Tema 1. Què fa que uns països siguin més rics que d'altres?

➤ El model de creixement econòmic de Solow i Swan

Robert Merton Solow (1924)
http://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Solow
http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1987/solow-autobio.html

Economista estatunidenc. Al 1987, va rebre *The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel* (*Premi del Banc de Suècia en Ciències Econòmiques en Memòria d'Alfred Nobel* o *Premi Nobel d'Economia*) per les seves aportacions a la teoria del creixement econòmic.
http://ca.wikipedia.org/wiki/Premi_Nobel_d%27Economia
http://cepa.newschool.edu/~het/essays/growth/neoclass/solowgr.htm

Trevor Swan (1918–1989)
http://en.wikipedia.org/wiki/Trevor_Swan

Economista australià. Va desenvolupar de manera independent el mateix model de creixement econòmic que Robert Solow i el va publicar el mateix any que Solow (1956). A la Wikipèdia es diu que és considerat l'economista més gran que ha produït Austràlia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Exogenous_growth_model

1. IL·LUSTRACIÓ: ZIMBABUE (2008)

La Fig. 1 mostra un dels bitllets de 100 miliards (= 1×10^{11}) de dòlars zimbabuesos emesos pel banc central de Zimbabue (http://www.rbz.co.zw/) al juliol del 2008. Vol això dir que Zimbabue és un país ric?

- Com determinar si és preferible tenir el bitllet de la Fig. 1 o, per exemple, un bitllet de 100 €? Una resposta la dóna el concepte de poder adquisitiu (o poder de compra). En el moment de l'emissió, amb un bitllet de 100 miliards només es podia comprar un pa de barra (o tres ous). Com més creixen els preus, menys poder adquisitiu té un bitllet. Al juliol del 2008, quan el govern la va deixar de fer pública, la taxa d'inflació anual a Zimbabue era la més alta del món: 231.000.000%. Es diu que la utilitat més gran dels bitllets de millions de dòlars s'aconsegueix fent-los servir com a paper higiènic i que és més barat fer foc amb bitllets de baixa denominació que amb els diaris.
  http://en.wikipedia.org/wiki/Zimbabwean_dollar
  http://www.news.com.au/heraldsun/story/0,21985,24074952-5012751,00.html

Fig. 1. Un bitllet de 0'1 bilions de dòlars zimbabuesos (observa que el bitllet té data de caducitat)
http://www.hottnez.com/the-10-poorest-countries-of-the-world/

- El 16 de gener de 2009 s'anuncià l'emissió del bitllet de 100 bilions (= 1×10^{14}) de dòlars zimbabuesos, que té el rècord mundial de ser el bitllet que porta escrits més zeros. En el moment d'emetre'l, aquest bitllet no podia comprar més de 20 pans de barra.
  http://news.bbc.co.uk/2/hi/africa/7832601.stm
  http://en.wikipedia.org/wiki/Banknotes_of_the_Reserve_Bank_of_Zimbabwe
  http://www.panapress.com/freenews.asp?code=eng008171&dte=16/01/2009

2. QUÈ ÉS LA RIQUESA?

Per a establir si Zimbabue és un país ric o no, primer cal definir què s'entén per "ric". En Economia, la riquesa d'un país no consisteix en bitllets de banc sinó en allò que la gent vol i pot adquirir amb els bitllets. Segons aquesta interpretació, la riquesa d'un país està relacionada amb la quantitat de béns i serveis de què disposen els habitants del país. Per tant, un país on no es produeix cap bé ni cap servei seria el país més pobre del món.

3. DEFINICIÓ: PRODUCCIÓ AGREGADA

La producció agregada d'una economia és un número que mesura la producció total de béns ("béns" significarà sempre "béns i serveis") llestos per a ser consumits realitzada a l'economia durant un període de temps ("bé" és bàsicament tot el que es pot comprar a una botiga).

- La producció agregada també és un indicador de la dimensió d'una economia. La Fig. 2 mostra el rànquing mundial d'economies en termes de producció agregada (mesurada en dòlars de paritat del poder adquisitiu; aquest terme s'explica al Tema 7).

1	World	$ 65,610,000,000,000	9	Russia	$ 2,097,000,000,000
2	European Union	$ 14,430,000,000,000	10	France	$ 2,075,000,000,000
3	United States	$ 13,780,000,000,000	11	Brazil	$ 1,849,000,000,000
4	China	$ 7,099,000,000,000	12	Italy	$ 1,800,000,000,000
5	Japan	$ 4,272,000,000,000	13	Spain	$ 1,361,000,000,000
6	India	$ 2,966,000,000,000	14	Mexico	$ 1,353,000,000,000
7	Germany	$ 2,807,000,000,000	15	Canada	$ 1,271,000,000,000
8	United Kingdom	$ 2,130,000,000,000	16	Korea, South	$ 1,206,000,000,000

Fig. 2. Producció agregada en dòlars (dades estimades de 2007)
https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2001rank.html

- La producció agregada dóna una mesura de riquesa absoluta o global d'un país. Segons aquest criteri, Índia és un país més ric que Espanya. Sembla, però, més rellevant l'ús de mesures de riquesa relativa, que es basen en relacionar la producció agregada d'una economia amb la població total. Una possible tal mesura determina quina part de la producció agregada correspon, com a mitjana, a cada persona.

1	World	6,706,993,152	10	Nigeria	146,255,312
2	China	1,330,044,544	11	Russia	140,702,096
3	India	1,147,995,904	12	Japan	127,288,416
4	European Union	491,018,683	13	Mexico	109,955,400
5	United States	303,824,640	14	Philippines	96,061,680
6	Indonesia	237,512,352	15	Vietnam	86,116,560
7	Brazil	196,342,592	16	Ethiopia	82,544,840
8	Pakistan	172,800,048	17	Germany	82,369,552
9	Bangladesh	153,546,896	31	Spain	40,491,052

Fig. 3. Població (dades estimades de juliol de 2008)
https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2119rank.html

4. DEFINICIÓ: PRODUCCIÓ PER CÀPITA

La producció per càpita d'una economia és la producció agregada de l'economia dividida per la població de l'economia i representa una aproximació de la riquesa que, com a mitjana, té l'habitant d'un país. Això fa que en ocasions s'identifiqui "riquesa" amb "producció per càpita".

- Es passarà per alt la inconsistència que suposa dividir una variable flux (una variable mesurada al llarg d'un període temps, com ara la producció agregada) per una variable estoc (variable mesurada en un moment del temps, com ara la població d'un país).

Any	Món	Àfrica	Àsia	Europa	Am. Llatina	Am. Nord	Oceania
1750	791 000	106 000	502 000	163 000	16 000	2 000	2 000
1800	978 000	107 000	635 000	203 000	24 000	7 000	2 000
1850	1 262 000	111 000	809 000	276 000	38 000	26 000	2 000
1900	1 650 000	133 000	947 000	408 000	74 000	82 000	6 000
1950	2 518 629	221 214	1 398 488	547 403	167 097	171 616	12 812
1955	2 755 823	246 746	1 541 947	575 184	190 797	186 884	14 265
1960	2 981 659	277 398	1 674 336	601 401	209 303	204 152	15 888
1965	3 334 874	313 744	1 899 424	634 026	250 452	219 570	17 657
1970	3 692 492	357 283	2 143 118	655 855	284 856	231 937	19 443
1975	4 068 109	408 160	2 397 512	675 542	321 906	243 425	21 564
1980	4 434 682	469 618	2 632 335	692 431	361 401	256 068	22 828
1985	4 830 979	541 814	2 887 552	706 009	401 469	269 456	24 678
1990	5 263 593	622 443	3 167 807	721 582	441 525	283 549	26 687
1995	5 674 380	707 462	3 430 052	727 405	481 099	299 438	28 924
2000	6 070 581	795 671	3 679 737	727 986	520 229	315 915	31 043
2005	6 453 628	887 964	3 917 508	724 722	558 281	332 156	32 998
Jul. 1 2008	6 706 993	972 752	4 053 868	731 683	577 147	337 168	34 375

Fig. 4. Població mundial (en milers), http://en.wikipedia.org/wiki/World_population, 23 gener 2009

- La producció per càpita estableix quina part de la producció agregada correspondria a cada individu si la producció agregada es repartís igualitàriament. Les Figs. 3 i 4 mostren informació sobre la població mundial. La Fig. 5 estableix el rànquing mundial d'economies en termes de producció per càpita.

