u> traçada sobre qualsevol quantitat q representa el cost de produir l'"última" de les q unitats. Per tant, aquesta alçada serà <u>el preu més baix que el productor exigirà</u> per a produir-la.

- En la mesura que el productor no produirà una determinada unitat del bé si el cost de produir-la és superior al preu que rep per la unitat, la diferència entre el preu del bé i el cost d'aquesta unitat serà zero o positiva (si aquesta diferència és positiva, el benefici obtingut per la unitat és positiu). La diferència entre el preu del bé i el cost d'una unitat és l'excedent del productor obtingut d'aquesta unitat. L'excedent del productor serà la suma d'excedents obtinguts de totes les unitats venudes.

DEFINICIÓ 2. L'excedent del productor $EP(p, q)$ d'un productor <u>quan produeix i ven la quantitat q al preu p</u> és la diferència $EP(p, q) = I(q) - CV(q)$ entre l'ingrés total pq obtingut de la venda de la quantitat q al preu p i el cost variable $CV(q)$ de produir la quantitat q.

- Com l'excedent del consumidor, <u>l'excedent del productor es mesura en unitats monetàries</u>.

- Quan la funció d'oferta (creixent) talla l'eix vertical, l'excedent del productor $EP(p^*, q^*)$ quan (p^*, q^*) és un punt de la funció d'oferta és l'àrea que queda per sota la recta horitzontal $p = p^*$, a la dreta de l'eix d'ordenades i per damunt de la funció d'oferta.

- Per exemple, a la Fig. 4, $EP(p^*, q^*)$ és l'àrea ombrejada *abe*. En provenir la funció d'oferta S d'una funció de cost marginal, l'àrea de polígon *bcde* representa el <u>cost variable</u> de produir q^*. D'altra banda, l'ingrés total quan es ven q^* a preu p^* és l'àrea del rectangle *abcd*. La diferència (l'àrea del triangle *abe*) entre ingrés i cost variable és l'excedent del productor quan ven q^* a preu p^*.

- L'excedent del productor és la suma d'excedents que obté de cada unitat. A la Fig. 4, per exemple, l'excedent per la primera unitat és la distància *ae* (diferència entre el preu *ad* i el cost de la primera unitat *de*). L'excedent de cada unitat és la diferència entre p^* (la distància *ad*) i l'alçada de la funció d'oferta traçada sobre aquella unitat.

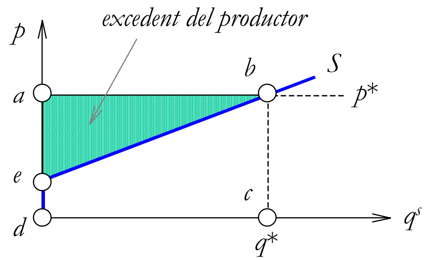


Fig. 4. Excedent del productor

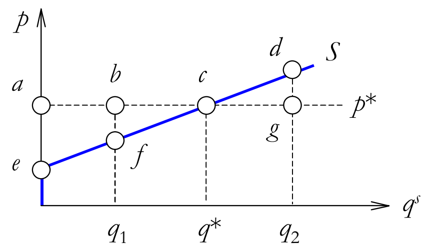


Fig. 5. Excedent fora de la funció d'oferta

EXEMPLE 3. Càlcul de l'excedent del productor a punts fora d'una funció d'oferta que talla l'eix vertical (això és, funcions que no tallen l'eix horitzontal o que el tallen a l'origen).

- A la Fig. 5, l'excedent del productor quan es produeix i ven la quantitat q_1 a preu p^* és l'àrea del polígon *abfe*. L'excedent quan es produeix i ven la quantitat q_2 a preu p^* és l'àrea del triangle *ace* menys l'àrea del triangle *cdg*. Cal restar la segona àrea perquè cada unitat més enllà de q^* genera un excedent negatiu, en vendre's cadascuna d'elles a un preu inferior al seu cost.

DEFINICIÓ 4. L'excedent dels productors és la suma dels excedents de cada productor.

- Quan la funció d'oferta de mercat talla l'eix d'ordenades, l'excedent dels productors a un punt (p, q) de la funció d'oferta de mercat el podem obtenir directament de la funció d'oferta de mercat de la mateixa manera que a la Fig. 4 o, alternativament, calculant a la funció d'oferta individual de cada productor el seu excedent al punt de la seva funció d'oferta on el preu és p i després sumant tots els excedents individuals. Per tant, l'excedent dels productors pot calcular-se directament a la funció d'oferta de mercat o sumant l'excedent de cada productor a la seva funció d'oferta individual.

- L'excedent d'un productor és una mesura del guany que el productor obté per vendre unitats del bé a un preu superior al cost de produir-la. L'excedent dels productors agrega els guanys de tots els productors.

EXEMPLE 5. Hi ha dos productors amb funcions d'oferta: (i) $q_1^s = 2p$; i (ii) $q_2^s = p - 2$ si $p > 2$ i $q_2^s = 0$ si $0 \leq p \leq 2$. Quin és l'excedent dels productors si cadascú ven la quantitat oferta a preu 6?

- A preu $p = 6$, el primer productor produeix i ven $q_1 = 2 \cdot 6 = 12$. Sabent que la funció d'oferta prové de la funció de cost marginal, $E_1(6, 12) = 6 \cdot 12 - CV(12) = 72 - \frac{12 \cdot 6}{2} = 36$. A preu $p = 6$, el segon productor produeix i ven $q_2 = 6 - 2 = 4$. Així, $E_2(6, 4) = 6 \cdot 4 - CV(4) = 24 - (\frac{4 \cdot 4}{2} + 4 \cdot 2) = 8$. L'excedent dels productors és 44.

- La funció d'oferta de mercat és $Q^s = q_1^s + q_2^s$. Quan $0 \leq p \leq 2$, $q_2^s = 0$; per això, $Q^s = q_1^s = 2p$ si $0 \leq p \leq 2$. I si $p > 2$, $Q^s = q_1^s + q_2^s = 2p + (p - 2) = 3p - 2$. Per tant, si $p = 6$, $Q^s = 16$. L'excedent al punt $(p, Q) = (6, 16)$ de la funció d'oferta de mercat és la suma de les àrees A, B i C de la Fig. 6: $\frac{4 \cdot 2}{2} + (6 - 2) \cdot 4 + \frac{(6-2)(16-4)}{2} = 4 + 16 + 24 = 44$.

PROPOSICIÓ 6. *Si una funció d'oferta és creixent i ella determina la quantitat produïda i venuda a un determinat preu, mentre la quantitat produïda sigui positiva:*

- *un augment en el preu causa un augment de l'excedent del productor (o productors); i*
- *una disminució en el preu causa una reducció de l'excedent del productor (o productors).*

- Si els canvis en l'excedent del(s) productor(s) són una mesura del seu benestar, la Proposició 6 diu que un augment del preu augmenta aquest benestar i una reducció del preu el disminueix.

EXEMPLE 7. Hi ha dos productors (o grups de productors), amb funcions d'oferta $q_1^s = 2p - 2$ i $q_2^s = p - 3$. La funció d'oferta de mercat S és: $Q^s(p) = 0$ si $0 \leq p < 1$; $Q^s(p) = 2p - 2$ si $1 \leq p < 3$; i $Q^s(p) = 3p - 5$ si $p \geq 3$. Si $p = 5$ i les funcions d'oferta determinen q, l'excedent del productor 1 és $\frac{8 \cdot 4}{2} = 16$ i el del productor 2 és 2. Segons la funció d'oferta de mercat, l'excedent dels productors quan $p = 5$ i $Q^s = 10$ és la suma de les àrees A, B i C de la Fig. 7: $4 + 8 + 6 = 18$.

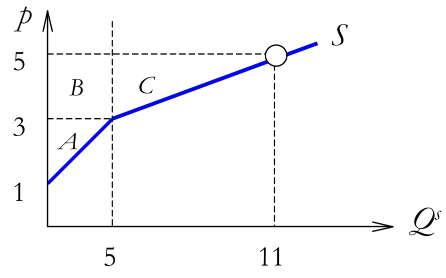


Fig. 6. Exemple 5

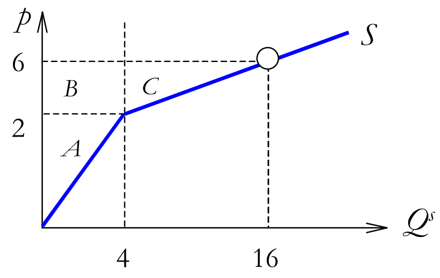


Fig. 7. Exemple 7

Exercicis de la Lliçó 3

1. Sigui p = 5 i la funció d'oferta de mercat $q^s = 2p - 4$. (i) Representa gràficament la variació de l'ingrés dels productors si el preu es triplica. (ii) Calcula l'excedent dels productors a tots dos casos.

2. Calcula l'excedent dels productors als punts $(p, q^s) = (4, 6)$ i $(p, q^s) = (4, 8)$ a les funcions d'oferta $q^s = 2p$ i $q^s = 2p - 1$.

3. Què és l'excedent d'un productor? I l'excedent dels productors? Què cal per a calcular-los?

4. Sobre quin punt de la funció d'oferta de mercat $q^s = p$ l'excedent dels productors és 16?

5. (i) Amb les dades de l'Exercici 5 de la Lliçó 2, determina l'excedent de cada productor si el preu és 10 i la quantitat és la que determina cada funció d'oferta. (ii) Obté, a partir dels resultats anteriors, l'excedent dels productors. (iii) Comprova que el valor obtingut coincideix amb l'excedent dels productors calculat directament sobre la funció d'oferta de mercat. (iv) Determina la variació d'excedent si p es duplica i si p es redueix a la meitat.

6. Si hi ha diferència, quina hi ha entre "benefici del productor" i "excedent del productor"?

Lliçó 4. Trets del mercat perfectament competitiu

REMARCA 1. Un mercat perfectament competitiu (també anomenat, simplement, mercat competitiu) té característiques comunes als altres mercats tractats fins ara. Les més destacades s'indiquen a continuació.

- Al mercat només s'intercanvia un bé. Considerar diferents béns implica considerar diferents mercats.

- El criteri per a identificar quin és el bé que defineix el mercat és el fet que una unitat del bé subministrada per un productor sigui indistingible d'una unitat subministrada per un altre productor. Tècnicament, es diu que el bé és homogeni: un cop tenim una unitat del bé, no hi ha manera d'esbrinar quin productor ha produït aquella unitat. Per tant, tots els productors venen el mateix bé.

- Tots els productors i tots els consumidors tenen informació completa sobre les condicions i el funcionament del mercat. Per tant, no hi ha ningú al mercat més ben informat que algú altre. Quan hi ha agents més ben informats que d'altres es parla de l'existència d'informació asimètrica (als mercats de segona mà, per exemple, el venedor està típicament més ben informat que el comprador de les característiques del bé).

- La mobilitat dels recursos productius és completa (els recursos poden ser desplaçats lliurement de produir qualssevol béns a produir aquest bé i a la inversa) i no hi ha cap restricció per a l'accés a tota tecnologia productiva que permeti produir el bé. Això significa que cap dels productors del bé no pot apropiar-se en exclusiva de l'ús de recursos i que cap productor del bé no té la possibilitat d'emprar en exclusiva una determinada tecnologia per a produir el bé: tots els productors del bé poden produir-lo, si ho desitgen, en les mateixes condicions (amb la mateixa estructura de costs) que qualsevol altre i tots tenen accés als recursos productius en les mateixes condicions.

- Productors i consumidors actuen i decideixen lliurement quina quantitat produir o comprar del bé.

- Cada productor és l'únic que rep els beneficis i assumeix els costs que genera la producció del bé i cada consumidor és l'únic que rep els beneficis i assumeix els costs del consum del bé. Això vol dir que ni la producció ni el consum del bé creen externalitats (també anomenades efectes externs): quan un productor produeix el bé o un consumidor el consumeix, no crea sobre altres agents beneficis o costs. Per exemple, un productor que, quan produeix el bé, genera simultàniament uns residus contaminants que aboca sobre un riu, sense pagar per l'abocament, crea una externalitat (en forma de costs externs) sobre els usuaris del riu (banyistes, pescadors, turistes). Un conductor que sotmet el seu cotxe a revisions periòdiques genera sobre la resta de conductors una externalitat (en forma de benefici extern), derivat del fet que, en conduir un cotxe en més bon estat, el conductor redueix la probabilitat de causar un accident.

DEFINICIÓ 2. Un mercat perfectament competitiu (o, simplement, mercat competitiu) es caracteritza pels trets de la Remarca 1 i pels trets distintivament propis següents.

- Cada productor i cada consumidor al mercat és preu acceptant (el fet que "preu acceptant" sigui sinònim de "competitiu" és el que explica el nom donat al mercat). És raonable suposar que un productor és preu acceptant quan la seva producció és "petita" en relació amb la producció total del bé, fet que es produeix si hi ha "molts" productors (de capacitat productiva relativament similar). També és raonable suposar que un consumidor és preu acceptant quan la seva quantitat adquirida és "petita" en relació amb la quantitat adquirida total del bé, fet que es produeix si hi ha "molts" consumidors (de capacitat adquisitiva relativament similar)

- En part com a conseqüència del fet que ningú al mercat no té capacitat de determinar el preu del bé, aquest preu serà únic: tothom compra i ven al mateix preu. Això no contradiu la pressumpció que cada productor fixa el preu a què ven el bé. Cada productor pot fixar el preu que vulgui, però essent insignificant el seu impacte en el mercat, és versemblant concloure que un productor que fixés un preu superior al de la resta de productors no vendria res, de forma que hauria d'establir un preu en línia amb la resta de productors (i perquè un productor, en aquestes mateixes condicions d'insignificància al mercat, no fixarà un preu inferior al preu dels demés?).

- Ni productors ni consumidors tenen barreres a l'entrada o la sortida del mercat. Per tant, qualsevol pot esdevenir productor o consumidor del bé (o deixar de ser-ho), lliurement i sense cap cost imputable a la decisió d'entrar o sortir.

REMARCA 3. En essència, un mercat competitiu representa aquell mercat on hi ha un relativament gran nombre de productors i consumidors, de forma que cap d'ells no té una influència significativa sobre el que succeeix al mercat.

DEFINICIÓ 4. A un mercat amb $n \geq 1$ productors on s_i és la quota de mercat del productor i (o proporció de la quantitat demandada que atén el productor i), l'índex de Herfindahl H és la suma dels quadrats de les quotes de mercats dels n productors, $H = (s_1)^2 + (s_2)^2 + \ldots + (s_n)^2$.

- L'índex de Herfindahl (o índex de Herfindahl-Hirschmann) a un mercat amb n productors és un número entre $1/n$ i 1.

- L'índex de Herfindahl és un indicador del grau de competència a un mercat. Com més alt sigui H, més concentrat es troba (menys competitiu és) el mercat: valors per damunt de 0'6 indiquen que el mercat és essencialment un monopoli; entre 0'2 i 0'6, que és un oligopoli; i per sota 0'2, que és bàsicament competitiu.

- L'expressió "poder de mercat" es refereix a la capacitat d'incidir sobre el preu de mercat. Un productor preu acceptant no té poder de mercat. Un monopolista té el màxim poder de mercat. La reducció de l'índex de Herfindahl suggereix una reducció del poder de mercat dels productors (un augment del grau de competència entre ells).

- Per exemple, l'índex de Herfindahl amb un productor és $H = 1$; amb dos productors amb, posem per cas, quotes 0'4 i 0'6 és $H = 0'16 + 0'36 = 0'52$; i amb $n \geq 1$ productors amb la mateixa quota de mercat és $H = 1/n$.

- El *Department of Justice* dels EUA considera que valors d'H entre 0'10 i 0'18 revelen un grau de concentració moderat i que valors d'H per damunt 0'18 revelen concentració. A http://www.unclaw.com/chin/teaching/antitrust/herfindahl.htm hi ha un calculador de l'índex de Herfindahl.

DEFINICIÓ 5. Atès que $H = 1/n$ quan hi ha n productors idèntics, la inversa $1/H$ de l'índex de Herfindahl s'anomena el nombre de productors equivalents a un mercat.

- Com a il·lustració, un mercat amb índex de Herfindahl $H = 0'25$ té el mateix índex que un mercat amb $1/H = 4$ productors idèntics ("idèntic" = "amb la mateixa quota de mercat"). En termes d'aquesta mesura de concentració, un mercat amb $H = 0'25$ és equivalent a un mercat amb 4 productors idèntics.

DEFINICIÓ 6. L'índex de Herfindahl normalitzat amb $n \geq 2$ productors és $H^* = \dfrac{H - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \dfrac{nH - 1}{n - 1}$, que és un número entre 0 i 1.

Exercici de la Lliçó 4

1. Què és l'índex de Herfindahl? Omple la següent taula, on (amb un màxim de 4 productors):

(i) s_i és la quota de mercat del productor i;

(ii) H és l'índex de Herfindahl;

(iii) H és l'índex de Herfindahl normalitzat; i*

(iv) n′ és el nombre de productors equivalents segons l'índex de Herfindahl.

s_1	s_2	s_3	s_4	H	H^*	n'
0'1	0'2	0'3	0'4			
0	0'4	0'6	0			
0	0	0	1			
0'3	0'3	0'4	0			
0'5	0'15	0'15	0'2			
0'05	0'45	0'45	0'05			
0'4	0'3	0'2	0'1			

Lliçó 5. Equilibri d'un mercat perfectament competitiu

DEFINICIÓ 1. L'expressió "funcions d'oferta i de demanda de mercat ben comportades" significa: (i) que la funció de demanda de mercat és contínua, és decreixent per a valors inferiors a un cert preu p_0 i pren valor zero per a tot preu $p \geq p_0$; i (ii) que la funció d'oferta de mercat és contínua, és creixent per a valors superiors a un cert preu $p_1 < p_0$ i pren valor zero per a tot preu $p \leq p_1$. La Fig. 10 mostra funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades.

- A un mercat competitiu: (i) la funció de demanda de mercat $Q^d(p)$ representa els consumidors i, específicament, els seus plans de compra; i (ii) la funció d'oferta de mercat $Q^s(p)$ representa els productors i, específicament, els seus plans de producció i venda.

- A un mercat competitiu, les funcions d'oferta i de demanda de mercat determinen el resultat de mercat, això és, el preu del bé i la quantitat total intercanviada del bé.

DEFINICIÓ 2. A un mercat competitiu, l'excés demanda a preu p és la diferència $Q^d(p) - Q^s(p)$.

- Si, a preu p, l'excés de demanda és positiu, es diu simplement que hi ha excés de demanda.

- Quan hi ha excés de demanda a preu p, la quantitat demandada total a preu p és més gran que la quantitat oferta total a preu p. Com a resultat, a preu p, no tots els consumidors poden comprar la quantitat que desitgen

DEFINICIÓ 3. A un mercat competitiu, l'excés d'oferta a preu p és la diferència $Q^s(p) - Q^d(p)$.

- Si, a preu p, l'excés d'oferta és positiu, es diu simplement que hi ha excés d'oferta.