- Segons el criteri de la producció per càpita, Espanya és un país més ric que Índia i, a més, Zimbabue resulta ser un dels països més pobres del món. D'aquí la paradoxa que bitllets amb molts zeros no siguin un símptoma de riquesa sinó de pobresa. La Fig. 6 situa geogràficament els països que es compten entre els més pobres del món.

- La producció per càpita s'empra també com a indicador del benestar o nivell de vida (*standard of living*) a una economia. Tot i que aquest indicador té limitacions, hi ha certa evidència empírica que suggereix que la producció per càpita està positivament correlacionada amb el nivell de vida. Les Figs. 7, 8, 9 i 10 mostren part d'aquesta evidència: les economies on més creix la producció per càpita són aquelles on hi ha un més alt nivell de vida.

- De tot l'anterior resulta que les economies riques són aquelles amb una producció per càpita més gran i que les més pobres són les que compten amb un capital per càpita més reduït. D'aquí se'n dedueix que la manera de transformar un país pobre en un de ric consisteix en fer créixer la seva producció per càpita del país pobre. D'això se'n diu creixement econòmic: apujar la producció per càpita.

1	Qatar	$ 87,600	2007 est.
2	Luxembourg	$ 79,400	2007 est.
3	Bermuda	$ 69,900	2004 est.
4	Jersey	$ 57,000	2005 est.
5	Kuwait	$ 55,900	2007 est.
6	Norway	$ 53,300	2007 est.
7	Brunei	$ 51,000	2007 est.
8	Singapore	$ 49,900	2007 est.
9	Ireland	$ 46,600	2007 est.
10	United States	$ 45,800	2007 est.
11	Guernsey	$ 44,600	2005
12	Cayman Islands	$ 43,800	2004 est.
13	Hong Kong	$ 42,000	2007 est.
14	Iceland	$ 40,400	2007 est.
15	Switzerland	$ 40,100	2007 est.
16	Austria	$ 39,300	2007 est.
17	Netherlands	$ 39,000	2007 est.
18	Andorra	$ 38,800	2005
19	Canada	$ 38,600	2007 est.
20	British Virgin Islands	$ 38,500	2004 est.
21	Gibraltar	$ 38,200	2005 est.
22	Sweden	$ 37,500	2007 est.
23	Australia	$ 37,300	2007 est.
24	Denmark	$ 37,200	2007 est
25	United Arab Emirates	$ 37,000	2007 est.
26	Belgium	$ 36,200	2007 est.
27	Finland	$ 36,000	2007 est.
28	Isle of Man	$ 35,000	2005 est.
29	United Kingdom	$ 35,000	2007 est.
30	Germany	$ 34,100	2007 est.
31	San Marino	$ 34,100	2004 est.
32	Bahrain	$ 33,900	2007 est.
33	Spain	$ 33,600	2007 est.
34	Japan	$ 33,500	2007 est.
35	European Union	$ 32,700	2007 est.
36	France	$ 32,600	2007 est.

194	Tuvalu	$ 1,600	2002 est.
195	Chad	$ 1,500	2007 est.
196	Bangladesh	$ 1,400	2007 est.
197	Zambia	$ 1,400	2007 est.
198	Benin	$ 1,400	2007 est.
199	Lesotho	$ 1,400	2007 est.
200	Ghana	$ 1,400	2007 est.
201	Haiti	$ 1,300	2007 est.
202	Tanzania	$ 1,300	2007 est.
203	Gambia, The	$ 1,200	2007 est.
204	Burkina Faso	$ 1,200	2007 est.
205	Comoros	$ 1,100	2007 est.
206	Guinea	$ 1,100	2007 est.
207	West Bank	$ 1,100	2006 est.
208	Mali	$ 1,100	2007 est.
209	Gaza Strip	$ 1,100	2006 est.
210	Afghanistan	$ 1,000	2007 est.
211	Uganda	$ 1,000	2007 est.
212	Nepal	$ 1,000	2007 est.
213	Tokelau	$ 1,000	1993 est.
214	Madagascar	$ 900	2007 est.
215	Togo	$ 900	2007 est.
216	Eritrea	$ 800	2007 est.
217	Rwanda	$ 800	2007 est.
218	Malawi	$ 800	2007 est.
219	Mozambique	$ 800	2007 est.
220	Central African Republic	$ 700	2007 est.
221	Niger	$ 700	2007 est.
222	Ethiopia	$ 700	2007 est.
223	Guinea-Bissau	$ 600	2007 est.
224	Sierra Leone	$ 600	2007 est.
225	Somalia	$ 600	2007 est.
226	Liberia	$ 500	2007 est.
227	Burundi	$ 300	2007 est.
228	Congo, Democratic Republic c	$ 300	2007 est.
229	Zimbabwe	$ 200	2007 est.

Fig. 5. Producció agregada per càpita en dòlars
https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2004rank.html

- Què causa i permet sostenir el creixement econòmic? La resposta a aquesta pregunta és problemàtica perquè no sempre és possible separar les causes dels efectes del creixement econòmic. Per exemple, la Fig. 11 suggereix l'existència d'una relació inversa entre el grau de corrupció i la riquesa d'un país. Aquesta relació, però, no aclara si un país és ric perquè té poca corrupció o té poca corrupció perquè és ric. El mateix succeeix amb les Figs. 7 i 8 (riquesa i "felicitat"), 9 i 10 (riquesa i esperança de vida), 12 (creixement de la riquesa i qualitat de la gestió pública), 13 (riquesa i escolarització) i 14 (riquesa i coeficient d'intel·ligència).

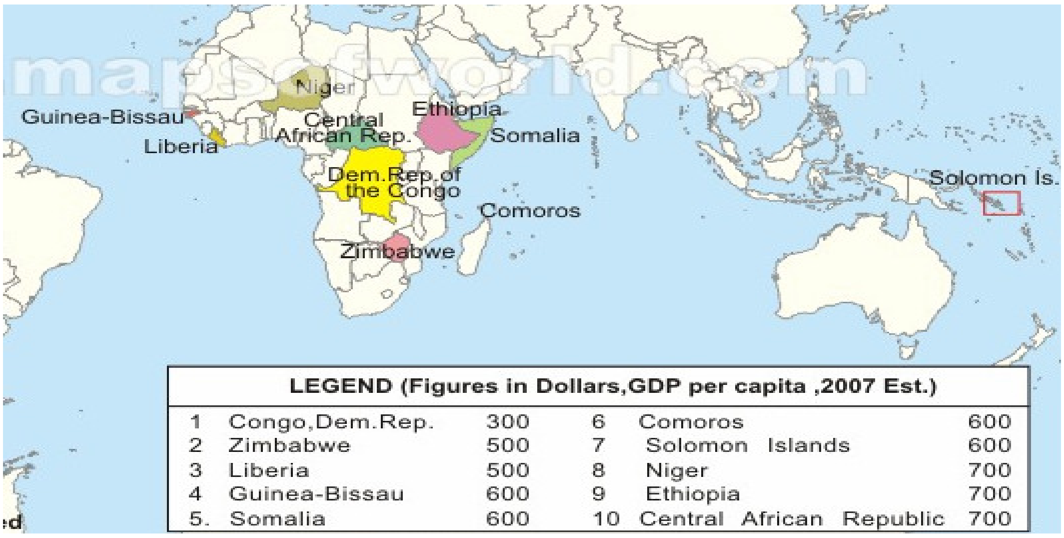
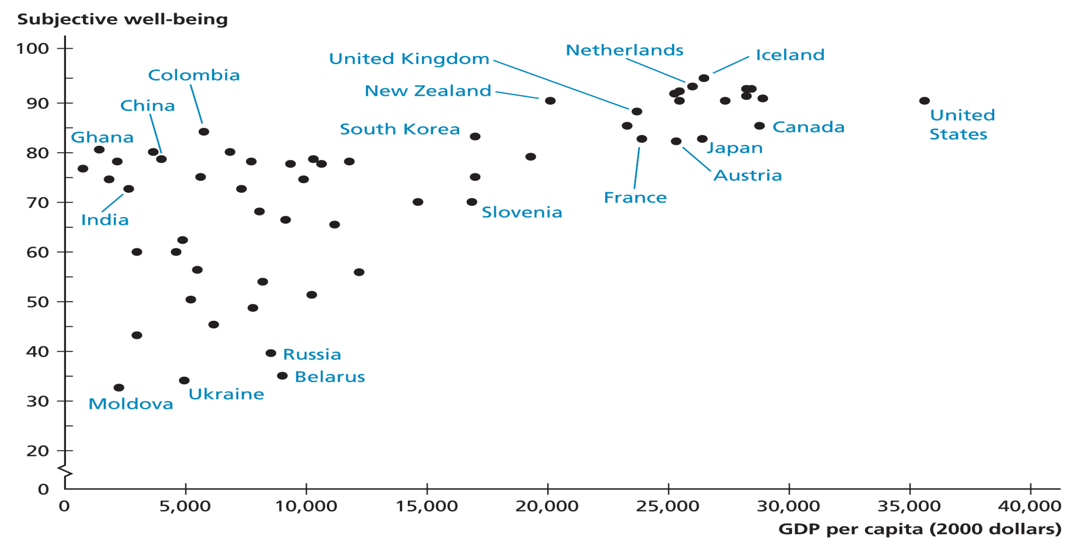