- Quan hi ha excés d'oferta a preu p, la quantitat oferta total a preu p és més gran que la quantitat demandada total a preu p. Com a resultat, a preu p, no tots els productors poden vendre la quantitat que desitgen.

- Un excés de demanda negatiu es correspon amb un excés d'oferta positiu, ja que $Q^d(p) - Q^s(p) < 0$ implica $Q^s(p) - Q^d(p) > 0$. Un excés d'oferta negatiu es correspon amb un excés de demanda positiu, ja que $Q^s(p) - Q^p(p) < 0$ implica $Q^d(p) - Q^s(p) > 0$.

EXEMPLE 4. Sigui $Q^d = 12 - p$ la funció de demanda de mercat i $Q^s = 2p$ la funció d'oferta de mercat. Si $p = 5$, $Q^s(p) = 10 > Q^d(p) = 7$ i hi ha un excés d'oferta (positiu) igual a $Q^s(5) - Q^d(5) = 10 - 7 = 3$ o, de manera equivalent, un excés de demanda negatiu igual a $Q^d(5) - Q^s(5) = 7 - 10 = -3$. Si $p = 1$, $Q^d(p) = 11 > Q^s(p) = 2$ i hi ha un excés de demanda (positiu) igual a $Q^d(1) - Q^s(1) = 11 - 2 = 9$ o, equivalentment, un excés d'oferta negatiu igual a $Q^s(1) - Q^d(1) = 2 - 11 = -9$.

REMARCA 5. Les "forces de mercat". A un mercat competitiu: (i) si hi ha excés d'oferta el preu tendeix a reduir-se (Fig. 8); i (ii) si hi ha excés de demanda el preu tendeix a apujar-se (Fig. 9).

- Les forces de mercat resumeixen el funcionament d'un mercat competitiu en establir com s'ha de moure el preu per a eliminar un excés d'oferta (reducció de p) o de demanda (augment de p).

DEFINICIÓ 6. Un equilibri d'un mercat perfectament competitiu (o equilibri de mercat) és tot parell (p^*, q^*) tal que q^* (la quantitat d'equilibri) és tant la quantitat demandada total $Q^d(p^*)$ a preu p^* (el preu d'equilibri) com la quantitat oferta total $Q^s(p^*)$ a preu p^*.

- Que p^* sigui un preu d'equilibri significa que, a preu p^*, la quantitat demandada total coincideix amb la quantitat oferta total. També significa que, a preu p^*, tant l'excés de demanda com l'excés d'oferta són zero.

- Un equilibri de mercat és tot parell (p^*, q^*) tal que $q^* = Q^d(p^*)$ i no hi ha excés d'oferta a preu p^*; o bé tot parell (p^*, q^*) tal que $q^* = Q^s(p^*)$ i no hi ha excés de demanda a preu p^*.

- Geomètricament, tot equilibri de mercat es un punt d'intersecció entre la funció d'oferta de mercat i la funció de demanda de mercat.

- Tot equilibri de mercat és solució del sistema de tres equacions format per la funció d'oferta de mercat, la funció de demanda de mercat i la condició d'equilibri $Q^d = Q^s$.

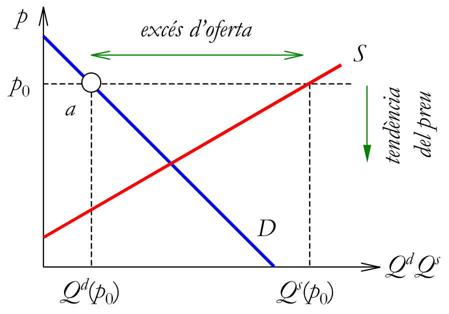


Fig. 8. Forces de mercat amb excés d'oferta

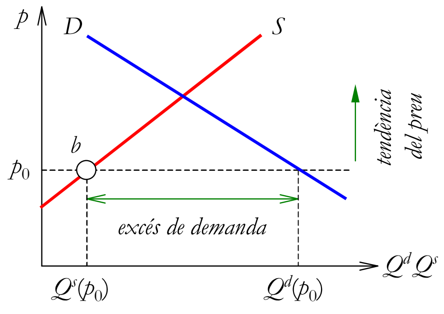


Fig. 9. Forces de mercat amb excés de demanda

PROPOSICIÓ 7. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, un mercat competitiu té un únic equilibri de mercat* (tal i com il·lustra la Fig. 10).

REMARCA 8. L'equilibri de mercat és la predicció sobre l'estat al qual, eventualment, arribarà un mercat competitiu: el preu d'equilibri p^* estableix el preu del bé al mercat i la quantitat intercanviada a preu p^* serà la quantitat d'equilibri q^*. L'equilibri de mercat és la predicció perquè les forces de mercat fan canviar el preu a tot estat del mercat que no sigui l'equilibri de mercat.

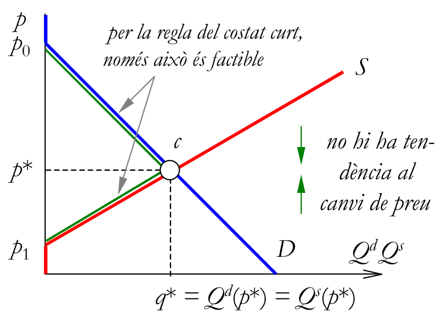


Fig. 10. Equilibri de mercat

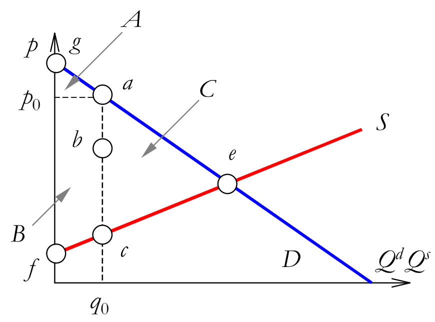


Fig. 11. Teorema de la mà invisible

REMARCA 9. Justificació 1 de l'equilibri de mercat. Quan és únic, l'equilibri de mercat és l'únic estat estable del mercat: si $Q^d(p) > Q^s(p)$, el valor de p augmenta; si $Q^s(p) > Q^d(p)$, el valor de p disminueix; i és nomes si $Q^s(p) = Q^d(p)$ que no hi ha tendència al canvi en p.

- Si tant productors com consumidors són preu acceptants, com es mou el preu de mercat a un mercat competitiu? L'economista francès Léon Walras (1834–1910, http://en.wikipedia.org/wiki/Walras, un altre pare de l'Economia Matemàtica) va suggerir recórrer a la ficció d'un subhastador: l'anomenat subhastador walrasià.

- El subhastador anuncia un preu p_0. A continuació, consumidors i productors fan saber quant volen comprar i vendre a preu p_0. Si hi ha excés d'oferta a preu p_0, el subhastador anuncia un preu p_1 inferior a p_0; i si hi ha excés de demanda, anuncia un preu p_1 superior a p_0. El subhastador aplica la mateixa regla amb p_1: si hi ha excés d'oferta, redueix el preu; i si hi ha excés de demanda, l'augmenta. I així successivament fins que anuncia un preu on no hi excés de demanda o d'oferta. És aleshores quan el subhastador permet que es realitzin els intercanvis.

- El procediment anterior s'anomena *tâtonnement* i acaba eventualment portant al preu d'equilibri amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades. El *tâtonnement* és un mecanisme de prova i error d'apropament a l'equilibri de mercat ("tâtonner" = anar a les palpentes). És un procés no realista de simulació d'un mercat competitiu, ja que assumeix que no hi ha intercanvi fins que $Q^d = Q^s$. Tot i que és una aproximació al funcionament de certs mercats (com ara la Borsa), contradiu l'esperit del model d'un mercat competitiu, ja que cal un mecanisme centralitzat (el subhastador) per a explicar com funciona un mercat competitiu, que és pretesament un mecanisme descentralitzat d'intercanvi.

- Més versemblant és la interpretació segons la qual cada productor fixa el preu, però el cost de fixar un preu diferent del preu dels demés és tan alt, que simplement cada productor accepta el preu que fixen els demés, de forma que tots fixen el mateix preu.

REMARCA 10. Justificació 2 de l'equilibri de mercat. El preu d'equilibri p^* és estable perquè cada agent aconsegueix el que desitja a preu p^*: atès que $Q^d(p^*) = Q^s(p^*)$, cada consumidor compra la quantitat que demanda a preu p^* i cada productor ven la quantitat que ofereix a preu p^*.

DEFINICIÓ 11. La regla del costat curt del mercat estableix que si el preu és p_0, la quantitat intercanviada al mercat és la més petita entre $Q^s(p_0)$ i $Q^d(p_0)$.

- Per a justificar aquesta regla, sigui p_0 el preu de mercat. Hi ha aleshores tres casos.

- Cas 1: $Q^s(p_0) > Q^d(p_0)$. La quantitat intercanviada serà $Q^d(p_0)$, ja que no es pot forçar els consumidors a comprar més del que desitgen a preu p_0. A la Fig. 8, si el preu és p_0, el punt *a* descriu la situació del mercat: preu de mercat p_0 i quantitat intercanviada al mercat $Q^d(p_0)$. Atès que, a preu p_0, hi ha excés d'oferta, p tendirà a disminuir al llarg de la funció de demanda de mercat.

➤ <u>Cas 2</u>: $Q^d(p_0) > Q^s(p_0)$. La quantitat intercanviada serà $Q^s(p_0)$, ja que no es pot forçar els productors a oferir més del que desitgen a preu p_0. A la Fig. 9, si el preu és p_0, el punt b descriu la situació del mercat: preu de mercat p_0 i quantitat intercanviada al mercat $Q^s(p_0)$. Atès que, a preu p_0, hi ha excés de demanda, p tendirà a augmentar al llarg de la funció d'oferta de mercat.

➤ $Q^d(p_0) = Q^s(p_0)$. La quantitat intercanviada serà tant $Q^s(p_0)$ com $Q^d(p_0)$. En ser p_0 un preu que fa que la quantitat demandada total a preu p_0 sigui igual a la quantitat oferta total a preu p_0, p_0 és un preu d'equilibri.

REMARCA 12. Comparació del monopoli amb la competència perfecta. Sigui $q^d = 120 - 2p$ la funció demanda de mercat i $C(q) = 100 + q^2$ la funció de cost total d'un monopolista.

➤ La Fig. 12 mostra que la solució de monopoli s'assoleix al punt b. <u>Si el monopolista es comportés com a productor competitiu</u>, la seva funció de CMg seria la funció d'oferta de mercat i c a la Fig. 12 seria l'equilibri de mercat. <u>En el pas de monopoli a competència, p disminueix i q augmenta</u>.

➤ Sigui el <u>cost social del monopoli</u> la diferència d'excedent total entre b (solució de monopoli) i c (competència perfecta). Aquest cost mesura la pèrdua de benestar social causada per la transformació d'un mercat competitiu en un monopoli.

➤ En competència, l'excedent dels consumidors és $EC_C = 144$ i l'excedent dels productors és $EP_C = 576$. En monopoli, l'excedent dels consumidors és $EC_M = 100$ i l'excedent de l'únic productor és $EP_M = 600$. Així, l'excedent total és $ET_C = EC_C + EP_C = 720$ en competència i és $ET_M = EC_M + EP_M = 700$ en el monopoli. El cost social del monopoli és la diferència $ET_C - ET_M = 20$: l'àrea del triangle abc a la Fig. 12.

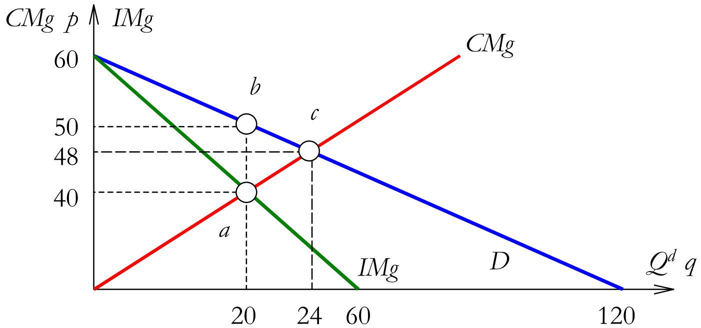


Fig. 12. Comparació entre les solucions de monopoli i competència perfecta

Exercicis de la Lliçó 5

1. (i) Què significa que, a un mercat competitiu, hi ha excés de demanda? (ii) Quin és l'excés de d'oferta i quin l'excés de demanda a l'equilibri de mercat? (iii) Quina és la tendència del preu si hi ha excés d'oferta? (iv) Partint d'un preu superior al d'equilibri, què succeeix amb l'excés d'oferta o de demanda si el preu s'apropa (sempre des de dalt) al preu d'equilibri?

2. En què consisteix un equilibri d'un mercat perfectament competitiu amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades? Per què l'equilibri de mercat determina el preu del bé? En particular, què passaria si el preu no fos el d'equilibri?

3. Tria funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades. Selecciona un preu que generi un excés de demanda i determina en quina direcció mourien el preu les "forces de mercat". Fes el mateix per a un preu que generi excés d'oferta.

4. Sigui un mercat competitiu amb funcions de demanda i oferta de mercat $Q^d = 12 - p$ i $Q^s = 2p$. (i) Representa gràficament les funcions. (ii) Calcula l'equilibri de mercat. (iii) Quin és l'excés d'oferta o de demanda si el preu és 2? (iv) I si el preu és 6? (v) Al dos casos anteriors, quina seria la quantitat intercanviada si el preu fos l'indicat? (vi) Troba el preu que fa que l'excés de demanda sigui 3. (vii) Troba el preu que fa que l'excés d'oferta sigui 3. (viii) Troba el preu que fa que no hi hagi excés d'oferta ni excés de demanda.

5. Amb les dades de l'Exercici 4, determina: (i) el preu que fa màxim l'excés d'oferta i el preu que el fa mínim; i (ii) el preu que fa màxim l'excés de demanda i el preu que el fa mínim.

6. <u>Ajustament walrasià</u> (via preu) <u>i ajustament marshal·lià</u> (via quantitat). Troba les inverses $p^d(Q)$ i $p^s(Q)$ de les funcions d'oferta i demanda de l'Exercici 4 i troba les seves inverses. Considera el següent mecanisme: donada una quantitat intercanviada Q, si $p^d(Q) > p^s(Q)$, llavors la quantitat intercanviada augmenta; i si $p^d(Q) < p^s(Q)$, la quantitat intercanviada disminueix. (i) Calcula $p^d(Q)$ i $p^s(Q)$ si q = 6, 7, 8 i 9, i indica què passa amb la quantitat intercanviada segons el mecanisme anterior. (ii) Analitza si el mecanisme porta a l'equilibri de mercat quan es parteix d'una quantitat diferent de la quantitat d'equilibri.

7. Analitza si el mecanisme de l'Exercici 6 fa que el preu i la quantitat d'equilibri s'apropin al preu i la quantitat d'equilibri quan les funcions d'oferta i demanda de mercat són totes dues creixents.

8. Analitza si el mecanisme de l'Exercici 6 fa que el preu i la quantitat d'equilibri s'apropin al preu i la quantitat d'equilibri quan les funcions d'oferta i demanda de mercat són totes dues decreixents.

9. Compara la solució de competència amb la de monopoli als Exercicis 2, 3, 4 i 6 de la Lliçó 3 del Tema 3.

10. Partint d'un preu inferior al d'equilibri, què li passa a l'excés d'oferta o de demanda si el preu s'apropa (sempre des de baix) al preu d'equilibri?

11. La funció de demanda de mercat pren la forma $Q^d = a - bp$ i la d'oferta, la forma $Q^s = cp$, on a, b i c són constants positives. En valor absolut, el pendent de la funció d'oferta és el doble del pendent de la funció de demanda. L'equilibri de mercat és $(p^*, Q^*) = (4, 8)$. Troba el valor d'a, b i c.

Lliçó 6. El Teorema de la mà invisible

REMARCA 1. Justificació 3 de l'equilibri de mercat. Propietat de benestar: la suma de l'excedent dels consumidors i l'excedent dels productors és màxima a l'equilibri de mercat.

PROPOSICIÓ 2. Teorema de la mà invisible. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, no hi ha cap parell (p, q) consistent amb la regla del costat curt del mercat on la suma de l'excedent dels consumidors i l'excedent dels productors sigui més gran que la suma d'aquests dos excedents a l'equilibri de mercat (p^*, q^*).

- *Demostració*. La Fig. 11 mostra un mercat competitiu amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades. La consistència amb la regla del costat curt significa que el mercat només pot trobar-se a un dels punts sobre la línia *feg* (això és, entre *e* i *f* o entre *e* i *g*, tots tres punts inclosos). Considerem un punt sobre aquesta línia diferent de l'equilibri de mercat *e*. Cas 1: el punt es troba sobre la línia *eg*. Sigui *a* aquest punt. Al punt *a*, l'àrea *A* representa l'excedent dels consumidors, l'àrea *B* l'excedent dels productors i $A + B$ la suma de tots dos excedents, que ès inferior a la suma $A + B + C$ d'aquests dos excedents a l'equilibri de mercat *e*. Cas 2: el punt es troba sobre la línia *ef*. Sigui *c* aquest punt. La suma d'excedents a *c* coincideix amb la suma d'excedents a *a* (i, de fet, a qualsevol punt entre *a* i *c*, com ara *b*). Això ens porta al cas 1.■

- Sigui $ET(p, q)$ la suma de l'excedent dels consumidors i l'excedent dels productors quan la quantitat q es produeix, es ven i es compra a preu p. Si (p^*, q^*) és l'únic equilibri de mercat, la Proposició 2 diu que, per a tot $(p, q) \neq (p^*, q^*)$, $ET(p^*, q^*) > ET(p, q)$. Si $ET(p, q)$ és una mesura del benestar col·lectiu de productors i consumidors degut a l'ús del mercat, la Proposició 2 diu que el benestar col·lectiu es maximitza a l'equilibri de mercat: cap altre estat del mercat no proporciona un benestar col·lectiu superior.

- La interpretació de la Proposició 2 és que cada consumidor i cada productor, actuant en el seu propi interès (uns maximitzant la seva utilitat i els altres la seva funció de beneficis), contribueixen a què el mercat arribi a un estat "satisfactori" des d'un punt de vista col·lectiu: és com si una "mà invisible" dirigís els comportaments egoistes de consumidors i productors cap a un "bé comú". Adam Smith ho digué així.

  ... [every individual] neither intends to promote the public interest, nor knows how much he is promoting it. By preferring the support of domestic to that of foreign industry, he intends only his own security; and by directing that industry in such a manner as its produce may be of the greatest value, he intends only his own gain, and he is in this, as in many other cases, led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention. […]. By pursuing his own interest he frequently promotes that of the society more effectually than when he really intends to promote it. *Wealth of Nations, llibre IV, capítol 2*
  http://www.adamsmith.org/smith/won/won-b4-c2.html

  It is not from the benevolence of the butcher, the brewer, or the baker that we expect our dinner, but from their regard to their own interest. *Wealth of Nations, llibre I, capítol 2*
  http://www.adamsmith.org/smith/won/won-b1-c2.html

EXEMPLE 3. Sigui $Q^d = 90 - 6p$ la funció de demanda de mercat i $Q^s = 3p$ la funció d'oferta de mercat. L'equilibri de mercat $(p^*, q^*) = (10, 30)$ s'obté resolent el següent sistema d'equacions.

(1) Funció de demanda de mercat	$Q^d = 90 - 6p$
(2) Funció d'oferta de mercat	$Q^s = 3p$
(3) Condició d'equilibri	$Q^d = Q^s$

- A l'equilibri de mercat, l'excedent dels consumidors és $30(15 - 10)/2 = 75$ i l'excedent dels productors és $10 \cdot 30/2 = 150$. Això dóna un excedent total de 225. Per a provar que l'excedent total és màxim a l'equilibri, considerem un preu $p_0 \geq p^* = 10$. Per la regla del costat curt, la quantitat intercanviada q_0 és la més petita entre $Q^d(p_0) = 90 - 6p_0$ i $Q^s(p_0) = 3p_0$. Atès que $p_0 \geq 10$, $Q^d(p_0) \leq 30$ i $Q^s(p_0) \geq 30$. D'aquí que hi hagi excés d'oferta igual a $Q^s(p_0) - Q^d(p_0) = 9p_0 - 90$ i que la quantitat intercanviada sigui $q_0 = Q^d(p_0) = 90 - 6p_0$.

- L'excedent dels consumidors és $\frac{(15 - p_0)q_0}{2}$. Sigui $p_1 = \frac{q_0}{3}$ el preu que fa que la quantitat oferta sigui q_0. L'excedent dels productors és $(p_0 - p_1)q_0 + \frac{p_1 q_0}{2} = q_0 \frac{2p_0 - p_1}{2}$. La suma dels dos excedents és $\frac{(15 + p_0 - p_1)q_0}{2}$. Atès que $p_1 = \frac{q_0}{3}$ i que $q_0 = 90 - 6p_0$, la suma d'excedents és $(3p_0 - 15)(45 - 3p_0) = 180p_0 - 9p_0^2 - 675$. Quin valor p_0 fa màxima la suma? Derivant i igualant a zero, resulta $18p_0 = 180$. D'aquí, $p_0 = 10$: el preu d'equilibri. Un raonament similar prova que $p_0 = 10$ maximitza la suma d'excedents si $p_0 \leq p^* = 10$.

Exercicis de la Lliçó 6

1. Sigui un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $Q^d = 12 - p$ i funció d'oferta de mercat $Q^s = 2p$. (i) Calcula l'excedent total a l'equilibri. (ii) Comprova que l'excedent total és inferior si el preu és una unitat superior al preu d'equilibri. (iii) Comprova que és inferior si el preu és una unitat inferior.

2. Amb les funcions de l'Exercici 1, demostra gràficament i analítica que l'excedent total és màxim a l'equilibri de mercat.

3. Al cas de l'Exercici 1, troba l'excés de demanda o d'oferta per a tot preu on l'excedent total és 21.

4. Sigui un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $Q^d = 12 - p$ i funció d'oferta de mercat $Q^s = 2p + 3$. (i) Representa gràficament les funcions. (ii) Determina l'equilibri de mercat. (iii) Calcula l'excedent total a l'equilibri de mercat.

5. Sigui un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $Q^d = 12 - p$ i funció d'oferta de mercat $Q^s = 2p - 3$. (i) Representa gràficament les funcions. (ii) Determina l'equilibri de mercat. (iii) Calcula l'excedent total a l'equilibri de mercat.

6. Amb les dades de l'Exercici 1, calcula l'efecte sobre l'equilibri de mercat i sobre l'excedent total dels següents esdeveniments. (i) Un clon de cada productor entra al mercat. (ii) Un clon de cada consumidor entra al mercat. (iii) Un clon de cada productor i de cada consumidor entren al mercat. (iv) A cadascun dels casos anteriors, indica si hi ha excés d'oferta o de demanda (i en quina quantia) al preu d'equilibri trobat a l'Exercici 1.

Lliçó 7. Modificacions de l'equilibri d'un mercat perfectament competitiu

REMARCA 1. Les funcions d'oferta i demanda de mercat determinen preu i quantitat intercanviada a un mercat competitiu. Per tant, tot canvi en el preu o la quantitat intercanviada només serà causat per canvis de la funció de demanda de mercat i/o de la funció d'oferta de mercat.

- Amb funcions ben comportades, les "lleis de l'oferta i la demanda" estableixen l'efecte qualitatiu sobre l'equilibri de mercat de canvis d'alguna de les funcions d'oferta o demanda de mercat (per "efecte qualitatiu" s'entén el sentit de canvi del preu i la quantitat d'equilibri: augmenten, disminueixen o queden igual preu i quantitat?).

PROPOSICIÓ 2. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, fixada la funció d'oferta de mercat, un desplaçament a la dreta [esquerra] de la funció de demanda de mercat provoca un augment [disminució] tant del preu d'equilibri com de la quantitat d'equilibri.*

- La Fig. 13 il·lustra la Proposició 2. El mercat es troba d'inici a l'equilibri a, on $p = p_0$ i $q = q_0$. Si la funció de demanda es mou a la dreta, al preu inicial p_0 hi ha ara (punt a') un excés de demanda. Per a eliminar l'excés, el preu puja fins a p_1. El nou equilibri s'assoleix al punt b. En el pas d'a a b, augmenten preu i quantitat intercanviada.

- La Proposició 2 no contradiu la "llei de la demanda" (preu i quantitat demandada es mouen en direccions oposades), ja que la funció de demanda s'ha modificat i l'equilibri es desplaça al llarg de la funció d'oferta (on la relació entre p i q és directa).

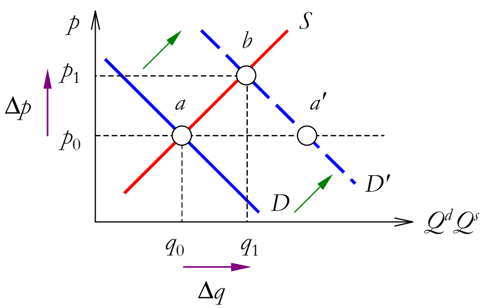


Fig. 13. Canvi de la funció de demanda de mercat

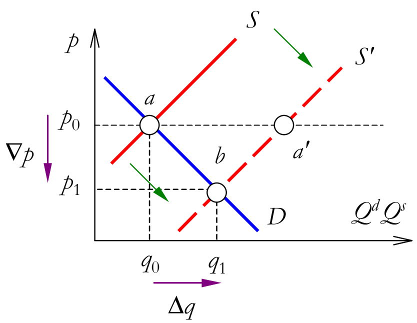


Fig. 14. Canvi de la funció d'oferta de mercat

PROPOSICIÓ 3. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, fixada la funció de demanda de mercat, un desplaçament a la dreta [esquerra] de la funció d'oferta de mercat provoca (si les funcions continuen essent ben comportades) una disminució [augment] del preu d'equilibri i un augment [disminució] de la quantitat d'equilibri.*

- La Fig. 14 il·lustra la Proposició 3. El mercat es troba d'inici a l'equilibri a, on $p = p_0$ i $q = q_0$. Si la funció d'oferta es mou a la dreta, al preu inicial p_0 hi ha ara (punt a') un excés d'oferta. Per a eliminar l'excés, el preu es redueix fins a p_1. El nou equilibri de mercat és al punt b. En el pas d'a a b, cau el preu i puja la quantitat intercanviada.

- La Proposició 3 no contradiu una possible "llei de l'oferta" (preu i quantitat oferta es mouen en el mateix sentit), atès que la funció d'oferta s'ha modificat i l'equilibri es desplaça al llarg de la funció de demanda (on la relació entre p i q és inversa).

REMARCA 4. No és sempre possible determinar el sentit de canvi de preu i quantitat d'equilibri quan les funcions d'oferta i demanda de mercat canvien simultàniament.

- A la Fig. 15, les dues funcions es desplacen alhora a la dreta. El resultat segur és que la quantitat d'equilibri augmenta, però l'efecte dels canvis de les funcions sobre el preu d'equilibri és indeterminat: pot arribar-se al punts b, c i d. El nou equilibri de mercat assolit depèn de la magnitud dels desplaçaments de les funcions.

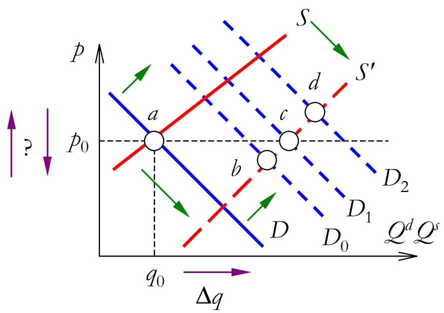


Fig. 15. Canvis simultanis de les funcions

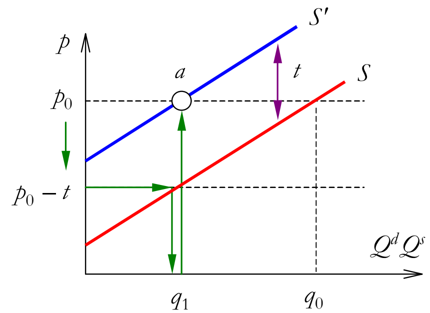


Fig. 16. Funció d'oferta i impost sobre la quantitat

Exercicis de la Lliçó 7

1. Amb les funcions de l'Exercici 1 de la Lliçó 6, en quant s'ha de modificar el 12 per tal que el nou preu d'equilibri sigui 6? La modificació causa un desplaçament a dreta o esquerra de la funció?

2. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, sigui (p, q*) l'equilibri de mercat. Indica quina funció de mercat s'ha desplaçat i en quina direcció si: (ii) p* ha augmentat; (ii) q* ha disminuït; (iii) p* ha disminuït i q* augmentat; (iv) p* i q* han augmentat; (v) p* i q* han disminuït; (vi) q* ha augmentat i p* no ha canviat; (vii) q* no ha canviat i p* ha disminuït.*

3. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, què passa amb l'equilibri de mercat si: (i) totes dues funcions es desplacen cap a la dreta; (ii) totes dues cap a l'esquerra; (iii) una cap a la dreta i l'altra cap a l'esquerra?

4. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, determina l'efecte sobre l'equilibri de mercat:
(i) de cada esdeveniment de l'Exercici 1 de la Lliçó 4 del Tema 2; i
(ii) de cada esdeveniment de l'Exercici 7 de la Lliçó 1.

Lliçó 8. Control de preus i quantitats a un mercat perfectament competitiu

DEFINICIÓ 1. L'establiment d'un preu mínim p^- significa que el preu de mercat no pot ser inferior a p^-: el preu de mercat serà p^- o serà un preu superior a p^-.

REMARCA 2. Sigui p^* el preu d'equilibri. Si s'estableix un preu mínim p^- tal que $p^* \geq p^-$ (preu d'equilibri no inferior al preu mínim) aleshores l'establiment del preu mínim p^- és una mesura inefectiva, ja que el preu d'equilibri compleix la restricció de preu mínim.

PROPOSICIÓ 3. *Sigui p^* el preu d'equilibri amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades. Establir un preu mínim p^- tal que $p^* < p^-$ és una mesura efectiva (ja que p^* no satisfà la restricció de preu mínim) que provoca els següents efectes (il·lustrats a les Figs. 17 i 18):*

- *al mercat hi ha excés d'oferta (atès que el mercat es troba al punt b);*
- *el preu de mercat és p^-, perquè p^- és el preu admissible que minimitza l'excés d'oferta;*
- *l'excedent dels consumidors és inferior al que obtenen quan p^* és el preu de mercat;*
- *en relació amb l'equilibri de mercat, hi ha una pèrdua d'excedent total (àrea C + E).*

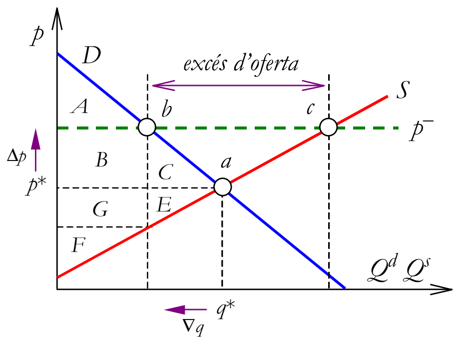


Fig. 17. Preu mínim superior al preu d'equilibri

	punt a	punt b	variació
EC	A + B + C	A	– B – C
EP	E + F + G	B + F + G	B – E
ET	A + B + C + E + F + G	A + B + F + G	– C – E

Fig. 18. Anàlisi d'excedents de la Fig. 17

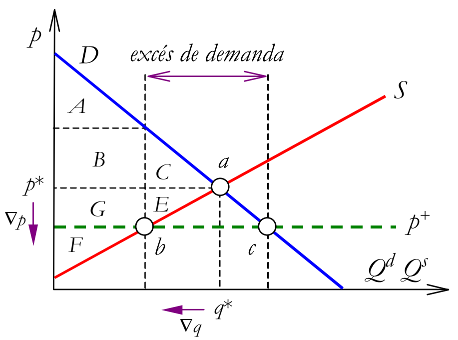


Fig. 19. Preu màxim inferior al preu d'equilibri

	punt a	punt b	variació
EC	A + B + C	A + B + G	G – C
EP	E + F + G	F	– E – G
ET	A + B + C + E + F + G	A + B + F + G	– C – E

Fig. 20. Anàlisi d'excedents de la Fig. 19

REMARCA 4. El preu de mercat és p^- quan $p^* < p^-$ perquè si el preu de mercat fos superior l'excés d'oferta provocaria una reducció del preu fins a p^-.

- A preu p^- no tots els productors troben compradors suficients per a vendre la seva producció. Què passa amb aquests productors? És previsible que formin la base d'un mercat negre, això és, un mercat lliure no controlat per cap autoritat pública i on no opera la restricció del preu mínim.

- El preu del bé al mercat negre seria inferior a p^- i probablement superior a p^*. Previsiblement, alguns dels consumidors del mercat "oficial" se n'aniran al negre.

DEFINICIÓ 5. L'establiment d'un preu màxim p^+ significa que el preu de mercat no pot ser superior a p^+: el preu de mercat serà p^+ o serà un preu inferior a p^+.

REMARCA 6. Sigui p^* el preu d'equilibri. Si s'estableix un preu màxim p^+ tal que $p^* \leq p^+$ (preu d'equilibri no superior al preu màxim) aleshores l'establiment del preu màxim p^+ és una mesura inefectiva, ja que el preu d'equilibri compleix la restricció de preu màxim.

PROPOSICIÓ 7. *Sigui p^* el preu d'equilibri amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades. Establir un preu màxim p^+ tal que $p^* > p^+$ és una mesura efectiva (ja que p^* no satisfà la restricció de preu màxim) que provoca els següents efectes (il·lustrats a les Figs. 19 i 20):*

- *al mercat hi ha excés de demanda (atès que el mercat es troba al punt b);*
- *el preu de mercat és p^+, perquè p^+ és el preu admissible que minimitza l'excés de demanda;*
- *l'excedent dels productors és inferior al que obtenen quan p^* és el preu de mercat;*
- *en relació amb l'equilibri de mercat, hi ha una pèrdua d'excedent total.*

REMARCA 8. El preu de mercat és p^+ quan $p^* > p^+$ perquè si el preu de mercat fos inferior a p^+ l'excés de demanda provocaria una augment del preu fins a p^+.

- A preu p^+ no tots els consumidors aconsegueixen comprar la quantitat que desitgen. Què passa amb aquests consumidors? L'existència de consumidors insatisfets incentivarà alguns productors a vendre'ls el bé a un mercat negre.

- El preu del bé al mercat negre seria superior a p^+ i probablement també superior a p^*. Alguns productors del mercat "oficial" previsiblement faran via cap al mercat negre atrets per un preu superior.

DEFINICIÓ 9. L'establiment d'una quota q^+ significa que q^+ és la quantitat màxima que es pot vendre al mercat: la quantitat intercanviada és q^+ o una quantitat inferior a q^+.

REMARCA 10. Sigui q^* la quantitat d'equilibri. Si s'estableix una quota q^+ tal que $q^* \leq q^+$ (quantitat d'equilibri no superior a la quota) aleshores l'establiment de la quota p^+ és una mesura inefectiva, ja que la quantitat d'equilibri compleix la restricció de la quota.

PROPOSICIÓ 11. *Sigui (p^*, q^*) l'equilibri de mercat amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades. Establir una quota q^+ tal que $q^* > q^+$ és una mesura efectiva (ja que q^* no satisfà la restricció que imposa la quota) que provoca els següents efectes (il·lustrats a les Figs. 21 i 22):*

- *al mercat hi ha excés d'oferta (atès que el mercat es troba al punt b);*
- *el preu de mercat és superior al preu d'equilibri p^*;*
- *l'excedent dels consumidors amb quota és inferior al seu excedent sense quota;*
- *en relació amb l'equilibri de mercat, hi ha una pèrdua d'excedent total (àrea C + E).*

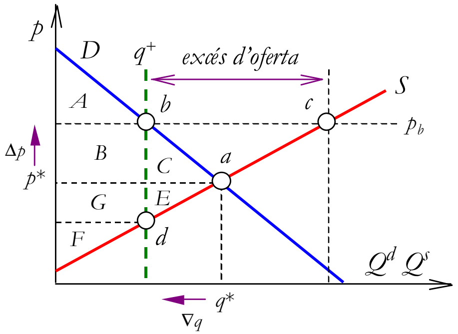


Fig. 21. Quota inferior a la quantitat d'equilibri

	punt a	punt b	variació
EC	$A + B + C$	A	$-B - C$
EP	$E + F + G$	$B + F + G$	$B - E$
ET	$A + B + C + E + F + G$	$A + B + F + G$	$-C - E$

Fig. 22. Anàlisi d'excedents de la Fig. 21

REMARCA 12. A la Fig. 21, el preu de mercat és el preu p_b que correspon al punt b perquè, per a preu superior al preu del punt d, s'entén que la quota és la quantitat oferta. Per tant, si p estigués entre p_b i p^*, hi hauria excés de demanda i el preu pujaria fins a p_b.

➤ Al preu p_b de la Fig. 21 no tots els productors poden vendre la quantitat que desitgen vendre. L'existència de productors insatisfets és previsible que generi un mercat negre on el preu seria inferior a p_b (i probablement superior a p^*). Això atreuria al mercat negre a part dels consumidors del mercat "oficial".

Exercicis de la Lliçó 8

1. Què és un "mercat negre"? Per què tendirà a sorgir un mercat negre si s'imposa un preu màxim inferior, o un mínim superior, al preu d'equilibri?

2. Sigui un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $Q^d = 12 - p$ i funció d'oferta de mercat $Q^s = 2p$. Determina l'efecte sobre el preu de mercat, la quantitat intercanviada i l'excedent total de fixar un preu: (i) mínim igual a 1; (ii) mínim igual a 7; (iii) mínim igual a 20; (iv) màxim igual a 1; (v) màxim igual a 7; (vi) màxim igual a 20; (vii) màxim igual a 0; (viii) màxim igual a 4; (ix) mínim igual a 4; (x) màxim i mínim igual a 4; (xi) màxim i mínim igual a 2.