Fig. 6. Els 10 països més pobres del món (GDP = *Gross Domestic Product*)
http://www.mapsofworld.com/world-top-ten/world-top-ten-poorest-countries-map.html
http://www.hottnez.com/the-10-poorest-countries-of-the-world/
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_GDP_(PPP)_per_capita

FIGURE 17.2
Relationship Between Income and Happiness in a Cross-Section of Countries

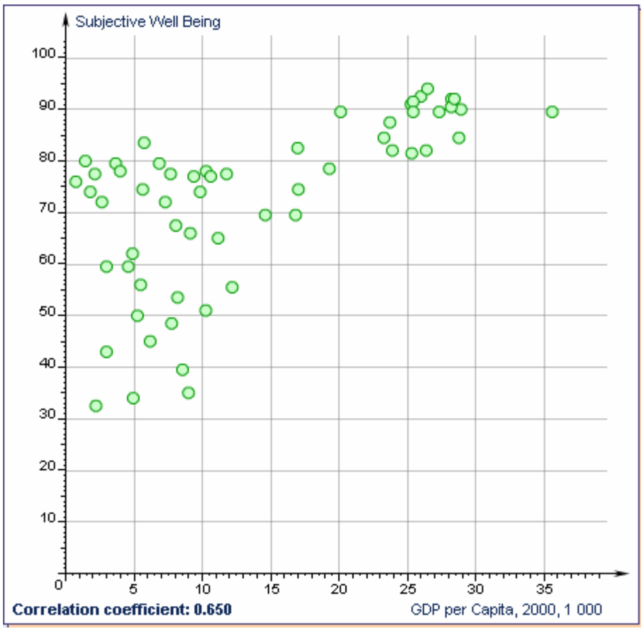


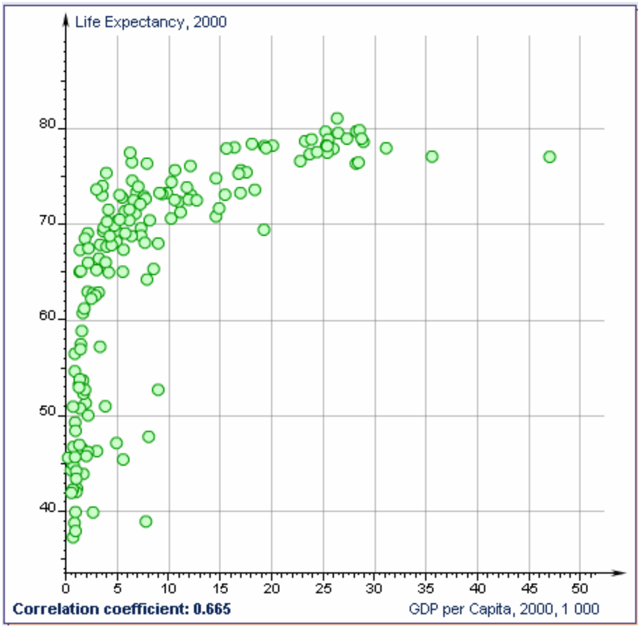
Source: Inglehart and Klingerman (2000), Table 7.1.

Fig. 7. Correlació positiva entre la producció per càpita i el benestar subjectiu
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

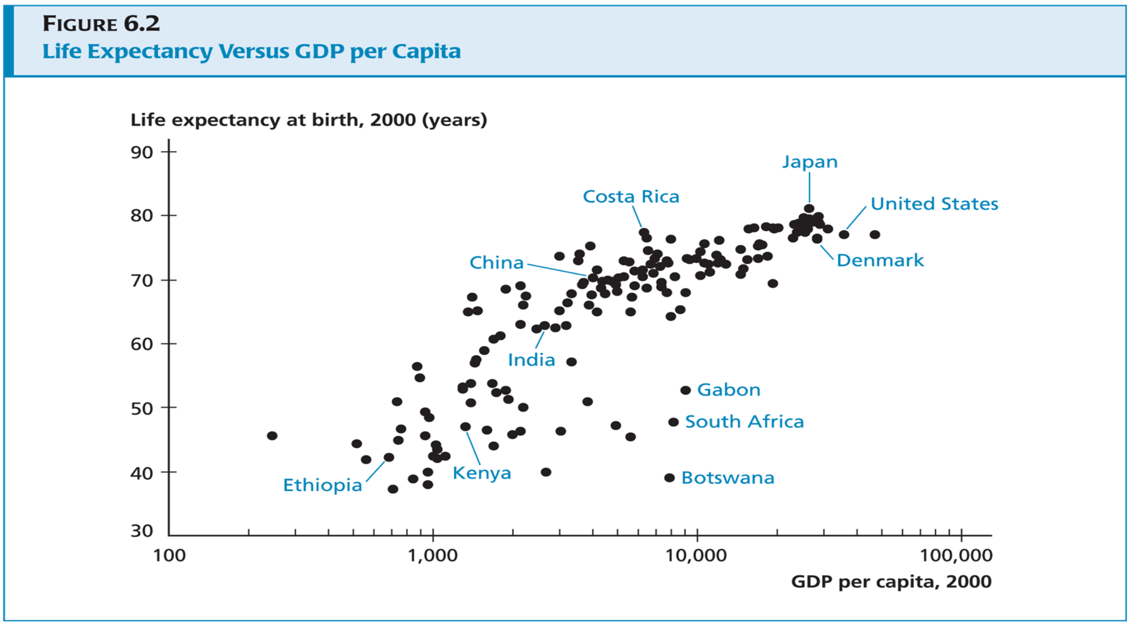
5. DEFINICIÓ: CREIXEMENT D'UNA ECONOMIA

Una economia experimenta creixement econòmic durant un període de temps donat si la producció (agregada o per càpita) al final del període és superior a la producció (agregada o per càpita) a l'inici. El creixement es diu sostingut si la producció ha anat creixent contínuament al llarg del període o, més en general, si la producció ha mostrat, durant el període, una tendència a créixer.





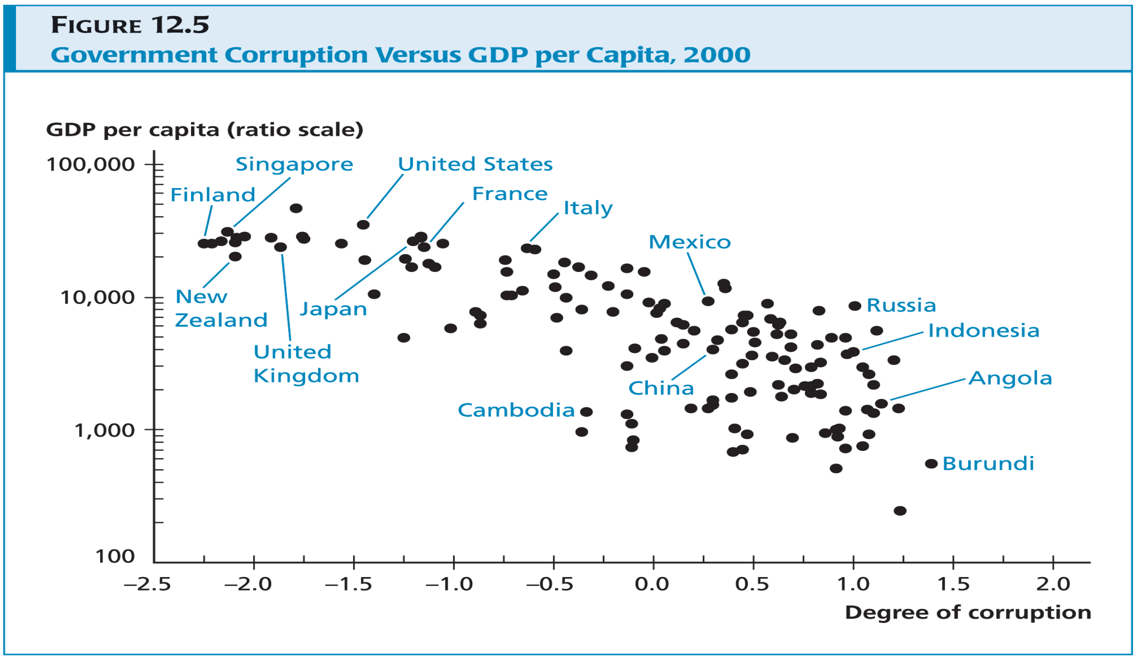
Figs. 8 i 9. Correlació positiva entre producció per càpita i tant benestar subjectiu com esperança de vida (fet amb *Data Plotter*, http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/22/5638/1443513.cw/index.html)



Source: Heston et al. (2002), World Bank (2003b).

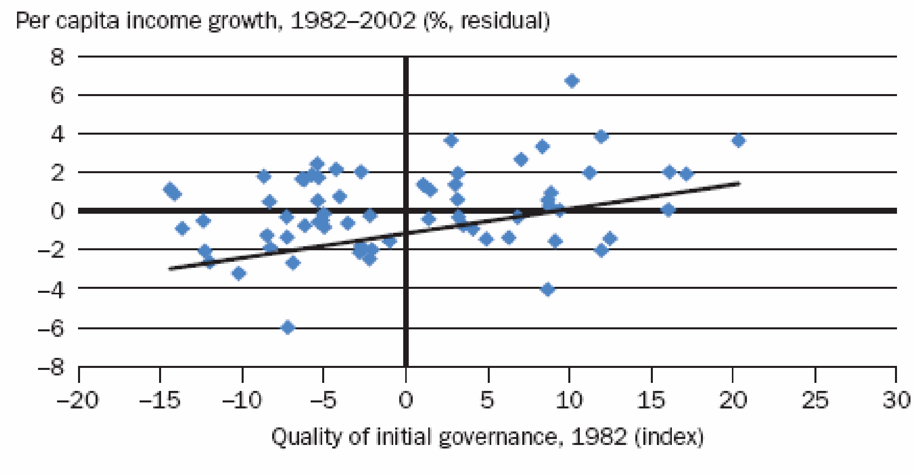
Fig. 10. Correlació positiva entre la producció per càpita i l'esperança de vida
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

- Tant en el curt termini (períodes de temps mesurats en mesos) com en el mitjà termini (períodes de temps mesurats en semestres/anys), la noció de creixement que es considera rellevant és la de la producció agregada. En tal cas, el creixement econòmic es refereix a l'augment de la riquesa total de l'economia. En canvi, en el llarg termini (períodes mesurats en, almenys, decenes anys), la mesura apropiada és la producció per càpita i, per tant, creixement econòmic es refereix a l'augment de la riquesa mitjana dels individus de l'economia.



Source: Kaufmann, Kray, and Zoido-Lobatón (2002).

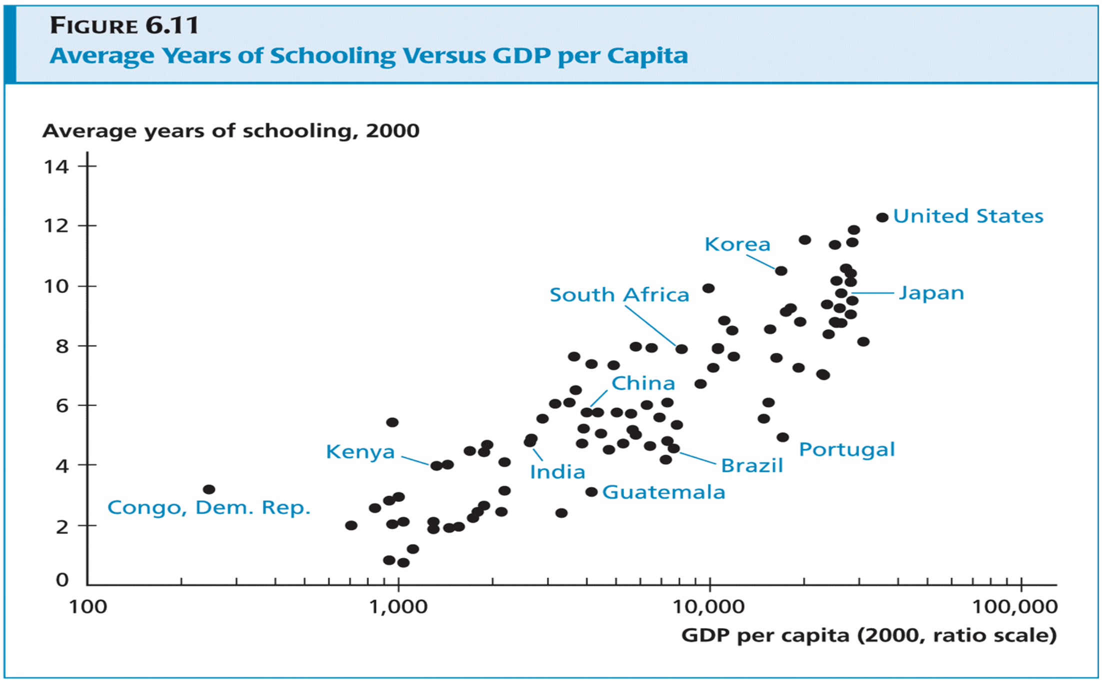
Fig. 11. Correlació negativa entre el grau de corrupció i la producció per càpita
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html



Source: Knack 2006.

Fig. 12. Correlació positiva entre qualitat de la gestió pública i creixement de la producció per càpita
http://siteresources.worldbank.org/DATASTATISTICS/Resources/WDI07section5-intro.pdf

- Aquest Tema 1 analitza el problema del creixement econòmic en el llarg termini. La resta de temes analitzen el creixement (o decreixement) econòmic en el curt i mitjà terminis. Per al curt i mitjà terminis, en comptes de creixement (o decreixement) econòmic es parla del cicle econòmic. De fet, en el curt i mitjà terminis, la producció agregada experimenta fluctuacions de manera més o menys regular. I com la població roman aproximadament constant en el curt i mitjà terminis, l'evolució de la producció agregada és un relativament bon indicador de l'evolució de la producció per càpita.



Source: Heston et al. (2002), Barro and Lee (2000).

Fig. 13. Correlació positiva entre els anys d'escolarització i la producció per càpita
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

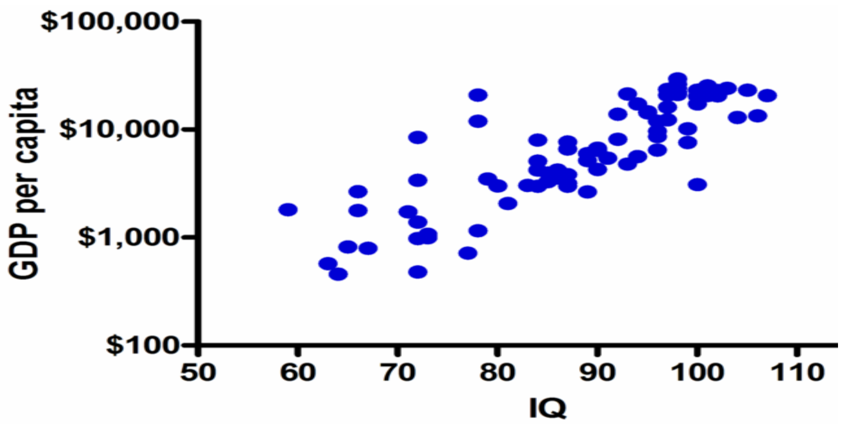


Fig. 14. Correlació entre la producció per càpita i el coeficient d'intel·ligència
http://en.wikipedia.org/wiki/IQ_and_the_Wealth_of_Nations

- Al contrari, en el llarg termini, la producció agregada tendeix a créixer de manera contínua (ja que els períodes de decreixement acostumen a ser de curta durada) i, atès que la població tendeix a variar, l'evolució de la producció agregada deixa de ser un bon indicador de l'evolució de la producció per càpita. Per aquest motiu, l'èmfasi de l'estudi d'una economia en el llarg termini és la producció per càpita: la capacitat de l'economia de transformar la riquesa total en riquesa individual. Si no es diu el contrari, en endavant, "creixement" voldrà dir "creixement econòmic en el llarg termini".