3. Amb les funcions de l'Exercici 2, quin seria l'efecte sobre el preu de mercat, sobre la quantitat intercanviada i sobre l'excedent total d'una quota: (i) de 0 unitats; (ii) de 4 unitats; (iii) de 8 unitats; (iv) 12 unitats?

4. Amb les funcions de l'Exercici 2, quin és el preu màxim que fa que l'ingrés total dels productors sigui màxim? I quin és el preu mínim que fa que l'ingrés total dels productors sigui màxim?

5. Amb les funcions de l'Exercici 2, calcula: (i) el preu mínim que crea l'excés de demanda 3; (ii) el preu màxim que crea l'excés de demanda 3; (iii) el preu mínim que crea l'excés d'oferta 3; i (iv) el preu màxim que crea l'excés d'oferta 3.

6. Amb les funcions de l'Exercici 2, quin és l'efecte sobre preu i quantitat intercanviada d'establir: (i) un preu màxim de 8 i un preu mínim de 4; (ii) un preu màxim de 4 i un preu mínim de 8; (iii) un preu màxim de 10 i un preu mínim de 2; (iv) un preu màxim de 2 i un preu mínim de 6; (v) un preu màxim de 3 i un preu mínim de 2?

7. Partint de l'equilibri de mercat a l'Exercici 2: (i) quin preu màxim redueix l'excedent dels productors a la meitat?; (ii) quin preu màxim o mínim fa duplicar l'excedent dels consumidors?; (iii) quin preu mínim redueix l'excedent dels productors a la meitat?; (iv) quin preu màxim o mínim fa duplicar l'excedent dels productors?

8. Amb les funcions de l'Exercici 2, troba: (i) el preu mínim que fa que l'excedent total sigui 21; (ii) el preu mínim que fa que 18 sigui l'excedent dels consumidors; (iii) el preu mínim que fa que l'excedent dels productors sigui 4.

9. Amb les funcions de l'Exercici 2, quina quota faria que el preu fos 10 i quina que fos 4? Quin preu màxim o mínim aconseguiria el mateix?

10. (i) Què tenen en comú i què diferencia establir un preu màxim i establir una quota? (ii) I establir un preu mínim i una quota? (iii) I un preu mínim i un preu màxim?

11. Amb les funcions de l'exercici 2, explica com aconseguir que els productors dupliquin l'excedent que tenen a l'equilibri de mercat aplicant: (i) un preu màxim; (ii) un preu mínim; (iii) una quota; (iv) l'Estat intervé com a comprador; (v) l'Estat paga als productors l'import que fa duplicar l'excedent. Compara el cost financer per a l'Estat de cada mesura per a l'Estat i calcula la pèrdua d'excedent total que generen.

12. Amb les funcions de l'Exercici 2, l'Estat pretén garantir que els productors rebin el preu 8. Per a cadascuna de les següents polítiques, explica si és efectiva, estableix el cost financer per a l'Estat i calcula la pèrdua d'excedent total que provoquen.

(i) Establir un preu mínim igual a 8.
(ii) Establir un preu màxim igual a 8.
(iii) Comprar 12 unitats del bé a qualsevol preu.
(iv) Comprar 6 unitats del bé a qualsevol preu.
(v) Pagar als productors la diferència entre 8 i el preu d'equilibri per cada unitat produïda.
(vi) Comprar 6 unitats del bé a qualsevol preu i pagar als productors la diferència entre 8 i el preu d'equilibri (que resulta de la intervenció de l'Estat com a comprador) per cada unitat produïda.
(vii) Imposar una quota de 8 unitats.
(viii) Imposar una quota de 4 unitats.

13. A un mercat competitiu hi ha 100 productors, cadascun amb funció d'oferta $q^s = 2p$, i 1000 consumidors, cadascun amb funció de demanda $q^d = 12 - p$. S'imposa un preu màxim igual a 5. Això provoca que la meitat dels productors marxi del mercat. També se'n va la meitat dels consumidors. Aquestes dues meitats creen un mercat negre. (i) Determina el preu i la quantitat intercanviada al mercat "oficial" abans i després de la marxa de productors i consumidors i compara els resultats amb el preu i la quantitat intercanviada al mercat negre. (ii) Què passaria si se n'anés el 40% dels consumidors i el 80% dels productors?

Lliçó 9. Impost sobre la quantitat venuda a un mercat perfectament competitiu

DEFINICIÓ 1. Un <u>impost (unitari) sobre la quantitat venuda</u> és un nombre t d'unitats monetàries que consumidors o productors han de pagar a l'Estat per <u>cada unitat</u> venuda. S'assumirà que <u>els productors són legalment els responsables de fer el pagament</u>.

- Si l'obligació de pagar l'impost recau sobre els productors, l'establiment de l'impost afecta a la funció d'oferta de cada productor i, d'aquí, a la funció d'oferta de mercat.

REMARCA 2. Seguint la Fig. 16, sigui t l'impost per unitat de bé venuda. Ara, quan el preu del bé és, per exemple, p_0 cada productor no rep p_0 per unitat venuda sinó $p_0 - t$: el preu menys l'impost. Això fa que la quantitat oferta <u>ara</u> si $p = p_0$ sigui la quantitat oferta <u>abans</u> si $p = p_0 - t$.

- Un impost de t unitats monetàries per unitat venuda pagat pels productors <u>desplaça la funció d'oferta de cada productor</u> (i, en conseqüència, desplaça la funció d'oferta de mercat) <u>t unitats cap amunt</u>. L'equació de la nova funció d'oferta s'obté de la inicial reemplaçant "p" per "$p - t$".

- Per exemple, sigui $q^s(p) = 2p - 5$ una funció d'oferta. La quantitat oferta amb un impost t sobre la quantitat demandada quan $p = p_0 - t$ és $q^s(p_0 - t) = 2(p_0 - t) - 5$. Això equival a traslladar la funció paral·lelament cap amunt la quantia de l'impost.

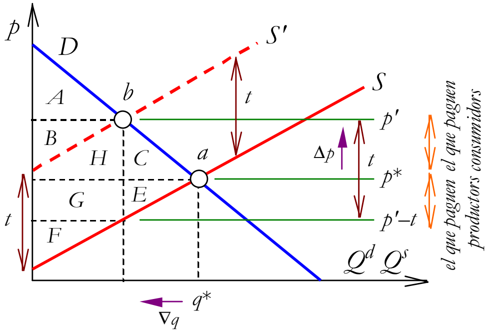


Fig. 23. Impost que paguen els productors

	punt a	punt b	variació
EC	$A + B + C + H$	A	$-B - C - H$
EP	$E + F + G$	F	$-G - E$
$Estat$		$B + G + H$	$B + G + H$
ET	$A + B + C + E + F + G + H$	$A + B + F + G + H$	$-C - E$

Fig. 24. Anàlisi d'excedents de la Fig. 23

PROPOSICIÓ 3. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, establir un <u>impost t per unitat venuda que han de pagar els productors</u> provoca els següents efectes (il·lustrats a les Figs. 23 i 24):*

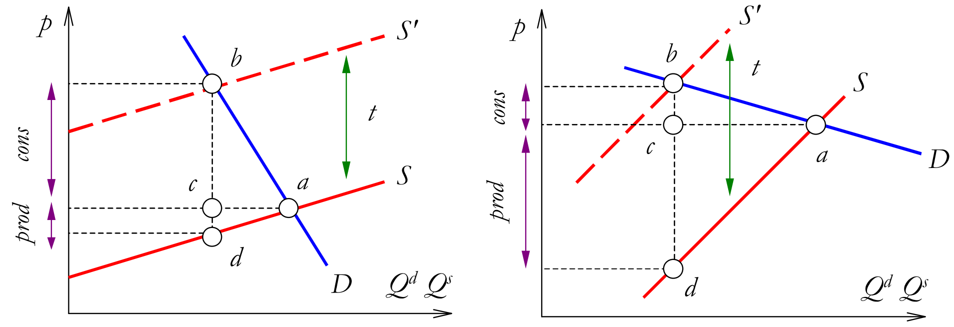
- *el <u>preu d'equilibri augmenta</u> (ja que l'equilibri de mercat passa d'a a b);*
- *la <u>quantitat d'equilibri disminueix</u>;*
- *tot i que el pagament el fan els productors, a la pràctica <u>els consumidors paguen una part</u>;*
- *l'excedent dels consumidors i el dels productors és <u>inferior</u> al que obtenen sense impost;*
- *en relació amb l'equilibri de mercat, hi ha una <u>pèrdua d'excedent total</u> (àrea C + E), on la recaptació de l'Estat (que fa d'excedent de l'Estat) s'inclou en el còmput de l'excedent total.*

EXEMPLE 4. Sigui $Q^d = 20 - p$ la funció de demanda de mercat i $Q^s = 2p - 10$ la funció d'oferta de mercat. Suposem que s'introdueix un impost de $t = 6$ unitats monetàries per unitat venuda del bé que paguen els productors.

- Abans de l'impost, l'equilibri de mercat és $(p^*, q^*) = (10, 10)$. L'excedent dels consumidors és 50; l'excedent dels productors és 25. La funció d'oferta de mercat amb impost és $Q^s = 2(p - 6) - 10 = 2p - 22$. El nou equilibri de mercat és $(p', q') = (14, 6)$.

- Tot i que l'obligació legal de pagar l'impost s'assumeix que recau sobre els productors, a la pràctica el pagament de l'impost es reparteix entre consumidors i productors. La part t_c de l'impost unitari t que, a la pràctica, <u>paguen consumidors</u> és $t_c = p' - p^* = 4$ (la variació del preu). La part t_p que, a la pràctica, <u>paguen productors</u> és $t_p = p^* - (p' - t) = 2$ (el preu que rebien abans menys el preu que, descomptant l'impost, reben ara).

- La <u>recaptació R de l'Estat</u> és $R = t \cdot q' = 6 \cdot 6 = 36$ (que seria l'àrea $B + G + H$ a la Fig. 23). La part R_c que paguen els consumidors és $R_c = t_c \cdot q' = 4 \cdot 6 = 24$ (àrea $B + H$). La part R_p que paguen els productors és $R_p = t_p \cdot q' = 2 \cdot 6 = 12$ (àrea G). L'excedent dels consumidors amb l'impost és 18 (àrea A), el dels productors és 9 (àrea F) i la pèrdua d'excedent total causada per l'impost és 12 (la suma de l'àrea $C = 8$ i l'àrea $E = 4$).



Figs. 25 i 26. Incidència d'un impost en relació amb el pendent de la funció de demanda

PROPOSICIÓ 5. Distribució de la càrrega impositiva. Amb funció de demanda de mercat tal que $Q^d = a - bp$ i funció d'oferta de mercat $Q^s = cp - d$, on a, b, c i d són constants positives, un impost de t unitats monetàries per unitat venuda pagat pels productors fa que el preu d'equilibri augmenti des de $p^* = \dfrac{a+d}{b+c}$ fins a $p' = \dfrac{a+d+ct}{b+c}$. La <u>part de l'impost t que acaben pagant els consumidors</u> és $t_c = p' - p^* = \dfrac{ct}{b+c}$ en tant que la <u>part de l'impost que paguen els productors</u> és $t_p = p^* - (p' - t) = \dfrac{bt}{b+c}$.

- Per la Proposició 5, com més gran sigui c en relació amb $b + c$, més petita serà la part de l'impost unitari t que recau sobre els productors. Això és, com més gran sigui el pendent c de la funció d'oferta de mercat en relació amb el valor absolut b del pendent de la funció de demanda de mercat, més capacitat tenen els productors de traslladar (la càrrega de) l'impost als consumidors.

- A la inversa, com més gran sigui b en relació amb $b + c$, més petita serà la part de l'impost unitari t que recau sobre els consumidors. Per tant, com més pendent (en valor absolut) tingui la funció de demanda, més capacitat tenen els consumidors d'evitar la càrrega de l'impost.

- Per exemple, a la Fig. 25, l'equilibri sense impost és a. Sigui t un impost unitari t que legalment han de pagar els productors, on t és la distància bd.

- La part que a la pràctica paguen els productors és la diferència entre el preu que efectivament reben ara (el preu corresponent al punt b menys l'impost t) i el preu que rebien abans de l'impost (el preu corresponent al punt a). Així, la part de t que paguen els productors és la distància cd.

- La part que a la pràctica paguen els consumidors és la diferència entre el preu que paguen ara (el preu corresponent al punt b) i el preu que pagaven abans de l'impost (el preu corresponent al punt a). Així, la part de t que paguen els consumidors és la distància bc.

- Les Figs. 25 i 26 mostren que com més plana sigui la funció de demanda de mercat (per a una funció d'oferta de mercat donada), més petita serà la part de l'impost t que efectivament paguin els consumidors: com més plana sigui la funció de demanda de mercat menys s'incrementarà el preu d'equilibri davant d'un desplaçament a l'esquerra de la funció d'oferta de mercat.

- De manera anàloga, com més plana sigui la funció d'oferta de mercat (per a una funció de demanda de mercat donada), més petita serà la part de l'impost que efectivament paguin els productors (fes la comprovació gràficament).

DEFINICIÓ 6. Una subvenció a la quantitat venuda és un determinat nombre d'unitats monetàries que l'Estat paga als productors per cada unitat que aquests venen.

- L'anàlisi d'aquest tipus de subvenció es basa en interpretar la subvenció com un impost sobre cada unitat venuda que és negatiu: una subvenció per unitat venuda pot interpretar-se com un impost negatiu per unitat venuda. Per consegüent, els resultats amb una subvenció són, a grans trets, els resultats oposats als d'un impost.

- Gràficament, si la subvenció és s, les funcions d'oferta individual i de mercat es desplacen paral·lelament s unitats avall i cada nova funció s'obté de l'antiga funció reemplaçant "p" per "$p + s$".

Exercicis de la Lliçó 9

1. Sigui un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $Q^d = 12 - p$ i funció d'oferta de mercat $Q^s = 2p$. (i) Determina com canvia l'equilibri de mercat si s'estableix un impost de 3 unitats monetàries per unitat venuda del bé que han de pagar els productors. (ii) Determina la distribució de la càrrega impositiva i la variació de l' excedent total, de l'excedent dels productors i de l'excedent dels consumidors.

2. Amb les funcions de l'Exercici 1, calcula: (i) l'impost sobre la quantitat pagat pels productors que rebaixaria la quantitat d'equilibri a zero; (ii) el que duplicaria el preu d'equilibri; (iii) el que reduiria la quantitat d'equilibri a la meitat.

3. Hi ha dos grups de productors, amb funcions d'oferta $q^s{}_1 = 2p$ i $q^s{}_2 = 2p - 2$. Determina la funció d'oferta de mercat inicial i la que s'obté quan el primer grup ha de pagar un impost d'1 unitat monetària per unitat venuda del bé i el segon grup ha de pagar un impost de 2 unitats monetàries per unitat venuda del bé.

4. Amb les funcions de l'Exercici 1, quin efecte sobre l'equilibri té una subvenció de 3 unitats monetàries per unitat venuda assignada als productors? Quina part d'aquesta subvenció es pot entendre que obtenen els consumidors?

5. Considera la funció de demanda de mercat $Q^d = 12 - p$ i dues possibles funcions d'oferta de mercat, $Q^s = 2p$ i $Q^s = p$. (i) Sense fer els càlculs, si s'imposa un impost sobre la quantitat que paguen els productors, amb quina funció d'oferta és més gran la càrrega de l'impost que recau sobre els productors? (ii) Si la funció d'oferta de mercat fos $Q^s = 2p$ i hi hagués dues possibles funcions de demanda de mercat, $Q^d = 12 - p$ i $Q^d = 12 - 2p$, amb quina funció de demanda és més gran la part de l'impost que recau sobre els productors?

6. Amb les funcions de l'Exercici 1, quin impost sobre la quantitat pagat pels productors fa que la recaptació impositiva de l'Estat sigui 24? Quina part del 24 paguen els consumidors?

7. Indica a una gràfica l'efecte sobre l'equilibri de mercat d'establir un impost sobre la quantitat pagat pels productors i la distribució de la càrrega de l'impost entre productors i consumidors. Fes el mateix en el cas d'una subvenció.

8. Sigui $Q^d = 12 - p$ la funció de demanda de mercat i $Q^s = 2p - 12$ la funció d'oferta de mercat, la qual incorpora l'impost $t = 6$ sobre cada unitat venuda. (i) Partint de la situació on hi ha l'impost, quin és l'efecte sobre l'equilibri de mercat i la recaptació impositiva de l'Estat si l'impost es redueix a la meitat? (ii) I si s'elimina?

9. Un mercat amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades és a l'equilibri (p^*, q^*). Explica quines mesures redueixen el preu de mercat.
(1) Establir un preu màxim superior a p^*.
(2) Establir un preu mínim superior a p^*.
(3) Establir un preu mínim inferior a p^*.
(4) Establir un preu màxim inferior a p^*.
(5) Establir una quota inferior a q^*.
(6) Establir una quota superior a q^*.
(7) Eliminar la meitat dels productors.
(8) Eliminar la meitat dels consumidors.
(9) Eliminar la meitat dels productors i la meitat dels consumidors.
(10) Garantir als productors un preu inferior a p^*.
(11) Que l'Estat entri al mercat com a comprador.
(12) Que l'Estat deixi de ser comprador al mercat.
(13) Que l'Estat deixi de ser productor al mercat.
(14) Que l'Estat entri al mercat com a productor.
(15) Reduir una subvenció a la quantitat venuda.
(16) Reduir un impost sobre la quantitat venuda pagat pels productors.

Apèndix

Lliçó 10. Problemes del mercat perfectament competitiu: externalitats

DEFINICIÓ 1. Una externalitat (efecte vessament o efecte extern) és tot efecte secundari d'una decisió presa per un agent, relativa al consum o la producció d'un bé, que: (i) afecta el benestar d'un altre agent; i (ii) no es reflecteix en el preu del bé (http://en.wikipedia.org/wiki/Externality).

- Una externalitat té lloc quan les accions o decisions d'un consumidor o productor d'un bé afecten els costs o beneficis d'un altre agent sense la intermediació dels preus.

- Tota externalitat (també anomenada cost extern o benefici extern) implica que algú diferent del consumidor o productor d'un bé comparteix, de manera involuntària, els beneficis o costs associats amb el consum o la producció bé.

DEFINICIÓ 2. Una externalitat és positiva si l'efecte secundari sobre el benestar d'altres agents és positiu: aquests agents comparteixen els beneficis associats amb el consum o la producció.

- Els qui es vacunen contra la grip a una facultat generen una externalitat positiva sobre tots els qui són a la facultat, perquè la seva vacunació redueix la probabilitat de tothom a la facultat de contraure la grip. Hi ha una externalitat perquè, a més, el preu de la vacuna no depèn dels efectes positius generats sobre els no vacunats (ni els no vacunats compensen als vacunats pels beneficis que reben dels vacunats).

- Els propietaris que tenen cura de les façanes dels seus habitatges generen una externalitat positiva sobre els vianants que gaudeixin contemplant façanes netes i en bones condicions, però els propietaris no cobren als vianants per gaudir de la façana. Si cobressin, l'externalitat s'hauria "internalitzat" (eliminat): només gaudiria de la façana qui paga per ella.