- La Fig. 15 mostra el creixement experimentat, durant un segle i mig, pel món, Espanya, Europa Occidental i els EUA (com es tracta del llarg termini, el termes "riquesa" i "creixement" es refereixen a la producció per càpita).

- <u>La distància horitzontal entre les gràfiques mesura la diferència de riquesa en anys</u>. Per exemple, la línia horitzontal traçada, aproximadament, sobre el valor 6000 permet determinar en quin any Espanya, els EUA i Europa Occidental van assolir el nivell de producció agregada per càpita que el món va assolir el 2001. Per als EUA, això va tenir lloc, aproximadament, a mitjans de la dècada de 1920; per a l'Europa Occidental, 30 anys després; i per a Espanya, 45 anys després. Per tant, al 2001, en termes de riquesa, el món duia un retard d'uns 75 anys en relació amb els EUA. D'altra banda, Espanya portava al 2001 un retard, en relació amb els EUA, d'uns 30 anys. Això indica que, en els últims 30 anys, Espanya ha retallat 15 anys de retard en relació amb els EUA.

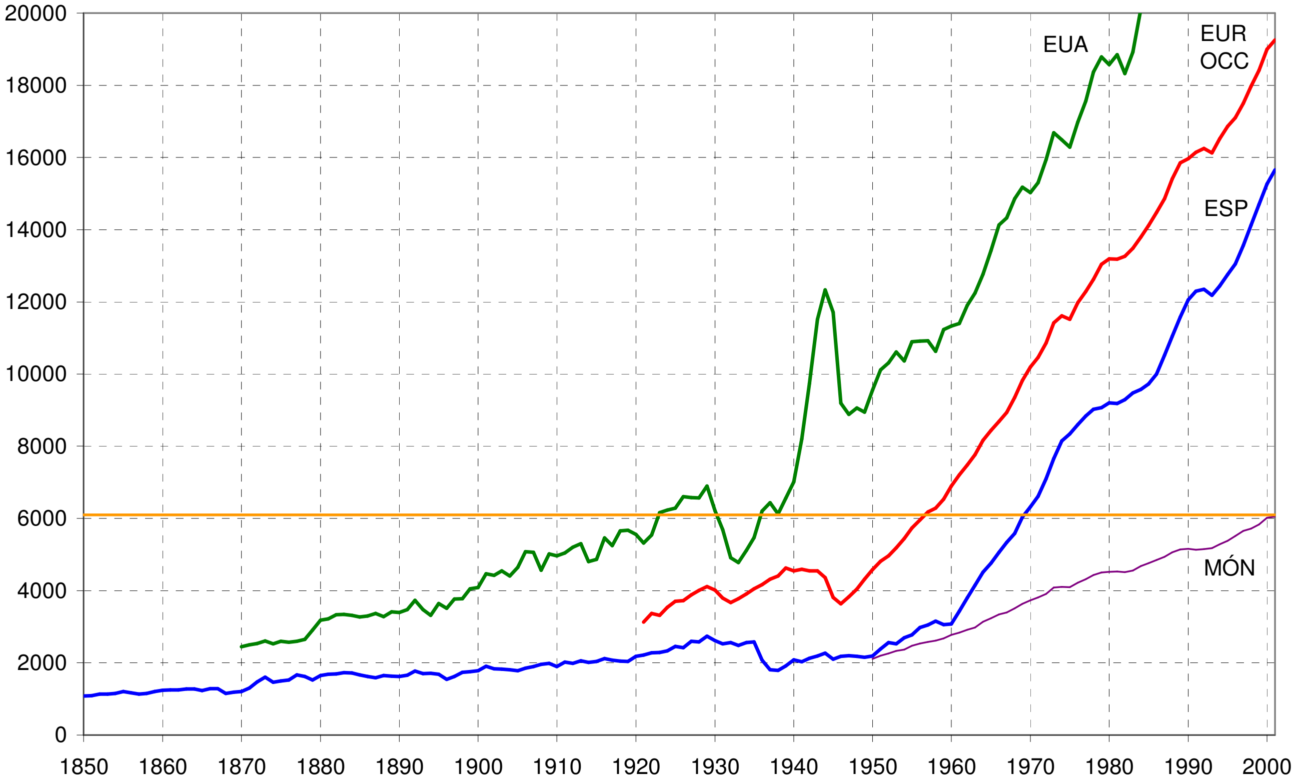


Fig. 15. Producció agregada per càpita, 1850–2001, milions de dòlars internacionals de 1990 Geary-Khamis. Font: Angus Maddison, *The World Economy: Historical Statistics* (2003, *OECD Development Centre*, www.oecd.org/dev)

- <u>La distància vertical entre les gràfiques mesura la diferència de riquesa en dòlars</u>. Per exemple, a mitjans dels anys 1930, els EUA tenien el doble de riquesa que el món; uns 50 anys després, tenien el quàdruple. Al 1950, Espanya tenia la mateixa riquesa que el món, però al 2001 tenia dues vegades i mitja més riquesa: l'espanyol mitjà era ja dues vegades i mitja més ric que l'ésser humà mitjà.

- Les Figs. 16 i 17 indiquen que el camí del creixement no és sempre fàcil. Malgrat les experiències positives dels països actualment "rics", <u>el creixement no es produeix de manera automàtica ni està lliure d'obstacles</u>. Per això és tant important conèixer aquests obstacles i esbrinar com superar-los. Tot i que el creixement és un llibre que s'escriu contínuament, els finals d'alguns capítols no són feliços. La Fig. 16 mostra el cas entre Canadà i Argentina. La Fig. 17 mostra el cas entre Indonèsia i Nigèria.

- Durant el primer terç del segle XX, Canadà i Argentina eren economies similars que portaven trajectòries similars. Però al mitjans de 1930 alguna cosa tingué lloc que provocà una divergència de trajectòries que va fer que, al 2001, el canadenc mitjà fos gairebé el triple de ric que l'argentí mitjà. Una part del problema consisteix en entendre perquè això va succeir. L'altra, i potser més important, és descobrir si l'escletxa es pot tancar: hi ha res que es pugui fer per a què l'argentí mitjà torni a tenir la mateixa riquesa que el canadenc mitjà?

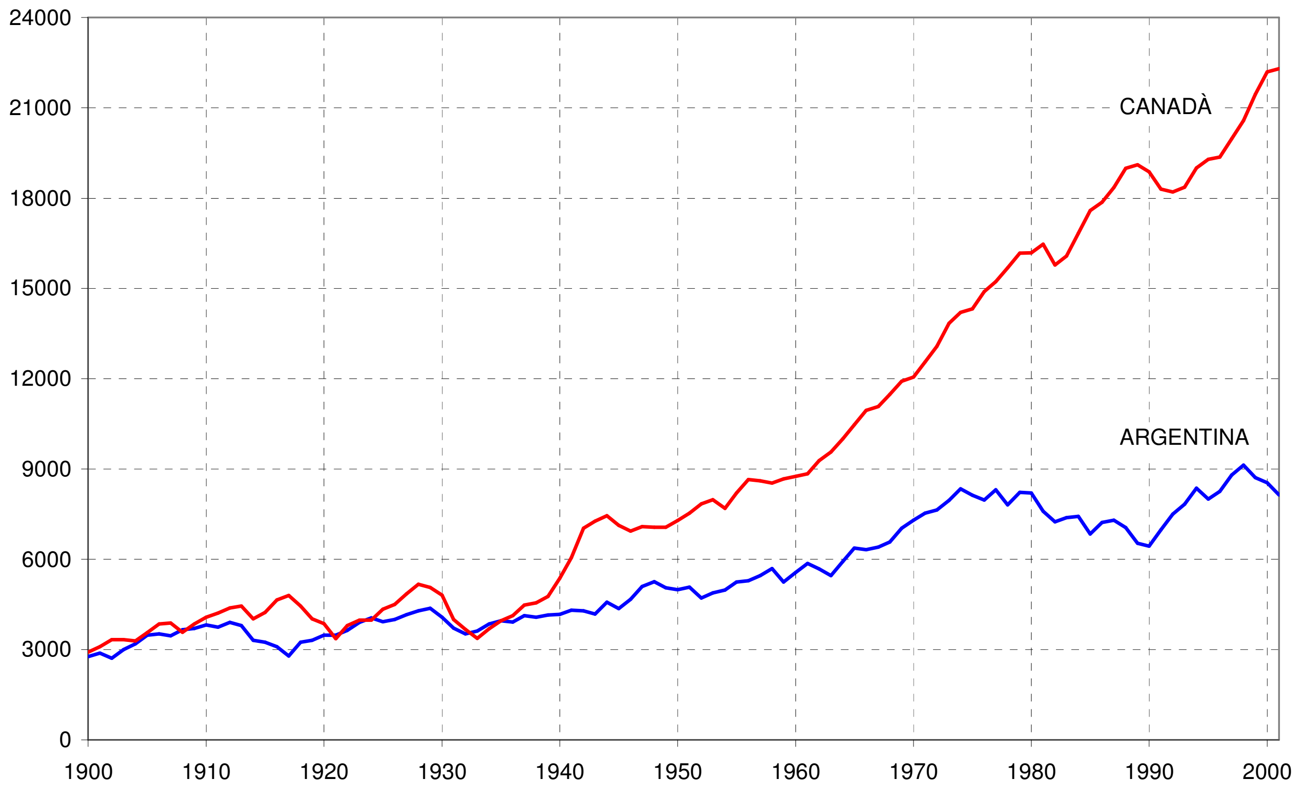


Fig. 16. Producció agregada per càpita, 1900-2001, Argentina i Canadà (font i unitats: Fig. 15)

- El cas d'Indonèsia i Nigèria és semblant, només que la separació de trajectòries tingué lloc a mitjans dels 1970. Com al cas de Canadà i Argentina, <u>el punt que marca la divergència se situa en un període de crisi econòmica global</u>, això és, en un període on la fase depressiva del cicle econòmic és particularment intensa i duradora. L'analogia mèdica és que una crisi global és com una malaltia severa de la qual alguns països no s'acaben de recuperar i han de patir greus seqüeles durant llargs períodes de temps.

- Una segona lliçó que es pot extreure de les Figs. 16 i 17 és que <u>el creixement</u> (com la salut) <u>no s'ha de donar per descomptat</u>: si no es prenen decisions adequades per a mantenir-lo, el creixement pot desaparèixer. Tant a la Fig. 15 com la 16 i la 17, la tendència al creixement que indiquen les gràfiques no treu que hi hagi ocasions en què hi ha intervals de decreixement. Per exemple, Canadà a inicis dels anys 1980 o dels 1990; o Argentina durant tota la dècada dels 1980. El perill d'aquests moments d'inflexió és la durada: si la recuperació és relativament ràpida (un parell d'anys), la davallada no té efectes molt significatius a llarg termini (Canadà a inicis dels 1980); però si la recuperació es fa esperar (Argentina als 1980), es pot comprometre la capacitat del país de retallar la diferència perduda amb altres països.

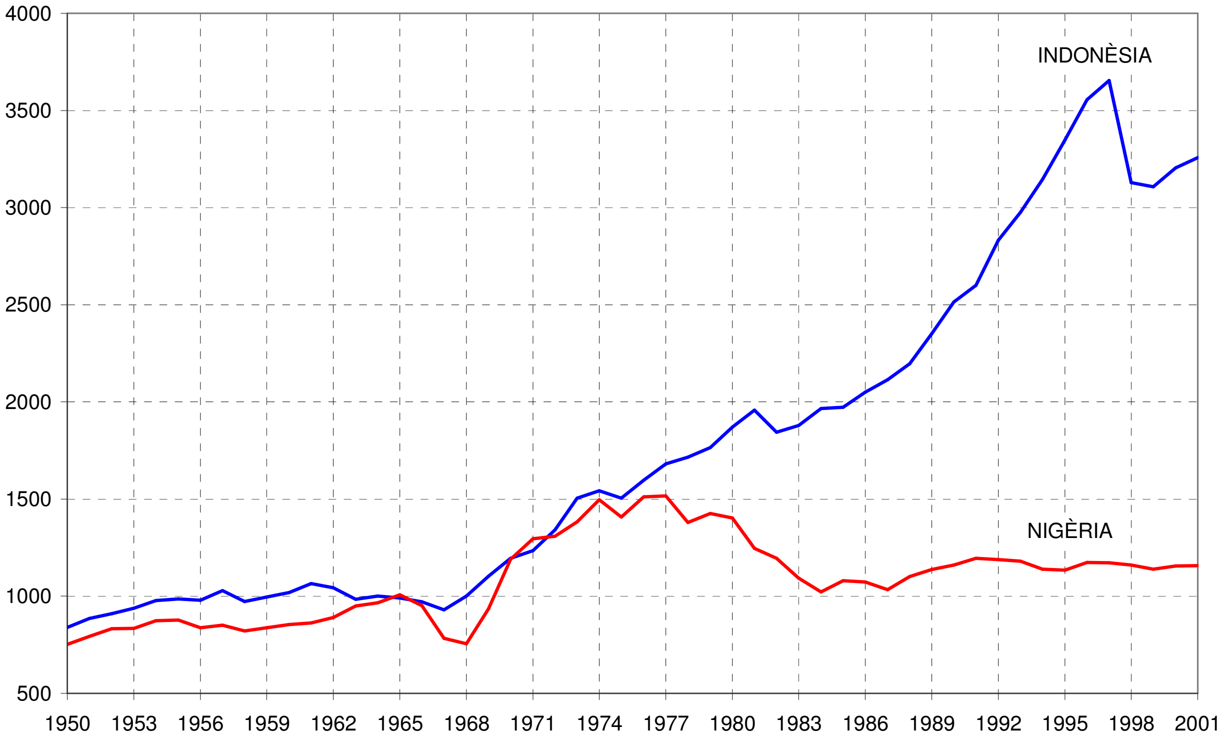


Fig. 17. Producció agregada per càpita, 1950-2001, Nigèria i Indonèsia (font i unitats: Fig. 15)

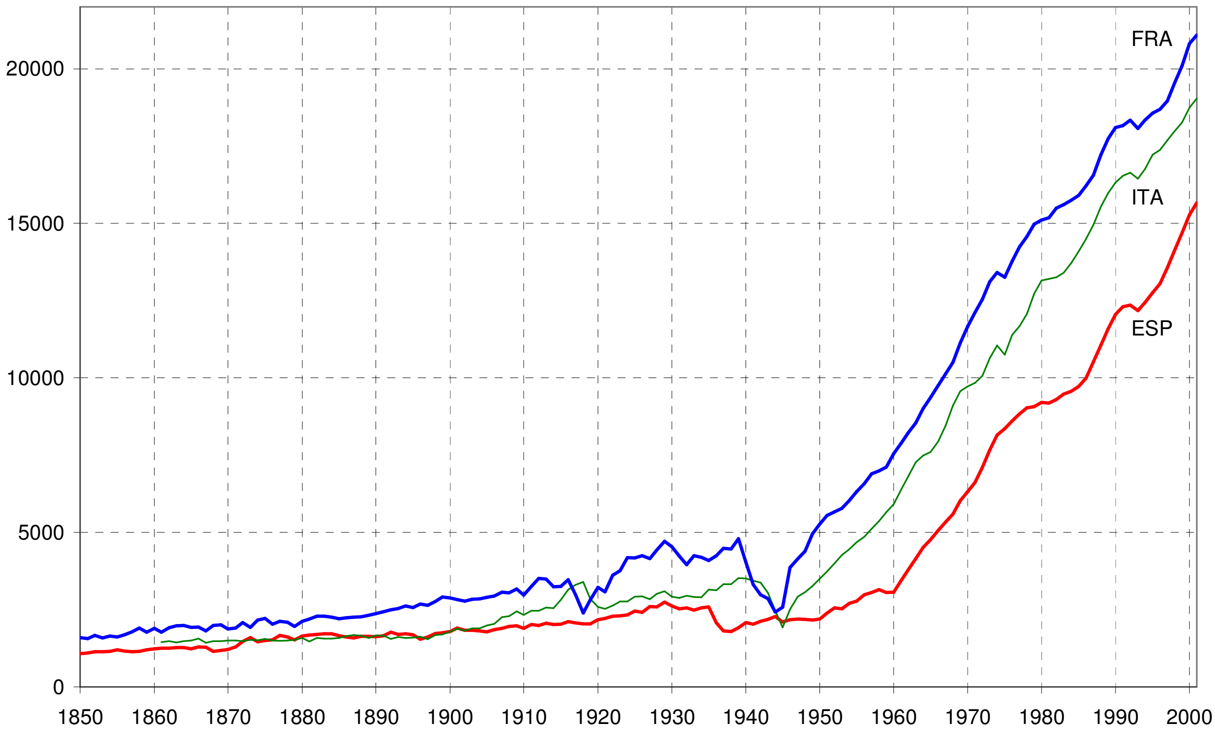


Fig. 18. Producció agregada per càpita, 1950-2001, Espanya, França i Itàlia (font i unitats: Fig. 15)

- El diferent ritme de creixement i la diferent reacció a episodis de decreixement planteja la qüestió de la convergència econòmica: els països que en algun moment es retarden, aconseguiran accelerar el seu creixement i enxampar els països que van per davant? O, com a mínim, aconseguiran els països que en algun moment es retarden establir i mantenir la dinàmica de creixement sostingut pròpia dels països més rics?