DEFINICIÓ 3. Una externalitat és negativa si l'efecte secundari sobre el benestar d'altres agents és negatiu: aquests agents comparteixen els costs associats amb el consum o la producció.

- Els qui no es vacunen contra la grip a una facultat generen una externalitat negativa sobre els qui sí ho fan, perquè el contacte dels vacunats amb els no vacunats augmenta la probabilitat dels vacunats de contraure la grip. Hi ha una externalitat perquè, a més, els no vacunats no compensen als vacunats per aquest perjudici potencial.

- Els avions generen una externalitat negativa, com a mínim en forma de contaminació acústica, als qui resideixen a prop d'un aeroport. Hi ha una externalitat perquè les companyies aèries no compensen els residents pels mals que els causen els avions: les companyies no consideren un cost que carreguen en el preu del bitllet el mal que produeixen els seus avions als residents. El mal pot ser molt superior a la molèstia acústica: els habitatges dels residents poden tenir un preu inferior al que tindria l'habitatge en un altre lloc justament per situar-se a prop d'un aeroport.

DEFINICIÓ 4. Les externalitats en el consum estan associades amb el consum dels béns i les externalitats en la producció estan associades amb la producció dels béns.

- Una externalitat de xarxa és un tipus d'externalitat causada pel fet que el benefici que obté un consumidor del consum d'un bé depèn del nombre de consumidors que tingui el bé. Per exemple, quan un comprador compra un telèfon mòbil beneficia a tots els qui ja el tenen, perquè poden comunicar-se a través del mòbil almenys amb una persona més. Les externalitats de xarxa són un exemple d'externalitat en el consum.

- Un exemple d'externalitat en la producció són les invencions no patentades: un productor de qualsevol bé pot fer servir la invenció en la producció del bé.

DEFINICIÓ 5. Un cost intern (o privat) associat amb una acció o decisió és aquell que té en compte l'agent que pren l'acció o decisió. Un cost extern associat amb una acció o decisió és tot aquell cost que no té en compte (ni, per tant, assumeix) l'agent que pren l'acció o decisió.

- Considerem un productor que produeix un cert bé i genera, com a subproducte, emissions tòxiques. Si no hi ha cap normativa sobre les emissions, els costs de producció del bé seran típicament costs interns per al productor: salaris dels treballadors, despesa en matèries primeres, interessos de crèdits, despeses de manteniment de les instal·lacions productives… En canvi, en la mesura que el productor no hagi de compensar pel mal que provoquen les emissions sobre la població o no hagi d'adaptar la seva tecnologia productiva per tal de reduir o eliminar les emissions, els costs que causin les emissions sobre la població seran costs externs de la producció del bé per al productor.

- Quan algú es connecta a Internet, assumeix com a cost intern el preu de l'equip informàtic, el preu de l'energia elèctrica i el preu de la connexió a Internet: són costs que directament afecten i assumeix qui es connecta. Per contra, si quan aquest algú es connecta no té en compte la seva contribució a la saturació del servei a determinades planes web, la congestió (i la consegüent reducció en la velocitat de transmissió de dades) són un cost extern per a algú altre que es connecti. Un exemple similar el proporciona la decisió de conduir el cotxe a determinades hores i la contribució d'aquesta decisió a generar o agreujar un embús de trànsit o a augmentar la probabilitat que tingui lloc un accident de trànsit.

DEFINICIÓ 6. El cost social associat amb una acció o decisió és la suma del cost privat i del cost extern de l'acció o decisió.

DEFINICIÓ 7. Un benefici intern (o privat) associat amb una acció o decisió és aquell que recau sobre l'agent que pren l'acció o decisió. Un benefici extern associat amb una acció o decisió és tot aquell benefici recau sobre agents diferents de l'agent que pren l'acció o decisió.

DEFINICIÓ 8. El benefici social associat amb una acció o decisió és la suma del benefici privat i del benefici extern de l'acció o decisió.

REMARCA 9. El problema que crea un externalitat a un mercat competitiu. El preu d'un bé a un mercat competitiu tendeix a veure's afectat només pels costs privats de producció del bé i pels beneficis privats del consum del bé. Com a conseqüència, el preu de mercat d'un bé no necessàriament captura tots els beneficis o costs socials associats amb el bé.

- Si els costs o beneficis externs de producció o consum del bé es tinguessin en compte en el procés de determinació del preu del bé, les externalitats en la producció o el consum s'haurien internalitzat i deixarien d'existir.

- La presència d'externalitats en la producció i/o consum d'un bé significa que no són els costs o beneficis socials els qui determinen el preu del bé, sinó els costs o beneficis privats. Aquest fet invalida el Teorema de la mà invisible: la solució de mercat no necessàriament maximitza la suma d'excedents. Per a maximitzar la suma d'excedents, la funció d'oferta s'ha de construir incorporant tots els costs de producció, tant els directament assumits pels productors (costs privats) com els assumits per la resta de la població involuntàriament (costs externs).

REMARCA 10. Solucions per al problema que crea un externalitat a un mercat competitiu. Totes les solucions passen per internalitzar l'externalitat: que els costs o beneficis externs siguin tinguts en compte. Generalment, cal una autoritat pública ("l'Estat") que imposi la internalització:

- de manera directa, mitjançant imposts, subvencions o quotes de producció; o
- de manera indirecta, mitjançant l'assignació de drets de propietat sobre els béns afectats per les externalitats (com l'aire o els dominis d'ús públic), la creació de mercats d'externalitats (mercats dels drets d'emissió) o el disseny de mecanismes per a incentivar la internalització de les externalitats (un exemple de disseny de mecanismes a la Lliçó 12).

REMARCA 11. Al mercat competitiu d'un bé, l'alçada de la funció d'oferta de mercat del bé pot interpretar-se com el cost marginal privat (per a les empreses del mercat) de produir el bé.

- L'existència d'una externalitat en la producció del bé es manifesta en el fet que el cost marginal privat de produir el bé no coincideix amb el cost marginal social de produir-lo (el cost de producció del bé que recau sobre tota la societat, no només les empreses que el produeixen).

DEFINICIÓ 12. La funció de cost marginal extern de producció d'un bé és la funció que determina, per a cada nivell q de producció del bé, quin és el cost extern (la mesura de l'externalitat) causat per l'última de les q unitats produïdes.

DEFINICIÓ 13. Al mercat competitiu d'un bé, la funció de cost marginal social de producció d'un bé és la suma de la funció de cost marginal privat de producció del bé (la funció d'oferta de mercat del bé) més la funció de cost marginal extern de producció del bé.

EXEMPLE 14. Al mercat competitiu d'un cert bé hi ha 100 productors idèntics. Cada productor i té la funció de cost $C_i(q_i) = 200q_i^2$, on q_i és la producció que fa el productor i. La funció de

demanda de mercat és $Q^d = 70 - p$. La producció del bé genera un cost extern que no assumeixen els productors. La funció $e(Q) = Q^2$ captura l'externalitat: produir la quantitat total Q genera un cost extern, mesurat en unitats monetàries, de Q^2.

- Per exemple, si els productors contaminen l'aire, $e(Q)$ mesura els perjudicis que la contaminació causa a la població: despeses en malalties respiratòries, reducció del valor dels habitatges a prop d'on es realitza la contaminació, reducció de l'esperança de vida, costs de canvis de residència, patiment per l'estat en què queda el medi ambient, afectació per la reducció de la qualitat de vida de generacions futures…

- L'equilibri de mercat el determina la intersecció de les funcions d'oferta i demanda de mercat. La funció d'oferta de cada productor s'obté de la condició $CMg = p$. Essent $CMg = 400q$ la funció de cost marginal de cada productor, la funció d'oferta de cada productor és $q^s = \dfrac{p}{400}$. Atès que hi ha 100 productors, la funció d'oferta de mercat és $Q^s = 100q^s = 100\dfrac{p}{400} = \dfrac{p}{4}$. L'equilibri de mercat (Fig. 27) és $(p^*, q^*) = (56, 14)$.

- La funció d'oferta de mercat pot interpretar-se que captura el cost marginal privat CMg^P de produir el bé. Per tant, fent $p = CMg^P$ a la funció d'oferta de mercat $Q^s = \dfrac{p}{4}$, resulta la funció de cost marginal privat $CMg^P = 4Q$, representada a la Fig. 27. Però una solució raonable des del punt de vista social exigeix que el preu de mercat inclogui tots els costs marginals, no només els privats. A la Fig. 27, la funció $CMg^E = 2Q$ és la funció de cost marginal extern: com varia el cost extern (l'externalitat) a mesura que varia la producció. La funció de cost marginal social CMg^S és la suma $CMg^S = CMg^P + CMg^E = 4Q + 2Q = 6Q$ de les funcions de cost marginal privat i extern.

- Què passaria si tots els costs de producció del bé determinessin el preu de mercat i no només el costs privats? Aleshores buscaríem la intersecció de la funció de demanda de mercat amb la funció de cost marginal social. Les equacions per a calcular aquesta nova solució serien: (i) la funció de demanda de mercat $p = 70 - Q$; (ii) la funció de cost marginal social $CMg^S = 6Q$; i (iii) la condició $p = CMg^P + CMg^E$, que equival a $p = CMg^S$. El resultat és el punt de la funció de demanda de mercat $(p^{**}, q^{**}) = (60, 10)$.

- La Fig. 28 mostra que l'excedent total al punt $b = (p^{**}, q^{**})$ de la Fig. 27 és superior a l'excedent total a l'equilibri de mercat $a = (p^*, q^*)$. Això demostra que, en presència d'externalitats, l'equilibri de mercat no maximitza la suma d'excedents i, com a conseqüència, la presència d'externalitats pot invalidar el Teorema de la mà invisible.

- Com es pot portar al mercat d'a a b? Una forma és mitjançant imposts. S'anomena impost pigouvià aquell impost adreçat a la internalització d'una externalitat negativa. A l'exemple considerat, l'impost pigouvià t sobre la quantitat venuda que portés l'equilibri de mercat del punt $a = (p^*, q^*) = (56, 14)$ al punt $b = (p^{**}, q^{**}) = (60, 10)$ de la Fig. 27 seria aquell que transformés la funció (inversa) d'oferta de mercat inicial $p = 4Q$

en la nova funció (inversa) d'oferta $p - t = 4Q$ tal que $(p, q) = (60, 10)$ fos un punt de la nova funció. Per tant, t satisfà $60 - t = 4 \cdot 10$. D'aquí, $t = 20$: exigint els productors que paguin 20 unitats monetàries per unitat venuda del bé, la producció assoleix el nivell $q^{**} = 10$ que internalitza les externalitat i que marca el punt b.

- <u>L'impost obtingut $t = 20$ coincideix amb el valor de la funció de cost marginal extern $CMg^E = 2Q$ quan Q assoleix el nivell desitjat</u> $q^{**} = 10$: CMg^E quan $Q = 10$ és $CMg^E = 2 \cdot 10 = 20$.

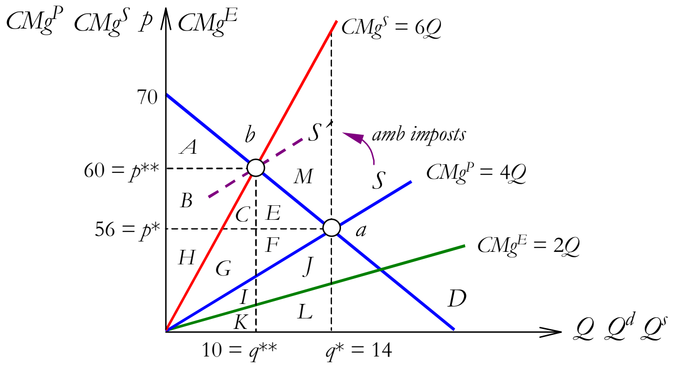


Fig. 27. Un mercat competitiu amb una externalitat negativa

	Al punt $a = (p^*, q^*)$	Al punt $b = (p^{**}, q^{**})$	Diferència
Excedent dels consumidors	$A + B + C + E$	A	$-B - C - E$
Excedent dels productors	$F + G + H$	$B + C + G + H$	$B + C - F$
Cost extern	$-C - E - F - G - M$	$-C - G$	$E + F + M$
Excedent total	$A + B + H - M$	$A + B + H$	M

Fig. 28. Còmput d'excedents al mercat de la Fig. 27

- El nivell de producció $q^{**} = 10$ també pot assolir-se establint q^{**} com a <u>quota de producció</u>: limitant el nivell de producció es limitaria el nivell d'externalitat. Si l'externalitat pot mesurar-se amb precisió i hi ha una relació acurada i coneguda entre la producció i l'externalitat (la funció CMg^E), pot establir-se com a límit la quantitat d'externalitat que correspon al volum de producció q^{**}. Aquest límit es podria regular mitjançant permisos per a generar l'externalitat que podrien comprar-se i vendre's (per exemple, permisos d'emissió de gasos contaminants, com ara el diòxid de sofre SO_2, el monòxid de carboni CO o el diòxid de nitrogen NO_2; a Espanya, el Reail Decret 1866/2004 aprova el Pla Nacional d'Assignació de Drets d'Emissió).

Exercici de la Lliçó 10

1. Calcula numèricament tots els excedents de la Fig. 27.

Lliçó 11. Problemes del mercat perfectament competitiu: informació asimètrica

REMARCA 1. El Premi Nobel d'Economia del 2001 va ser lliurat als economistes George Akerlof, Michael Spence i Joseph E. Stiglitz per les seves anàlisis sobre els mercats amb informació asimètrica, això és, <u>mercats on la informació sobre els béns o els agents del mercat no és completa</u> (hi ha agents més ben informats que d'altres). Dos problemes generats per l'existència d'informació asimètrica són la selecció adversa i el risc moral.

DEFINICIÓ 2. Hi ha <u>risc moral</u> a una relació econòmica entre dues parts quan una de les parts té incentiu a aprofitar-se de l'altra part mitjançant una acció oculta.

- En la contractació d'assegurances, el <u>risc moral</u> es manifesta en el fet que la cobertura d'una persona contra una pèrdua augmenta el risc que la persona prengui <u>accions que contribueixen a que la pèrdua es produeixi</u>: qui s'assegura exerceix menys cura de la que exerciria sense assegurança.

- Per exemple, una assegurança contra incendis pot donar incentius a calar foc a l'immoble assegurat o, com a mínim, a no adoptar les precaucions més bàsiques per a evitar un incendi. Una assegurança contra accidents de cotxe pot induir a tenir menys cura de l'estat del cotxe i així contribuir a tenir un accident.

- Un altre exemple: si un govern anuncia que es compromet a retornar tots els dipòsits fets per clients d'un banc que faci fallida, el risc moral es manifesta en l'augment de la probabilitat que els bancs gestionin els dipòsits imprudentment, d'on resulta més probable que el govern hagi d'intervenir al rescat de bancs que fan fallida. Darrer exemple: si el professor d'una assignatura diu que aprovarà tots els estudiants sense fer cap examen per tal que els estudiants puguin estudiar sense pressió i amb calma, els estudiants tenen menys incentius a estudiar l'assignatura.

- El risc moral està associat amb l'existència d'alguna <u>acció oculta</u>. Al cas d'una l'assegurança, un cop feta l'assegurança, la companyia asseguradora no pot controlar tot el que fa l'assegurat, qui pot dur a terme accions que afectin negativament els beneficis de la companyia. En canvi, la selecció adversa està associada amb l'existència d'alguna <u>característica oculta</u>.

DEFINICIÓ 3. Hi ha <u>selecció adversa</u> (o antiselecció o selecció negativa) a una relació econòmica entre dues parts quan una de les parts té incentiu a aprofitar-se de l'altra part mitjançant un tret o característica de la primera part que la primera part coneix però que la segona part ignora.

- A un mercat, la selecció adversa es manifesta típicament en el fet que els béns de menys qualitat expulsen del mercat als béns de més qualitat.

- Per exemple, considerem una assegurança de vida. Des del moment que la companyia asseguradora no pot determinar si el demandant de l'assegurança té bona o mala salut, ha d'establir la mateixa prima per a tots dos grups, el grup de bona i el grup de mala salut. Aquesta prima tendirà a ser superior a la prima que tindrien els de bona salut si se'ls pogués identificat, fet que contribueix a expulsar del mercat d'assegurances als demandants amb bona salut. Així, el demandants menys profitosos per a la companyia (els de mala salut) tendeixen a fer fora del mercat als demandants més profitosos (els de bona salut). Això fa que els de mala salut hagin estat els demandants adversament seleccionats (o antiseleccionats) pel mercat: el mercat selecciona el tipus de demandant menys favorable per a la companyia. Si a la llarga només hi ha demandants amb mala salut, és molt probable que a la companyia no li surti a compte oferir cap assegurança i el mercat d'assegurances de vida acabi desapareixent.

- Un altre exemple: si el professor d'una assignatura, en ignorar el nivell de preparació dels seus estudiants, estableix un nivell intermedi per a l'assignatura, és probable que els estudiants de nivell superior a l'intermedi s'avorreixin, es desmotivin i es desinteressin per l'assignatura. Si aquests deixen d'anar a classe, només assistiran els estudiants de nivells més baixos (que són adversament seleccionats pel plantejament del professor). D'aquesta forma, el professor haurà d'adaptar el nivell de l'assignatura al nivell dels estudiants dels qui té informació: els que vénen a classe. La selecció adversa permet als estudiants de nivell inferior aprofitar-se del professor, que ha de rebaixar el nivell de l'assignatura perquè només assisteixen els de nivell inferior.

EXEMPLE 4. Selecció adversa. A un mercat es ven un bé amb 5 nivells de qualitat, qualitat $q = 1$, $q = 2$, $q = 3$, $q = 4$ i $q = 5$. Cada productor ven el bé de qualitat q només si el preu és almenys $4q$. Per tant, els productors de bé de qualitat 1 ofereixen qualitat 1 si poden vendre el bé almenys a preu $4·1 = 4$; els de qualitat 2, si el poden vendre almenys a preu $4·2 = 8$, etc. Cada consumidor ignora de quina qualitat és el bé que compra, però està disposat a pagar com a màxim $5q$ per cada unitat de qualitat $q \in [1, 5]$. Suposem que, si hi ha $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ qualitats al mercat, tota unitat del bé té la mateixa probabilitat $1/n$ de ser d'una determinada qualitat. En aquest cas, comprovem que al mercat només es vendrà la qualitat inferior 1.

- Atesa la incapacitat dels consumidors de reconèixer la qualitat del bé, el preu p del bé serà únic. En cas contrari, els consumidors podrien utilitzar el preu com a senyal de la qualitat: preu més alt, qualitat superior. Per a què totes les qualitats s'ofereixin al mercat, el preu ha de ser com a mínim el que exigeix el productor de la qualitat superior $q = 5$. Aquest preu és 20. Si el preu de mercat és $p \geq 20$, els productors oferiran els 5 nivells de qualitat.