- La Fig. 18 exemplifica aquesta situació. França i Itàlia van engegar un procés de creixement sostingut a partir de la 2a Guerra Mundial. Espanya es va endarrerir uns 15 anys, ja que no va iniciar aquest procés fins al 1960. Però des d'aleshores, tot i que el diferencial d'anys s'ha mantingut aproximadament constant, Espanya s'ha afegit a la dinàmica de creixement sostingut a un ritme superior al de França i Itàlia. Gràcies al sosteniment d'un ritme superior de creixement, Espanya ha retallat les diferències de riquesa amb França i Itàlia.

- Per exemple, la riquesa de França al 1960 era més del doble de la riquesa a Espanya; en canvi, al 2001, la riquesa d'Espanya assolia prop del 80% de la de França. Aquest fet il·lustra el fenomen de la convergència de les economies: hi ha casos en què economies més pobres a la llarga s'apropen a les economies riques. Una de les grans qüestions macroeconòmiques és si, amb prou temps, totes les economies pobres del planeta atraparan a les economies riques. Atraparà Argentina a Canadà? Nigèria a Indonèsia? El món als EUA? El model de creixement presentat en el que resta de tema permet donar resposta a qüestions com aquestes.

6. MODEL SIMPLE D'UNA ECONOMIA

Una economia està formada, en essència, per tres elements: (i) un conjunt d'agents; (ii) les activitats econòmiques que aquests agents duen a terme; i (iii) els resultats d'aquestes activitats.

- El triple persones/activitats/resultats es correspon a grans trets amb els elements d'un joc simultani : jugadors/estratègies/pagaments. En conseqüència, una economia es podria representar i analitzar com un joc.

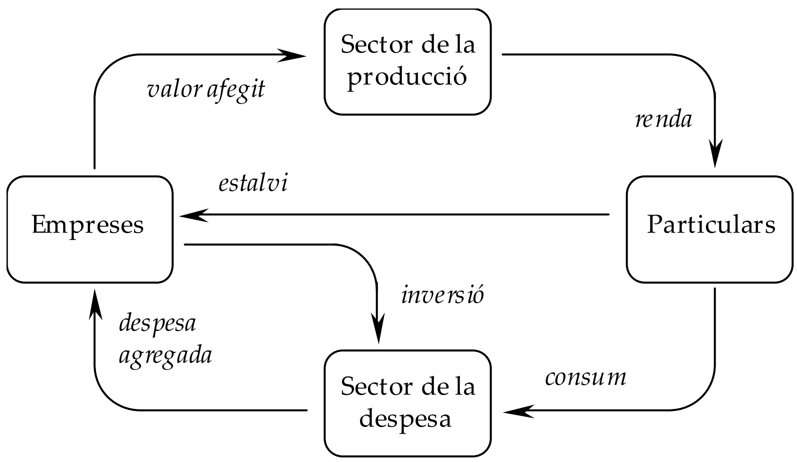


Fig. 19. Model d'una economia basat en el flux circular de la producció agregada

El conjunt d'agents d'una economia es divideix en dues categories: empreses i particulars. La simplicitat del model rau en el fet que no hi ha governs (no hi ha "estat" ni cap poder públic) ni altres economies (no hi ha empreses o particulars estrangers).

- Els particulars treballen per a les empreses i decideixen quina part de la renda que reben de les empreses la destinen a consumir i quina part l'estalvien. Les empreses es dediquen a produir, invertir i pagar als particulars per l'estalvi i pels serveis productius.

El resultat principal de les activitats desenvolupades pels agents de l'economia és la producció agregada. Totes les activitats tenen a veure, directament o indirecta, amb la producció agregada. Aquest conjunt d'activitats s'agrupen en dos sectors: el sector de la producció, que és on es produeixen els béns de l'economia, i el sector de la despesa, que és on els béns produïts s'assignen als diferents usos. En el model només hi ha dos usos dels béns: o es consumeixen o s'inverteixen. La Fig. 19 representa gràficament el model de l'economia que s'ha descrit.

- L'esquema de la Fig. 19 es basa en una analogia biològica: una economia és com un organisme viu que funciona gràcies a la circulació interna d'un "flux". Aquest flux és la producció agregada. L'única complicació és que el flux canvia de nom en funció de les parts de l'organisme per on transita.

- Les empreses són com la medu·la òssia: els centres de producció del flux. El valor de la producció agregada feta per totes les empreses s'anomena valor afegit i representa el valor que les empreses creen a partir de tot el que intervé en el procés de producció (els factors de producció). Per exemple, disposar de totes les peces que formen un cotxe no és el mateix que tenir el cotxe muntat. Reunir les peces i produir el cotxe crea "valor": tenir un cotxe muntat és més (producció) que tenir només les peces del cotxe.

- El valor afegit es reparteix entre tots els agents que han col·laborat a generar la producció agregada. La remuneració que es fa a aquests agents com a contrapartida als serveis de producció facilitats a les empreses s'anomena renda. La renda és el nom que rep el valor afegit quan es distribueix entre els factors de producció.

- A continuació la renda s'utilitza. Els dos usos bàsics són consumir-la i estalviar-la. Però l'estalvi és inversió: retornar una part de la producció al procés productiu. Per tant, la idea és que la renda es reparteix entre particulars i empreses. La part de la renda en mans dels particulars es consumeix; la part en mans de les empreses s'inverteix. Consum i inversió són, en aquest model simple, tots els usos que es poden donar a la renda. Quan la renda s'utilitza es transforma en despesa agregada que, en aquest model, només té dos components: consum i inversió.

- Finalment, l'expectativa futura de més despesa agregada és el que engega novament el procés de producció o de generació de valor afegit.

El sector de la producció està representat per dos elements: les dotacions de factors de producció de l'economia i l'estat de la tecnologia productiva.

- Els factors de producció són els béns que s'empren per a produir béns. Els factors de producció s'agrupen en dues categories, anomenades "capital" i "treball". El factor capital agrupa tots els mitjans de producció: eines, maquinària, instal·lacions productives, matèries primeres… El capital es veu afectat per la depreciació: quan s'empra en el procés productiu, el capital pateix desgast i, amb temps suficient, desapareix. El factor treball representa els serveis productius que aporten els particulars.

- L'estat de la tecnologia productiva es representa mitjançant una funció de producció agregada, que especifica quina és la producció agregada que es pot obtenir a partir de determinades quantitats de capital i treball.

El sector de la despesa determina quina part de la producció acaba en mans del factor treball i, per tant, s'acaba consumint i quina part acaba en mans del factor capital i, per tant, s'acaba invertint.

- El consum s'entén que permet la reposició del factor treball; la inversió s'entén que permet la reposició del factor capital.

La Fig. 20 mostra com interactuen els dos sectors de l'economia. L'economia parteix de certs nivells de capital i de treball i d'una determinada tecnologia productiva representada per una funció de producció. La funció de producció determina la quantitat de producció agregada que s'obté a partir de quantitats donades de factor capital i de factor treball.

- Si K representa la quantitat de factor capital, L la quantitat de factor treball i Y la producció agregada, una funció de producció agregada tindria la forma $Y = f(K, L)$ i indicaria la quantitat màxima de producció que es pot aconseguir amb les quantitats K i L. Per exemple, $Y = K + L$ o $Y = 2KL$ són funcions de producció.