- Com s'ha assumit que una unitat del bé triada a l'atzar té la mateixa probabilitat de ser d'una qualitat que d'una altra, la qualitat mitjana que un consumidor espera trobar-se és $q_m = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$. En tal cas, els consumidors només voldran pagar $5·q_m = 5·3 = 15 < p \geq 20$. D'aquí que cap productor no trobarà comprador: el preu $p \geq 20$ és massa alt per als consumidors donada la qualitat $q = 3$ que esperen trobar-se. Conclusió: el preu no pot ser $p \geq 20$ i, per tant, la qualitat $q = 5$ és expulsada del mercat (ja que els productors només produeixen la qualitat 5 si el preu és almenys 20).

- Expulsada la qualitat $q = 5$, provem de determinar si poden subsistir la resta de qualitats, d'1 a 4. Per a què aquestes qualitats s'ofereixin, el preu ha de ser com a mínim el que exigeix el productor de la qualitat superior $q = 4$. Aquest preu és 16. Si el preu de mercat és $p \geq 16$, els productors oferiran els nivells de qualitat d'1 a 4.

- Ara, la qualitat mitjana que els consumidors esperen trobar-se és $q_m = \frac{1+2+3+4}{4} = 2'5$ i només voldran pagar $5·q_m = 5·2'5 = 12'5 < p \geq 16$. D'aquí que cap productor no trobarà comprador: el preu $p \geq 16$ és massa alt per als consumidors donada la qualitat $q = 2'5$ que esperen trobar-se. Conclusió: el preu no pot ser $p \geq 16$ i, per tant, la qualitat $q = 4$ és expulsada del mercat (perquè els productors només produeixen la qualitat 4 si el preu és almenys 16).

- Expulsada la qualitat $q = 4$, provem de determinar si poden subsistir la resta de qualitats, d'1 a 3. Per a què aquestes qualitats s'ofereixin, el preu ha de ser com a mínim el que exigeix el productor de la qualitat superior $q = 3$. Aquest preu és 12. Si el preu de mercat és $p \geq 12$, els productors oferiran els nivells de qualitat d'1 a 3.

- Ara, la qualitat mitjana que els consumidors esperen trobar-se és $q_m = \frac{1+2+3}{3} = 2$ i només voldran pagar $5·q_m = 5·2 = 10 < p \geq 12$. D'aquí que cap productor no trobarà comprador: el preu $p \geq 12$ és massa alt per als consumidors donada la qualitat $q = 2$ que esperen trobar-se. Conclusió: el preu no pot ser $p \geq 12$ i, per tant, la qualitat $q = 3$ és expulsada del mercat (perquè els productors només produeixen la qualitat 3 si el preu és almenys 12).

- Expulsada la qualitat $q = 3$, provem de determinar si poden subsistir la resta de qualitats, 1 i 2. Per a què aquestes qualitats s'ofereixin, el preu ha de ser com a mínim el que exigeix el productor de la qualitat superior $q = 2$. Aquest preu és 8. Si el preu de mercat és $p \geq 8$, els productors oferiran els nivells de qualitat 1 i 2.

- Ara, la qualitat mitjana que els consumidors esperen trobar-se és $q_m = \frac{1+2}{2} = 1'5$ i només voldran pagar $5·q_m = 5·1'5 = 7'5 < p \geq 8$. D'aquí que cap productor no trobarà comprador: el preu $p \geq 8$ és massa alt per als consumidors donada la qualitat $q = 1'5$ que esperen trobar-se. Conclusió: el preu no pot ser $p \geq 8$ i, per tant, la qualitat $q = 2$ és expulsada del mercat (perquè els productors només produeixen la qualitat 2 si el preu és almenys 8).

- Així que, expulsada la qualitat $q = 2$, només resta la qualitat 1. Els productors ofereixen la qualitat 1 si el preu és $p \geq 4$. Atès que només hi ha una qualitat, els consumidors la reconeixen. Per la qualitat 1 estan disposats a pagar com a màxim 5. Per tant, la qualitat 1 pot sobreviure: si el preu està entre 4 i 5, els productors la produeixen i els consumidors la compren. El resultat final és que la qualitat del bé ha estat adversament seleccionada: el mercat només ha seleccionat la pitjor qualitat.

REMARCA 5. Quin és el problema que evidencia l'Exemple 4? Que si els consumidors coneguessin la qualitat que compren, es produirien i vendrien totes les qualitats, ja que, per a cada qualitat, hi ha algun preu que indueix als productors a oferir la qualitat i als consumidors a comprar-la.

- De fet, si cada qualitat $q \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tingués un preu entre $4q$ i $5q$, els productors produirien, i els consumidors comprarien, la qualitat q. L'Exemple 4 mostra que amb informació incompleta poden no existir mercats de certs béns que existirien en cas que la informació fos completa.

- La solució del problema també és evident: si el problema està causat per la manca d'informació, que se subministri informació suficient i el problema es resoldrà. Quan hi ha selecció adversa, típicament hi ha una part del mercat més informada que l'altra (d'aquí la informació asimètrica). A l'Exemple 4, els productors estan més ben informats de la qualitat del que ofereixen que els consumidors. Per a eliminar l'asimetria d'informació, hi ha dos mecanismes bàsics: la senyalització i el cribratge.

DEFINICIÓ 6. La senyalització (*signalling*) consisteix en què la part més informada transmet "senyals" a la part menys informada sobre trets ocults que siguin rellevants per a la transacció econòmica.

- Exemple de senyalització: un estudiant corregeix les errades del professor a classe per a assenyalar al professor que és un bon estudiant. Un altre: les empreses fan publicitat, amplien garanties per defectes de producció o desenvolupen imatge o reputació de marca per a revelar als consumidors que el producte que venen és de qualitat.

DEFINICIÓ 7. El cribratge (*screening*) consisteix en què la part menys informada a una transacció empra instruments per a aconseguir que la part més informada reveli, directament o indirecta, trets ocults que siguin rellevants per a la transacció econòmica.

- Exemple de senyalització: un estudiant pot fer preguntes a un professor a classe per a descobrir, a través de les respostes del professor, quin tipus de professor li fa classe. Un altre: un professor fa exàmens per a determinar la qualitat dels estudiants. Un altre: les empreses sotmeten a cada candidat a ocupar llocs de treball a tests o entrevistes per a identificar de quin tipus de treballador es tracta.

- La revelació d'informació pot causar un altre problema: la part que transmet informació podria estar interessada en revelar informació falsa. Per exemple, quan un jutge pregunta un acusat si es tracta del tipus culpable o innocent, tant si l'acusat és innocent o culpable, sembla que la millor estratègia és declarar-se innocent. Però si tant un acusat que sigui culpable com un d'innocent revelen la mateixa informació, aquesta informació es torna inútil. Això suggereix que, per a què una determinada informació tingui valor en un context de selecció adversa, ha de ser costós falsejar-la.

DEFINICIÓ 8. El principi de veracitat (*costly to fake*) en la transmissió d'informació en presència de selecció adversa estableix que ha de ser costós transmetre informació falsa per a què la informació transmesa contribueixi a resoldre el problema de selecció adversa.

- La publicitat pot interpretar-se com un senyal de la qualitat d'un bé que satisfà el principi de veracitat. Per a què molestar-se en assumir una despesa irrecuperable en publicitat si el bé no té prou qualitat com per a garantir que l'empresa estigui en actiu el temps suficient que permeti rendibilitzar la despesa en publicitat? Per contra, una empresa que doni indicis que pot tancar fàcilment i sense assumir costs irrecuperables significatius no transmet la idea que la seva producció sigui de qualitat.

- Els candidats més competents i capacitats per a ocupar un lloc de treball determinat poden aportar títols aconseguits a les millors institucions docents i obtinguts amb les millors qualificacions (per exemple, economista llicenciat a Harvard contra economista llicenciat a la Rovira i Virgili). Si un candidat no és prou competent ni capacitat, li resultarà costós aconseguir aquells títols en aquelles institucions. Per tant, qui presenta aquell tipus de títol, dóna un senyal creïble de la seva competència i capacitació. Si tothom pogués presentar aquesta mena de credencial deixaria de ser una eina d'utilitat per a identificar candidats competents i capacitats.

DEFINICIÓ 9. El principi de revelació (*full disclosure*) en la transmissió d'informació en presència de selecció adversa estableix que ha de revelar-se tota la informació (rellevant al cas) per a què la informació transmesa contribueixi a resoldre el problema de selecció adversa.

- Aquest principi pot concretar-se més: si algú té incentiu a revelar una informació favorable sobre sí mateix, els demés es veuran pressionats a revelar informació sobre ells mateixos, fins i tot quan aquesta informació no és favorable.

EXEMPLE 10. Els estudiants d'un curs de Microeconomia I saben que com més exercicis demostrin al professor que han fet, més probable és que aquest, inconscientment, els afavoreixi en la qualificació final de l'assignatura (perquè és menys estricte en la penalització d'errades als exàmens). Imaginem que hi ha quatre grups d'estudiants, tots amb el mateix nombre de membres. Grup 1: els qui no fan cap exercici. Grup 2: els qui fan ⅓ dels exercicis. Grup 3: els qui fan ⅔. Grup 4: els qui els fan tots. El principi de revelació implica que tots els estudiants revelaran a quin grup pertanyen (i quants exercicis han fet), de manera directa o indirecta.

- Atès que els 4 grups tenen el mateix nombre de membres, un estudiant tret a l'atzar haurà fet, de mitjana, la meitat dels exercicis, resultat de dividir 0 + ⅓ + ⅔ + 1 entre 4. Si el professor no pot distingir a quin grup pertany cada estudiant, definirà l'estudiant mitjà com aquell que fa la meitat dels exercicis.

- Considerem el Grup 4, format pels estudiants que han fet més exercicis. Els membres d'aquest grup tenen incentiu a revelar al professor que han fet tots els exercicis, perquè si no passarien com estudiant mitjans i no treurien profit del mèrit d'haver fet més exercicis que l'estudiant mitjà.

- Però un cop els membres del Grup 4 revelen que són d'aquest grup, l'estudiant mitjà de la resta de grups no és un estudiant que fa la meitat d'exercicis, sinó un que fa un terç (ja que ⅓ és la mitjana de 0, ⅓ i ⅔, que són els valors sobre els quals el professor té incertesa). Com a conseqüència, els membres del Grup 3 tenen ara incentiu a revelar que han fet ⅔, degut a què, en cas contrari, passarien davant el professor per estudiants que només han fet ⅓.

- Un cop el professor sap qui és del Grup 3 i qui és del Grup 4, sap que un estudiant mitjà de la resta de grups ha fet un sisè dels exercicis: la mitjana de 0 i ⅓. Donat això, els membres del Grup 2 tenen incentiu a revelar que han fet més d'un sisè. Així que el professor sap a quin grup pertany cada estudiant: sabent qui és dels Grups 2, 3 i 4, revelin o no revelin res, els altres seran del Grup 1.

Exercicis de la Lliçó 11

1. Hi ha 4 tipus de qualitat d'un bé, des de la qualitat q = 0 fins a la qualitat q = 3. El nombre d'unitats que es posen a la venda de la qualitat q ∈ {0, 1, 2} és el doble que el nombre d'unitats que es posen a la venda de la qualitat q + 1. Els venedors estan disposats a vendre cada unitat de qualitat q a preu q + 1. Els compradors estan disposats a comprar cada unitat de qualitat q a preu 5q.
(i) Si els compradors no poden determinar quina és la qualitat del bé abans de comprar-lo, quantes qualitats del bé hi haurà al mercat?
(ii) I si els compradors només poden reconèixer la qualitat q = 1?
(iii) I si en el cas (ii) els consumidors estiguessin disposats a comprar cada unitat de qualitat q a preu 2q?

2. A una tolla a la nit hi ha un grup de 147 granotes mascle, cadascuna de les quals ha de decidir si raucar per a atreure a alguna granota femella. Les femelles no poden observar els mascles i els trien en funció del to del crit dels mascles. El to del crit defineix 6 tipus de mascles. Les femelles prefereixen als membres del grup i ∈ {6, 5, 4, 3, 2} als membres de qualsevol grup j < i. Del grup i ∈ {1, … , 6} hi ha 60/i granotes. (i) Si cada granota mascle vol maximitzar la probabilitat d'atreure una femella, els membres de quins grups no tenen incentiu a romandre en silenci? (ii) Als membres de quins grups els seria indiferent raucar o no? (iii) I si les femelles tinguessin la capacitat de distingir els membres del grups 1, 2 i 3 dels membres dels grups 4, 5 i 6?

Lliçó 12. Un exemple sobre la teoria del disseny de mecanismes

El Premi Nobel d'Economia del 2007 va ser lliurat a Leonid Hurwicz (1917–2008), Eric Maskin (1950) i Roger Myerson (1951) per establir les bases de la teoria del disseny de mecanismes (TDM, http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2007/). La TDM serà, previsiblement, una de les àrees més importants de la Microeconomia en el futur perquè el disseny de mecanismes és l'eina per a resoldre gran part dels problemes econòmics. El Disseny de Mecanismes és per a l'Economia el que l'Enginyeria és per a la Física o la Medicina és per a la Biologia: el camp on els principis teòrics s'apliquen a resoldre problemes pràctics, reals i concrets.

La teoria del disseny de mecanismes és, grosso modo, l'invers (o l'altra cara de la moneda) de la teoria dels jocs. La teoria dels jocs parteix d'un conjunt predefinit de possibles comportaments dels individus (les estratègies) i pretén establir quins resultats són raonables expectar a partir del comportament egoista dels individus. La TDM parteix d'algun resultat desitjat i s'ocupa de dissenyar un joc i de seleccionar un tipus de solució per al joc de forma que la solució del joc coincideixi amb el resultat desitjat. La teoria dels jocs es preocupa per determi-nar resultats; en canvi, la TDM, partint de resultats, es preocupa de construir un mecanisme (un joc) que faci que el comportament egoista dels individus condueixi als resultats preseleccionats.

- La TDM ha aparegut inadvertidament al llarg del curs. Per exemple, si volem un mecanisme d'assignació entre consumidors d'un bé homogeni, perfectament divisible, que no genera externalitats, sobre el qual hi ha informació completa i per al qual hi ha molts consumidors i molts productors, i si volem que l'assignació resultant sigui socialment desitjable (en el sentit de maximitzar la suma dels excedents de consumidors i productors), el Teorema de la mà invisible (Lliçó 6) identifica un mecanisme per a assolir aquest resultat: el mercat competitiu. D'altra banda, si s'hi presenta una externalitat negativa en la producció i volem recuperar la solució del mercat competitiu, la Lliçó 10 mostra un possible mecanisme: l'impost pigouvià.

- De fet, imposts i controls de preus són mecanismes a disposició de l'estat per a aconseguir algun objectiu predeterminat (com augmentar o disminuir el preu de mercat). En general, la política econòmica no és més que un exercici d'aplicació de la TDM: els responsables polítics volen aconseguir un objectiu (augmentar el nombre d'ocupats, reduir la taxa d'inflació, accelerar el creixement econòmic, reduir la pobresa) i les mesures de política econòmica són la resposta de la TDM al problema de com aconseguir l'objectiu desitjat. Des d'aquest punt de vista, el futur de les societats avançades depèn del desenvolupament apropiat de la TDM (per exemple, un tema actual i preocupant es refereix a quins mecanismes econòmics posar en pràctica per a induir la reversió del procés d'escalfament global).

El valor de la TDM rau en centrar-se en mecanismes que no violenten la voluntat dels individus: no se'ls força a fer res sinó que es redissenya el seu entorn institucional o econòmic per a què, perseguint els seus propis interessos, els individus prenguin les decisions que portin al resultat desitjat. Les polítiques que no tenen present com reaccionen els individus quan s'enfronten a les polítiques tendeixen a fracassar (els exemples sobre risc moral il·lustren els problemes). Per aquest motiu és tant important l'avenç de la TDM.

- La Lliçó 5 del Tema 3 exemplifica aquest punt. Un monopoli és fàcil de trencar per la força bruta: la sentència inicial del cas Microsoft (http://en.wikipedia.org/wiki/Microsoft_trial#Trial) forçava l'empresa a dividir-se en dos, una part que produís sistemes operatius i l'altra que produís components de software. Però aquest tipus de mecanismes coercitius no fan sinó induir als individus a aconseguir per una altra via el resultat que es tracta d'evitar: què impedia que, a la pràctica, les dues unitats de Microsoft actuessin com una de sola? La susdita Lliçó 5 mostrava un mecanisme per a desfer (a la pràctica) el monopoli: facilitar l'entrada de nous productors.

- De fet, la sentència del cas Microsoft no és va aplicar: al novembre del 2001, el Departament de Justícia dels EUA i Microsoft van arribar a un acord pel qual Microsoft es comprometia a compartir el seu software API (*application programming interface*) amb tercers durant 5 anys. Per tant, aquest acord suposava facilitar l'entrada de nous productors al mercat de desenvolupament de sistemes operatius.

El propòsit d'aquesta lliçó és presentar un exemple abstracte (però general i senzill) sobre el problema del disseny de mecanismes (que cau més aviat en l'àmbit de la Microeconomia II) fora de l'àmbit dels mercats (per a fer palesa la capacitat de la teoria del disseny de mecanismes d'enfrontar-se a problemes de tota mena)[2]. L'exemple és una adaptació de l'utilitzat per Eric Maskin (http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2007/maskin-slides.pdf) al seu discurs d'acceptació del Premi Nobel d'Economia del 2007.

EXEMPLE. Un professor pot ser de 4 tipus: x = exigent, y = despreocupat, z = bromista i v = motivador. Els estudiants d'un curs de Microeconomia I tenen preferències sobre els tipus de professors i, sobre la base d'aquestes preferències, emplenen una enquesta docent. Per a simplificar, suposem que només hi ha 2 estudiants, el i ella (alternativament, es podria assumir que hi ha n estudiants, on $n/2$ són nois que tenen tots ells idèntiques preferències sobre professors i on $n/2$ són noies que tenen totes elles idèntiques preferències). Hi ha dues possibles situacions (o "estats del món"): aquella (situació 1) on l'assignatura interessa als estudiants i aquella (situació 2) on l'assignatura no els interessa. La Fig. 29 mostra les preferències dels estudiants a cada situació (on un tipus α posat a dalt d'un altre β indica que α es prefereix a β).

- Per exemple, les preferències indicades signifiquen que, a la situació 1 (l'assignatura interessa), ella prefereix per damunt de tot tenir un professor motivador; si no pot tenir un de motivador, prefereix un de despreocupat; en tercer lloc prefereix un de bromista; i, finalment, el menys preferit és un professor exigent.

- L'enquesta docent es limita a demanar als estudiants que donin puntuació al professor, d'1 a 4. Els estudiants donen 4 punts si el professor és del seu tipus més preferit, 3 punts si és del seu segon tipus més preferit, 2 punts si és el tercer més preferit i només 1 punt si és del seu tipus menys preferit. Com a il·lustració, si el professor és exigent (tipus x) i ens trobem a la situació 1, ell li donarà 4 punts (perquè x és el tipus més preferit d'ell a la situació 1) i ella li donarà només 1 punt. En total, un professor exigent tindrà 5 punts a la situació 1 i tindrà 6 punts a la situació 2.

- El professor està interessat en seleccionar el tipus que li proporcioni el nombre més gran possible de punts totals a cada situació. El professor sap quina és la preferència de cada estudiant a cada situació però (aquí hi ha el problema) el professor ignora en quina situació es troba (no sap si l'assignatura interessa o no als estudiants).

- Atès que el professor coneix les preferències en cada situació, sap que el tipus de professor amb més puntuació a la situació 1 és y (que obté 6 punts; x i v obtindrien 5; i z obtindria 4) i que el tipus amb més puntuació a la situació 2 és x (que obté 6 punts; y i v obtindrien 5; i z obtindria 4).

[2] L'Exemple també il·lustra com de manipulador pot arribar a ser un professor que sàpiga una mica de TDM.

- En resum, al professor li convé ser del tipus y (despreocupat) en la situació 1 i del tipus x (exigent) en la situació 2. El cas, però, és que el professor ignora en quina situació es troba. En termes de la TDM, el professor vol aconseguir (implementar) el resultat y en la situació 1 i el resultat x en la situació 2. Per desgràcia, necessita informació per a implementar correctament la seva decisió. Aquí intervé el disseny de mecanismes: el professor ha de construir un mecanisme que indueixi als estudiants a revelar voluntàriament informació que li permeti esbrinar en quina situació es troba (i, reconeguda la situació, escollir ser el tipus de professor que li asseguri la millor enquesta possible).

		Situació 1		**Situació 2**	
		Ell	*Ella*	*Ell*	*Ella*
4 *punts*	→	x	v	v	y
3 *punts*	→	y	y	x	x
2 *punts*	→	z	z	z	z
1 *punt*	→	v	x	y	v

Fig. 29. Preferències sobre el tipus de professor

		Ella	
		c	d
Ell	a	y	z
	b	v	x

Fig. 30. Un mecanisme

- El mecanisme més natural (i ingenu) consistiria en preguntar els estudiants en quina situació es troben; això és, preguntar-los si l'assignatura els interessa o no. Si diuen que sí, el professor interpreta que la situació és la 1 i que li convé ser y; si diuen que no, que la situació és la 2 i que li convé ser x. Però ai las! Tots dos estudiants tenen incentiu a no revelar la veritat (assumint que tots saben que el professor vol ser y a la situació 1 i vol ser x a la situació 2).

- Considerem el cas d'ell. Si som a la situació 1, què li convé dir? Si diu "m'interessa l'assignatura", sap que el professor assumirà que es troben a la situació 1 i sap, per tant, que el professor triarà ser y. En canvi, dient "no m'interessa", sap que el professor assumirà que es troba a la situació 2 i sap, per tant, que el professor triarà ser x. Atès que a la situació 1 ell prefereix el tipus de professor x al tipus de professor y, a ell l'interessa dir, a la situació 1, que es troben a la situació 2. I continuant amb ell, què li convé dir a la situació 2? Pel mateix raonament que abans, si diu "m'interessa", ell sap que es trobarà amb un y i que si diu "no m'interessa" es trobarà amb un x. Atès que a la situació 2 ell continua preferint un x a un y, a ell l'interessa dir, a la situació 2, que es troben a la situació 2. Així que a ell sempre li convé dir que es troben a la situació 2.

- Un raonament similar pel cas d'ella prova que a ella sempre li convé dir que es troben a la situació 1. Com a resultat, el professor no pot refiar-se del que manifesten els seus estudiants: tots dos tenen incentius a mentir. Per fortuna, la TDM arriba al rescat.

- Davant un problema com aquest, la TDM s'enfronta al repte de dissenyar un joc per als estudiants de manera que el resultat del joc sigui el resultat buscat pel professor. En particular, quan el joc es juga a la situació 1, el resultat ha de ser y i quan es juga a la situació 2, ha de ser x.

- La Fig. 30 mostra un possible joc (que adopta l'equilibri de Nash com a solució per a buscar resultats) que permet aconseguir aquest objectiu (atès que els pagaments són els mateixos per a ell i per a ella a cada jugada, només s'ha indicat el pagament un cop; per exemple, si ell tria a i ella tria c, el resultat y significa que tots dos tindran un professor del tipus y: despreocupat).

- El joc el podem interpretar de la següent manera: el professor diu a ell que triï entre les estratègies a (= tenir un professor despreocupat o bromista) o b (= tenir un professor motivador o exigent); i el professor diu a ella que triï entre les estratègies c (= tenir un professor despreocupat o motivador) o d (= tenir un professor bromista o exigent). Comprovem que aquest joc té, a cada situació, un únic equilibri de Nash, el qual es correspon amb el resultat volgut pel professor a cada situació.

- Suposem que som a la situació 1. És (a, d) un equilibri de Nash? No: perquè z és el pagament (per a tots dos estudiants) quan es juga (a, d) i ella obtindria un millor pagament canviant de d a c. De fet, si es juga (a, c), resulta y, que és un tipus de professor més preferit per ella a la situació 1 que z (el resultat de la jugada (a, d)). Comprova que ni (b, c) ni (b, d) són equilibris de Nash del joc a la situació 1 i que l'únic equilibri de Nash a la situació 1 del joc és (a, c), que porta com a resultat y. Per tant, el joc permet al professor identificar el millor tipus per a ell (el tipus y despreocupat) a la situació 1.

- Suposem ara que som a la situació 2. És (a, d) un equilibri de Nash? No: perquè z és el pagament (per a tots dos estudiants) quan es juga (a, d) i ell obtindria un millor pagament canviant d'a a b. De fet, si es juga (b, d), resulta x, que és un tipus de professor més preferit per ell a la situació 2 que z (el resultat de la jugada (a, d)). Comprova que ni (a, c) ni (b, c) són equilibris de Nash del joc a la situació 2 i que l'únic equilibri de Nash a la situació 2 del joc és (b, d), que porta com a resultat x. Un cop més, el joc permet al professor identificar el millor tipus per a ell (el tipus x exigent) a la situació 2.

- Aquesta és la feina de la TDM: donat un resultat a aconseguir (que el professor triï el tipus que li dóna més puntuació a l'enquesta), dissenyar un mecanisme (un joc) que faci als jugador jugar estratègies que condueixin al resultat que es vol aconseguir.

Preguntes de tipus test del Tema 4 (Lliçons 1–3)

1. La funció d'oferta d'un bé relaciona
(a) cost marginal i cost variable
(b) cost marginal i utilitat marginal
(c) excedent del productor i del consumidor
(d) preu i quantitat oferta del bé

2. Si $C(q) = 2 + q^2$, la funció d'oferta és
(a) $q^s = p/2$ (b) $q^s = 2 + p^2$
(c) decreixent (d) No es pot calcular

3. Si el preu d'un bé es duplica i, com a conseqüencia, la quantitat oferta també es duplica l'elasticitat preu de l'oferta és
(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) No es pot calcular

4. El volum de producció que maximitza la funció de beneficis quan el preu és 12 i la funció de cost variable és $CV(q) = q^3$ és
(a) $q = \pm 2$ (b) $q = 0$ (c) $q = 2$
(d) no es pot determinar sense conèixer el cost fix

5. Si a un mercat hi ha 2 grups de productors amb funcions d'oferta $q^s = p - 2$ i $p = 2q^s$, la funció d'oferta de mercat
(a) és $Q^s = 3p - 2$ (b) és $Q^s = \frac{3p}{2} - 2$
(c) és $Q^s = \frac{3}{2p} - 2$ (d) Res de l'anterior

6. Amb funció d'oferta de mercat $Q^s = 2p - 4$, l'excedent dels productors quan el preu és 4 i la quantitat oferta és la que determina la funció d'oferta de mercat és
(a) 8 (b) 4 (c) 6 (d) No es pot calcular

7. Si el preu és $p = 1$, el volum de producció és $q = 3$ i el cost variable és $CV = 4$, quina condició per a maximitzar la funció de beneficis podem saber del cert que no es compleix?
(a) La condició de 1r ordre
(b) La condició de 2n ordre
(c) La condició de tancament
(d) Es compleixen totes

8. Si l'elasticitat preu de l'oferta és 3 i la quantitat oferta s'ha reduït un 12%
(a) no podem esbrinar què ha passat amb el preu
(b) el preu ha augmentat un 4%
(c) el preu ha disminuït un 4%
(d) cap de les respostes anteriors no és certa

9. Si $q = 2$ és el volum de producció que maximitza la funció de beneficis d'un productor preu acceptant i la seva funció de cost total és $C(q) = 1 + q^2$, el preu ha estat
(a) $p = 0$ (b) $p = 2$ (c) $p = 4$
(d) no hi ha prou informació per a determinar-lo

10. La diferència entre el cost total i el cost fix és
(a) l'ingrés total (b) la derivada
(c) el cost marginal (d) cap de les anteriors

11. Si el preu del bé és $p = 4$ i la funció de cost marginal és $CMg(q) = 2q$ aleshores el benefici total augmenta si la producció passa
(a) de $q = 5$ a $q = 6$ (b) de $q = 1$ a $q = 0$
(c) de $q = 1$ a $q = 2$ (d) de $q = 2$ a $q = 3$

12. Quin dels següents factors no és previsible que desplaci la funció d'oferta de mercat d'un bé?
(a) L'augment del preu del bé
(b) La reducció del nombre de productors
(c) Canvis de la funció de cost marginal
(d) Les alteracions de la funció de cost variable

13. Si a un mercat hi ha 10 de productors amb la mateixa funció d'oferta $q^s = 2p$, la funció d'oferta de mercat
(a) és $Q^s = 12p$ (b) és $Q^s = 20p$
(c) és $Q^s = 5p$ (d) no es pot calcular

14. Amb funció d'oferta de mercat $Q^s = 2p$, l'excedent dels productors quan el preu és 4 i la quantitat oferta és la que determina la funció d'oferta de mercat és
(a) 8 (b) 32 (c) 16 (d) no es pot calcular

15. El volum de producció que maximitza la funció de beneficis quan el preu és 10 i la funció de cost total és $C(q) = 2 + q^2$ és
(a) $q = 10$ (b) $q = 0$ (c) $q = 5$
(d) no es pot calcular sense saber el cost fix

16. La funció de cost marginal és
(a) ingrés total menys cost total
(b) la derivada de la funció d'oferta
(c) la derivada de la funció de cost variable
(d) Res de l'anterior

17. Si un productor preu acceptant maximitzador de beneficis produeix $q = 10$ quan la seva funció de cost variable és $CV(q) = 2q$
(a) el preu del bé és igual o superior a 2
(b) el preu del bé és inferior a 2
(c) el preu és igual al cost variable
(d) no podem saber res sobre el preu del bé

18. La funció de beneficis π d'un productor preu acceptant amb funció de cost total $C(q) = q + q^2$ quan el preu de mercat és $p = 4$ és
(a) $\pi = 1 + 2q$ (b) $\pi = 3q - q^2$
(c) no es pot calcular (d) Res de l'anterior

19. Si $q = 3$ és el volum de producció que maximitza la funció de beneficis d'un productor competitiu i la seva funció de cost total és $C(q) = 1 + q^2$, el preu ha estat
(a) $p = 3$ (b) $p = 6$ (c) Res de l'anterior
(d) manca informació per a obtenir-lo

20. El benefici d'un productor competitiu quan produeix i ven $q = 4$ unitats a preu $p = 2$ i el cost fix és 3 és
(a) positiu (b) negatiu
(c) zero (d) manca informació per a obtenir-lo

21. L'objectiu d'un productor competitiu és
(a) triar un punt de la funció de demanda de mercat
(b) triar un volum de producció que maximitza la seva funció de beneficis donat el preu de mercat
(c) maximitzar la seva funció de cost marginal
(d) res de l'anterior

22. La condició segons la qual un productor competitiu ha de produir el volum de producció q^* tal $CMg(q^*) = p$, on p és el preu que el productor considera donat, significa que
(a) el productor és realment un duopolista de Cournot
(b) es compleix la condició de 1r ordre per a maximitzar la funció de beneficis del productor
(c) el cost marginal s'està minimitzant
(d) el cost de l'última unitat produïda és diferent de l'ingrés obtingut per la venda d'aquesta unitat

23. Per a un productor competitiu, la condició de tancament vol dir
(a) que és millor tancar si el benefici és negatiu
(b) que en cas d'obtenir pèrdues, aquestes no poden ser superiors al cost fix
(c) que el seu excedent ha de ser més gran que l'excedent de qualsevol altre productor
(d) no vol dir res, perquè sempre se satisfà

24. Quan el preu de mercat és $p = 9$, el volum de producció que maximitza la funció de beneficis d'un productor preu acceptant amb funció de cost total $C(q) = 3 + q^3/3$
(a) $q = 3$ (b) $q = 9$
(c) res de l'anterior (d) no es pot calcular

25. La funció d'oferta d'un productor competitiu s'ha desplaçat cap a la dreta. Una possible explicació és que
(a) el preu de mercat del bé ha augmentat
(b) la funció de cost marginal del productor s'ha desplaçat cap a la dreta
(c) el cost fix s'ha duplicat
(d) res de l'anterior

26. Si el preu d'un bé és $p > 0$, un productor competitiu
(a) sempre produirà una quantitat positiva
(b) produirà si no té beneficis negatius
(c) pot produir una quantitat positiva del bé encara que els beneficis siguin negatius
(d) Res de l'anterior

29. Si el preu és $p = 10$ i un productor competitiu que maximitza la seva funció de beneficis produeix $q = 5$,
(a) la funció de cost marginal pot ser $CMg = 2q$
(b) el cost variable de 5 podria ser superior a 50
(c) amb tota seguretat el cost fix és positiu.
(d) Res de l'anterior

30. Què no es susceptible de modificar la funció d'oferta de mercat d'un bé?
(a) L'augment del nombre de productors del bé
(b) La modificació de la funció de cost variable d'un dels productors
(c) La modificació del preu del bé
(d) Res de l'anterior

31. Si l'elasticitat preu de l'oferta és 4 i la quantitat oferta ha augmentat un 100%
(a) el preu s'ha reduït un 25%
(b) el preu s'ha reduït un 400%
(c) el preu ha augmentat un 25%
(d) el preu ha augmentat un 400%

32. Sigui un productor competitiu maximitzador de beneficis amb cost fix $CF = 1$ que produeix i ven $q = 2$ a preu $p = 5$. Llavors:
(a) el seu excedent és superior al seu benefici
(b) el seu benefici és superior al seu excedent
(c) el seu benefici és igual al seu excedent
(d) Res de l'anterior

33. La funció d'oferta d'un productor competitiu s'ha desplaçat cap a l'esquerra. Una possible explicació és que
(a) el cost variable de produir cada quantitat s'ha duplicat
(b) el cost variable de produir cada quantitat s'ha reduït a la meitat
(c) la funció de cost marginal s'ha desplaçat a la dreta
(d) Res de l'anterior

34. L'excedent d'un productor amb funció d'oferta $q^s = p - 1$, si $p \geq 1$, i $q^s = 0$, si $0 \leq p < 1$ és
(a) sempre positiu si $p > 1$
(b) negatiu depenent de quina quantitat vengui a quin preu
(c) necessàriament igual al seu benefici
(d) Les tres afirmacions anteriors són falses

35. La funció d'oferta d'un productor competitiu amb funció de cost total $C(q) = q^2$
(a) relaciona el cost variable amb la producció que maximitza la funció de beneficis
(b) és $p = q^2$
(c) indica quin és el preu que maximitza la seva funció de beneficis donada una quantitat
(d) Res de l'anterior

36. Quina afirmació sobre un productor preu acceptant que maximitza beneficis no és falsa?
(a) El benefici pot ser positiu i l'excedent negatiu
(b) El benefici pot ser negatiu i l'excedent positiu
(c) El benefici pot ser positiu i l'excedent zero
(d) El benefici mai no és igual a l'excedent

37. Si a un mercat hi ha 2 grups de productors amb funcions d'oferta $q^s = 2p$ i $p = 2q^s$, la funció d'oferta de mercat
(a) és $Q^s = 4p$ (b) és $Q^s = 5p/2$
(c) no es pot calcular (d) Res de l'anterior

Preguntes de tipus test del Tema 4 (Lliçons 4–9)

1. Un desplaçament cap a la dreta de la funció de demanda de mercat combinat amb un desplaçament cap a l'esquerra de la funció d'oferta de mercat provoca
(a) un augment de la quantitat d'equilibri
(b) una disminució de la quantitat d'equilibri
(c) una disminució del preu d'equilibri
(d) un augment del preu d'equilibri

2. Segons la regla del costat curt del mercat, quan el preu és superior al preu d'equilibri amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, la quantitat intercanviada és
(a) la quantitat d'equilibri
(b) la quantitat oferta a aquell preu
(c) la quantitat demandada a aquell preu
(d) res de l'anterior

3. Quan hi ha excés de demanda a un cert preu
(a) hem trobat l'equilibri de mercat
(b) el preu tendirà a augmentar
(c) el preu tendirà a disminuir
(d) no es pot saber què li passa al preu

4. L'equilibri de mercat és
(a) un preu
(b) una quantitat
(c) un preu que fa que la quantitat comprada sigui igual a la quantitat venuda
(d) res de l'anterior

5. Què no és característic d'un mercat competitiu?
(a) La llibertat d'entrada i sortida dels productors
(b) Que hi hagi un preu mínim superior al d'equilibri
(c) Que tots els productors produeixin el mateix bé
(d) Que la informació dels consumidors sigui completa

6. Si el preu no és el preu d'equilibri
(a) sempre seran els consumidors els "insatisfets"
(b) sempre seran els productors els "insatisfets"
(c) productors i consumidors estaran sempre "insatisfets"
(d) hi pot haver un excés d'oferta

7. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat $Q^s = 3p$ i $Q^d = 12 - p$, l'equilibri de mercat és
(a) $p = 3$ (b) $q = 3$
(c) res de l'anterior (d) no es pot calcular

8. A l'equilibri de mercat
(a) es minimitza l'excedent dels productors
(b) es minimitza l'excedent total
(c) es maximitza l'excedent total
(d) es maximitza l'excés de demanda

9. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat $Q^s = p$ i $Q^d = 10 - p$, l'excedent total quan s'intercanvia la quantitat $q = 6$ és
(a) màxim (b) mínim (c) intermedi
(d) amb productors racionals, no és possible que s'intercanviïn 6 unitats del bé al mercat

10. Si el preu d'equilibri ha augmentat i només una de les funcions de mercat ha canviat
(a) necessàriament ha canviat la funció de demanda de mercat
(b) necessàriament ha canviat la funció d'oferta de mercat
(c) no ha canviat cap d'elles
(d) res de l'anterior

11. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat $Q^s = p$ i $Q^d = 10 - p$, l'excés d'oferta és 2 a preu
(a) $p = 2$ (b) $p = 4$
(c) $p = 6$ (d) no es pot calcular

12. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, si l'equilibri ha canviat però la quantitat d'equilibri no, aleshores
(a) només ha canviat la funció d'oferta de mercat
(b) només ha canviat la funció de demanda de mercat
(c) totes dues s'han desplaçat a l'esquerra
(d) res de l'anterior

13. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat $Q^s = 2p$ i $Q^d = 10 - p$, l'excés d'oferta quan el preu és 10 és
(a) 0 (b) 20
(c) negatiu (d) no es pot calcular

14. Si la funció de demanda de mercat és de la forma $Q^d = \alpha - p$, el preu d'equilibri de mercat és 5 i la funció d'oferta és $Q^s = 2p$, α val
(a) 5 (b) 10
(c) res de l'anterior (d) no es pot calcular

15. Quina afirmació no és falsa?
(a) Si l'excés de demanda és superior a l'excés d'oferta l'equilibri disminueix
(b) Quan l'excedent total és màxim, l'excés d'oferta també és màxim
(c) Partint de l'equilibri de mercat, tot canvi de la funció de demanda de mercat crea un excés de demanda al preu d'equilibri inicial
(d) L'equilibri de mercat pot no canviar tot i que canviïn tant la funció de demanda de mercat com la funció d'oferta de mercat

16. L'excedent mínim d'oferta
(a) és igual en equilibri a l'excés dels consumidors que tenen excedent
(b) és superior a l'equilibri quan hi ha excés d'oferta
(c) representa l'excés de demanda quan el preu d'equilibri és més gran que la quantitat d'equilibri
(d) és una expressió sense sentit

17. Segons el Teorema de la mà invisible,
(a) el mercat sempre es troba en equilibri
(b) la regla del costat curt diu què passa al mercat
(c) l'excedent dels consumidors és màxim a l'equilibri
(d) Res de l'anterior

18. Amb funcions d'oferta i demanda de mercats ben comportades i que no es desplacen, si s'observa un augment del preu de mercat
(a) la regla del costat curt del mercat deixa de ser vàlida
(b) el preu era inferior al preu d'equilibri
(c) el mercat no és perfectament competitiu
(d) no pot ser que el preu canviï sense que canviïn les funcions d'oferta o de demanda de mercat

19. Un tret comú dels preus màxims i mínims és que
(a) poden augmentar l'excedent total
(b) sempre alteren el preu de mercat
(c) poden no alterar la quantitat intercanviada al mercat
(d) res de l'anterior

20. Quin dels següents trets és característic d'un mercat competitiu?
(a) Que hi pugui haver un excés d'oferta permanentment
(b) Que la quantitat intercanviada la determina sempre la funció de demanda de mercat
(c) Que tots els productors produeixen exactament el mateix bé
(d) Que l'excedent dels productors és inferior al dels consumidors

21. Si la funció de demanda de mercat és decreixent i es desplaça cap a la dreta i la funció d'oferta de mercat és creixent i no es modifica, al preu d'equilibri inicial hi ha ara
(a) un excés de demanda
(b) un excés d'oferta
(c) un excés de preu
(d) Res de l'anterior

22. Amb funcions d'oferta i demanda ben comportades, si el preu de mercat no és el preu d'equilibri
(a) el preu tendirà a augmentar
(b) el preu tendirà a disminuir
(c) la quantitat intercanviada no pot ser la d'equilibri
(d) Res de l'anterior

23. Segons la regla del costat curt del mercat, quan el preu és inferior al preu d'equilibri amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, la quantitat intercanviada és
(a) la quantitat d'equilibri
(b) la quantitat oferta a aquell preu
(c) la quantitat demandada a aquell preu
(d) Res de l'anterior

24. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, què pot provocar un augment de l'excedent total?
(a) Un desplaçament cap a l'esquerra de la funció de demanda
(b) Un desplaçament cap a la dreta de la funció de demanda
(c) Un desplaçament cap a l'esquerra de la funció d'oferta
(d) Res de l'anterior

25. Si la quantitat d'equilibri ha disminuït i només una de les funcions de mercat ha canviat
(a) necessàriament ha canviat la funció de demanda de mercat
(b) necessàriament ha canviat la funció d'oferta de mercat
(c) és impossible que canviï la quantitat si només canvia una funció
(d) res de l'anterior

26. Si s'observa un excés de demanda positiu amb funcions d'oferta i demanda de mercat $Q^s = 3p$ *i* $Q^d = 12 - p$,
(a) el preu de mercat és superior a $p = 3$
(b) el preu de mercat pot ser inferior a $p = 1$
(c) el preu de mercat no pot ser entre $p = 2$ *i* $p = 5$
(d) el preu tendirà a pujar fins a arribar a $p = 12$

27. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, si l'equilibri ha canviat però el preu d'equilibri no, aleshores
(a) només s'ha modificat la funció d'oferta de mercat
(b) només s'ha modificat la funció de demanda de mercat
(c) totes dues s'han desplaçat necessàriament cap a l'esquerra
(d) res de l'anterior

28. Amb funcions d'oferta i demanda ben comportades i si l'equilibri de mercat existeix, un desplaçament a l'esquerra de la funció de demanda de mercat combinat amb un desplaçament a la dreta de la funció d'oferta de mercat
(a) provoca un augment de la quantitat d'equilibri
(b) provoca una disminució de la quantitat d'equilibri
(c) provoca una disminució del preu d'equilibri
(d) provoca un augment del preu d'equilibri

29. Amb funcions d'oferta i demanda ben comportades, un canvi simultani de les funcions d'oferta i de demanda de mercat,
(a) pot no alterar l'equilibri de mercat
(b) necessàriament altera l'equilibri de mercat
(c) necessàriament altera la quantitat d'equilibri
(d) res de l'anterior

30. Quina afirmació no és falsa?
(a) Si la funció de demanda de mercat canvia hi ha excés d'oferta
(b) Si la funció de demanda canvia hi ha excés de demanda
(c) Si hi ha un excés de demanda positiu el preu de mercat no és el preu d'equilibri
(d) Quan el preu no és el d'equilibri hi ha excés de demanda

31. A un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $q^d = 15 - 3p$ *i funció d'oferta de mercat* $q^s = 2p$, *el preu màxim que fa que la quantitat intercanviada sigui* $q = 3$
(a) és $p = 6$
(b) és el preu d'equilibri
(c) no existeix
(d) Res de l'anterior

32. Un esdeveniment que pot provocar un augment de la quantitat intercanviada a un mercat competitiu seria
(a) liquidar tots els productors del mercat
(b) eliminar un preu màxim superior al preu d'equilibri
(c) eliminar un impost sobre la quantitat pagat pels productors
(d) Res de l'anterior

33. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, si l'equilibri de mercat canvia però el preu d'equilibri roman constant, és possible que
(a) la funció d'oferta de mercat no hagi canviat
(b) només hagi canviat la funció de demanda de mercat
(c) cap de les dues funcions no hagi canviat
(d) Res de l'anterior

34. Quin dels següents esdeveniments segur que no provoca un augment del preu a un mercat competitiu?
(a) Un desplaçament de la funció de demanda de mercat
(b) Establir un impost sobre la quantitat a pagar pels productors
(c) L'establiment d'un preu màxim superior al preu d'equilibri
(d) L'establiment d'un preu mínim superior al preu d'equilibri

35. Si, amb funcions d'oferta i demanda de mercat $Q^s = 2p$ *i* $Q^d = 24 - 2p$, *hi ha un excés d'oferta igual a 4, el preu de mercat és*
(a) positiu (b) negatiu (c) zero
(d) no hi ha prou informació per a determinar-lo

36. El teorema de la Mà Invisible diu que
(a) no podem observar la funció de demanda de mercat
(b) un preu mínim té un efecte invisible sobre l'equilibri de mercat
(c) poden sorgir mercats negres, és a dir, invisibles
(d) Res de l'anterior

37. A l'equilibri de mercat, l'excés d'oferta més l'excedent dels productors menys l'excedent dels consumidors més l'equilibri de mercat menys la funció de demanda de mercat més dos menys dos
(a) és negatiu quan l'equilibri és inelàsticament inelàstic
(b) és positiu quan el preu d'equilibri és negatiu
(c) és zero perquè un preu mínim superior al preu d'equilibri no té efectes sobre el mercat
(d) Res de l'anterior

38. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat $Q^s = 2p$ *i* $Q^d = 24 - 2p$, *si el preu és* $p = 8$ *la quantitat intercanviada*
(a) és la quantitat demandada a preu 8
(b) no es pot determinar
(c) és la quantitat oferta a preu 8
(d) Res de l'anterior

39. A un mercat perfectament competitiu amb funció d'oferta de mercat creixent s'ha observat un augment de la quantitat intercanviada i una reducció del preu de mercat. Una possible explicació és que
(a) s'han incorporat més productors competitius al mercat
(b) el bé és inferior i la renda dels consumidors ha augmentat
(c) el preu d'un bé complementari ha disminuït
(d) Res de l'anterior

40. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat $Q^s = 3p$ *i* $Q^d = 12 - p$, *hi ha excés d'oferta positiu*
(a) a preu $p = 3$ *(b) a preu* $p = 2$
(c) a preu $p = 4$ *(d) mai*

41. A un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $Q^d = 15 - 3p$ *i funció d'oferta de mercat* $Q^s = 2p$, *l'equilibri de mercat*
(a) és $p^* = 3$
(b) no es pot calcular
(c) no existeix
(d) Res de l'anterior

42. A un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $Q^d = 15 - 3p$ *i funció d'oferta de mercat* $Q^s = 2p$, *quan el preu de mercat és* $p = 5$ *les forces de mercat tendeixen*
(a) a fer augmentar el preu de mercat
(b) a fer disminuir el preu de mercat
(c) com la quantitat demandada a preu $p = 5$ *és zero, el preu de mercat no canvia*
(d) Res de l'anterior

43. Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, si l'equilibri de mercat canvia però la quantitat d'equilibri, essent positiva, roman constant, aleshores necessàriament
(a) només la funció d'oferta de mercat ha canviat
(b) només la funció de demanda de mercat ha canviat
(c) han canviat tant la funció d'oferta de mercat com la funció de demanda de mercat
(d) No és possible que només canviï el preu d'equilibri

44. Partint de l'equilibri de mercat, el preu de mercat ha augmentat. Una possible explicació és
(a) que s'ha imposat algun preu mínim
(b) que s'ha imposat algun preu màxim
(c) que s'ha reduït el nombre de consumidors i alhora ha ugmentat el nombre de productors
(d) Res de l'anterior

45. A un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $Q^d = 15 - 3p$ *i funció d'oferta de mercat perfectament inelàstica tal que la quantitat d'equilibri és positiva*
(a) l'establiment d'un impost unitari $t = 1$ *sobre la quantitat que han de pagar els productors no altera l'equilibri de mercat*
(b) a tot preu hi ha un excés d'oferta positiu
(c) a tot preu hi ha un excés de demanda positiu
(d) mai no existeix l'equilibri de mercat

46. *A un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $Q^d = 15 - 3p$ i funció d'oferta de mercat $Q^s = 2p$, hi ha establerts un preu mínim $p^- = 4$ i un preu màxim $p^+ = 4$. Quina afirmació no és falsa?*
(a) *Cap quantitat intercanviada no és compatible amb l'existència d'un preu mínim $p^- = 4$ i d'un preu màxim $p^+ = 4$*
(b) *Al mercat hi ha un excés de demanda igual a 5*
(c) *L'excedent total a l'estat del mercat on porta establir simultàniament un preu mínim $p^- = 4$ i un preu màxim $p^+ = 4$ és més petit que l'excedent total a l'equilibri de mercat*
(d) *Establir un preu mínim $p^- = 4$ no és una mesura efectiva però establir un preu màxim $p^+ = 4$ sí*

47. *Un mercat competitiu amb funció de demanda de mercat $q^d = 15 - 3p$ i funció d'oferta de mercat $q^s = 2p$ es troba a l'equilibri de mercat. Partint d'aquesta situació, quina de les següents mesures pot alterar el preu de mercat?*
(a) *L'establiment de la quota $q = 7$*
(b) *L'establiment, simultàniament, d'un preu màxim $p^+ = 5$ i d'un preu mínim $p^- = 3$*
(c) *L'establiment d'un impost unitari $t = 1$ sobre la quantitat que han de pagar els productors*
(d) *Cap de les mesures anteriors no altera mai el preu de mercat*

48. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat $Q^s = 2p$ i $Q^d = 24 - 2p$, l'impost unitari t que han de pagar els productors que aconsegueix duplicar el preu d'equilibri és*
(a) *$t = 12$* (b) *$t = 24$*
(c) *res de l'anterior* (d) *no es pot calcular*

49. *Quina afirmació no és falsa?*
(a) *Un mercat amb índex de Herfindahl $H = 0'1$ té el mateix índex de Herfindahl que un mercat amb 10 empreses amb la mateixa quota de mercat*
(b) *L'índex de Herfindahl d'un mercat amb n empreses que tenen la mateixa quota de mercat és 1*
(c) *L'índex de Herfindahl d'un mercat amb n empreses que tenen la mateixa quota de mercat és n*
(d) *Les tres afirmacions anteriors són falses*

50. *La regla de costat curt diu que*
(a) *el preu de mercat disminueix si hi ha excés d'oferta*
(b) *l'excedent total és màxim a l'equilibri de mercat*
(c) *les funcions d'oferta i demanda són ben comportades*
(d) *Res de l'anterior*

51. *Hi ha un impost unitari $t = 1$ sobre la quantitat venuda que paguen els productors. La funció d'oferta de mercat és $q^s = 3p$. Amb quina funció de demanda és més gran la part de t que, a la pràctica, paguen els productors?*
(a) *$q^d = 22 - 7p$* (b) *$q^d = 32 - 7p$*
(c) *$q^d = 7 - 22p$* (d) *$q^d = 7 - 32p$*

52. *L'excedent total si $p = 10$, les funcions d'oferta i demanda de mercat són $q^s = 3p$ i $q^d = 140 - 7p$ i és vàlida la regla del costat curt*
(a) *és inferior a 100* (b) *és superior a 100*
(c) *no es pot calcular* (d) *Res de l'anterior*

53. *L'equilibri de mercat amb funcions d'oferta i demanda de mercat $q^s = 3p$ i $q^d = 22 - 7p$*
(a) *és superior a 2* (b) *és inferior a 2*
(c) *no es pot calcular* (d) *Res de l'anterior*

54. *Què podria explicar que el preu de mercat augmenti i la quantitat intercanviada es mantingui constant?*
(a) *Establir una quota inferior a la quantitat d'equilibri*
(b) *Eliminar un impost sobre la quantitat venuda pagat pels productors i establir un preu màxim superior al preu d'equilibri que hi havia amb l'impost*
(c) *Que la funció d'oferta de mercat es desplaci a l'esquerra i la de demanda de mercat es desplaci a la dreta*
(d) *Res de l'anterior*

55. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat $q^s = 3p$ i $q^d = 33 - 3p$, a quin preu hi ha un excés de demanda negatiu?*
(a) *$p = 11$* (b) *$p = 3$*
(c) *Al preu d'equilibri* (d) *Res de l'anterior*

56. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, si només una funció de mercat s'ha desplaçat i la quantitat d'equilibri s'ha reduït, quina funció de mercat s'ha desplaçat?*
(a) *Oferta, a la dreta* (b) *Demanda, a la dreta*
(c) *Oferta, a l'esquerra* (d) *Res de l'anterior*

57. *Què no altera mai l'equilibri de mercat?*
(a) *Que les funcions d'oferta i demanda de mercat es desplacin simultàniment en la mateixa direcció*
(b) *Establir un preu màxim superior al d'equilibri i un preu mínim inferior al preu màxim*
(c) *Eliminar un impost sobre la quantitat venuda que paguen els productor i establir una quota*
(d) *Res de l'anterior*

58. *Què no pot causar un augment del preu de mercat?*
(a) *Que les funcions d'oferta i demanda de mercat s'hagin desplaçat a l'esquerra*
(b) *Que les funcions d'oferta i demanda de mercat s'hagin desplaçat a la dreta*
(c) *Que només s'hagi desplaçat la funció de demanda*
(d) *Que s'hagi establert, simultàniament, un preu mínim inferior al preu de l'equilibri i un preu màxim superior al preu d'equilibri*

59. *Partint de l'equilibri de mercat, quin excedent pot incrementar-se fixant un preu mínim inferior al d'equilibri?*
(a) *El dels consumidors* (b) *El dels productors*
(c) *L'excedent total* (d) *Res de l'anterior*

60. *L'índex de Herfindahl és un indicador del*
(a) *benefici dels productors*
(b) *preu mínim*
(c) *grau de competència a un mercat*
(d) *Res de l'anterior*

61. *Si, amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, s'elimina un preu mínim superior al preu d'equilibri, la quantitat intercanviada*
(a) *no augmenta* (b) *no disminueix*
(c) *no canvia* (d) *Res de l'anterior*

62. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, bé normal i productors idèntics, una disminució de la renda dels consumidors combinada amb un augment del nombre de productors, produeix*
(a) *un augment del preu d'equilibri*
(b) *sempre un augment de la quantitat d'equilibri*
(c) *en tot cas, una disminució del preu d'equilibri*
(d) *sempre una disminució de la quantitat d'equilibri*

63. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, què no produeix una reducció de l'excedent total?*
(a) *Establir un preu màxim inferior al preu d'equilibri*
(b) *Establir un preu mínim superior al preu d'equilibri*
(c) *Eliminar un preu màxim superior al preu d'equilibri*
(d) *Que la funció d'oferta de mercat es desplaci a l'esquerra*

64. *Forçar un monopolista a actuar com a productor preu acceptant pot provocar una reducció*
(a) *de l'excedent total*
(b) *de la quantitat intercanviada*
(c) *del preu de mercat*
(d) *Res de l'anterior*

65. *El Teorema de la mà invisible parla de*
(a) *la recaptació impositiva*
(b) *l'excés de demanda*
(c) *la regla del costat curt*
(d) *Res de l'anterior*

66. *Quins dels següents parells (p, q) pot representar un estat on es trobi un mercat competitiu amb funcions d'oferta i demanda de mercat $q^s = 3p$ i $q^d = 22 - 7p$?*
(a) *(1, 3)*
(b) *(3, 3)*
(c) *Res de l'anterior*
(d) *Res de l'anterior*

67. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat $q^s = 3p$ i $q^d = 22 - 7p$, si el preu de mercat és $p = 1$, les forces de mercat faran que aquest preu tendeixi a*
(a) *augmentar*
(b) *disminuir*
(c) *no canviar*
(d) *Les forces de mercat no impliquen res*

68. *Amb funcions d'oferta i demanda de mercat ben comportades, hi ha un preu màxim superior al preu d'equilibri. Quina funció i en quina direcció s'ha de desplaçar per a fer la mesura efectiva?*
(a) *Oferta, a la dreta*
(b) *Oferta, a l'esquerra*
(c) *Demanda, a l'esquerra*
(d) *Res de l'anterior*

68. *Establir un preu màxim té en comú amb establir un preu mínim que totes dues són mesures que*
(a) *poden ser inefectives*
(b) *creen un excés de demanda*
(c) *creen un excés d'oferta*
(d) *fan sempre impossible que s'assoleixi l'equilibri de mercat*

Versió: 18 de setembre de 2008