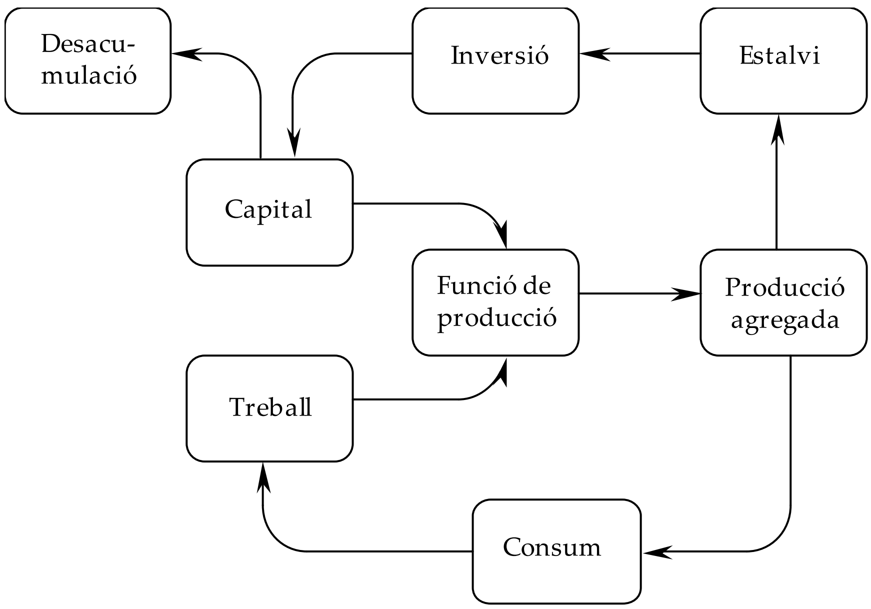


Fig. 20. Interacció dels dos sectors de l'economia

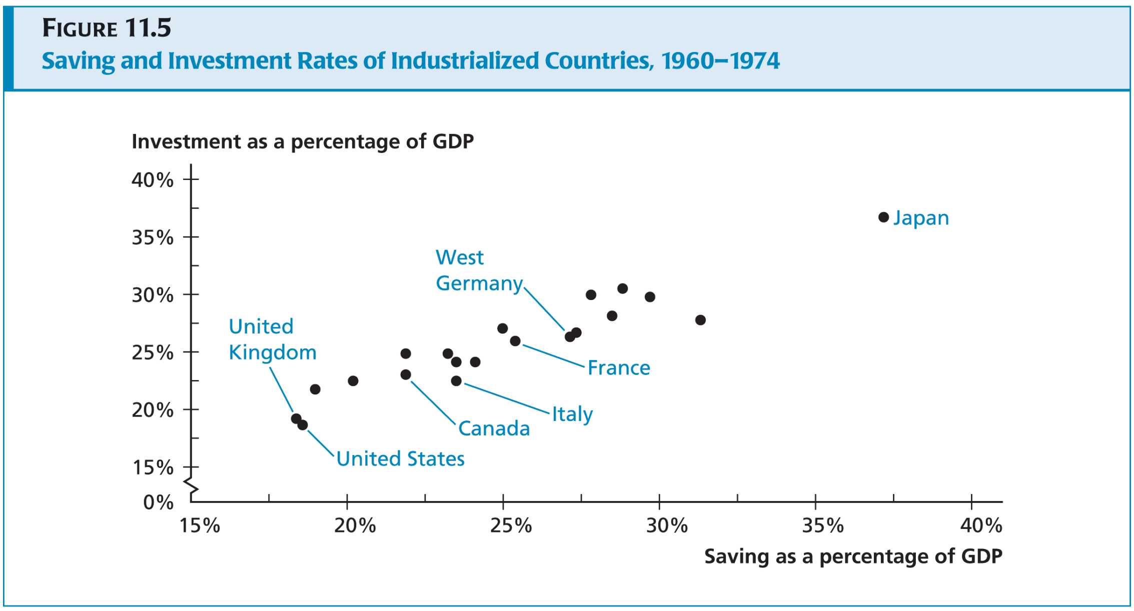
Quan els factors de producció es combinen amb la funció de producció es genera un determinat volum de producció agregada. Durant el procés de producció, una part del capital es deprecia i es perd.

La producció agregada entra en el sector de la despesa i es destina a dos usos: al consum i a la inversió. Aleshores l'economia entra en un nou cicle de producció on, si no canvia, la tecnologia productiva és la mateixa que inicialment però les dotacions de capital i treball seran, en principi, diferents: la quantitat de treball dependrà de com el consum ha permès incrementar la població i la quantitat de capital dependrà de la relació entre el capital perdut (la depreciació) i el capital guanyat (la inversió). El model de Solow i Swan formalitza matemàticament aquestes idees.

7. DEFINICIÓ: CONDICIÓ D'EQUILIBRI MACROECONÒMIC D'UNA ECONOMIA

El símbol	designa
Y	la producció agregada de l'economia
DA	la despesa agregada planejada de l'economia
C	el consum agregat planejat de l'economia
I	la inversió agregada planejada de l'economia
S	l'estalvi agregat planejat de l'economia

La condició d'equilibri macroeconòmic d'una economia estableix que $Y = DA$: la producció agregada de l'economia ha de ser igual a la despesa agregada de l'economia.



Source: Feldstein and Horioka (1980).

Fig. 21. Relació entre estalvi i inversió
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

- Per definició, $Y = C + S$: una part de la producció agregada es consumeix i la part restant s'estalvia. En el model simple d'una economia considerat, per definició, DA =

$C + I$: el sector de la despesa només dóna dues finalitats a la producció, o el consum o la inversió. El consum agregat representa la part de la producció agregada de la què en fan ús els particulars i la inversió agregada la part de la què en fan ús les empreses.

- Per tant, la condició d'equilibri macroeconòmic $Y = DA$ és equivalent a $C + S = C + I$. Atès que C es pot cancel·lar, la condició d'equilibri macroeconòmic (al model simple que s'està considerant) és equivalent a $S = I$: l'estalvi agregat planejat coincideix amb la inversió agregada planejada.

- Tot i la simplicitat del model, es disposa d'evidència empírica que avala la relació directa (positiva) entre consum i inversió agregats. La Fig. 21 mostra la relació positiva entre consum i inversió agregats com a percentatge de la producció agregada.

8. ELEMENTS DEL MODEL DE CREIXEMENT DE SOLOW I SWAN

El model simple d'una economia presentat anteriorment és el rerefons del model de Solow i Swan (model SS). Aquest és un model dinàmic que formalitza la Fig. 20 mitjançant equacions.

El símbol	designa
K	l'estoc de capital (mitjans de producció) de l'economia
L	tant la població total com el nombre de treballadors de l'economia
y	la producció agregada per càpita Y/L de l'economia
c	el consum agregat planejat per càpita C/L de l'economia
i	la inversió agregada planejada per càpita I/L de l'economia
s	l'estalvi agregat planejat per càpita S/L de l'economia
k	l'estoc de capital per càpita K/L de l'economia
d	la desacumulació (o disminució) de capital per càpita
n	taxa de creixement de la població de l'economia

El model SS s'estudiarà primer en el cas on $n = 0$: la població no varia. Posteriorment s'estudiarà el cas general on n és diferent de 0 (i de –1). D'ara endavant, s'anomenarà "model SS_0" al cas particular del model SS on s'assumeix que $n = 0$. El model SS_0 consisteix en tres equacions. La primera representa el procés de creació de producció per càpita y. La hipòtesi és que la producció mitjana y imputable a un treballador només depèn del capital de què, com a mitjana, disposa cada treballador (el capital per càpita k). En resum, la hipòtesi és que existeix una funció de producció per càpita f tal que $y = f(k)$.

- La funció f se suposa que compleix dues propietats. Primer, és una funció creixent: si un treballador disposa de més capital, aleshores el treballador pot produir més. I segon, la funció és còncava: l'augment de la producció (per càpita) provocat per unitats addicionals de capital (per càpita) és cada cop més petit. Per la propietat que f és creixent, posar a disposició d'un treballador unitats addicionals de capital fa que el treballador produeixi més. La Fig. 22 dóna evidència empírica a favor de la propietat.

- La segona propietat diu que aquests augments de la producció són cada cop més petits: incrementar unitat rere unitat el capital per càpita provoca cada vegada un augment més petit de la producció per càpita. En tal cas es diu que la funció de producció té una productivitat marginal decreixent: donar més capital a un treballador per a produir fa que el treballador cada cop pugui augmentar menys la seva producció. En termes matemàtics, la funció de productivitat marginal d'una funció de producció per càpita coincideix amb la derivada de la funció respecte de k

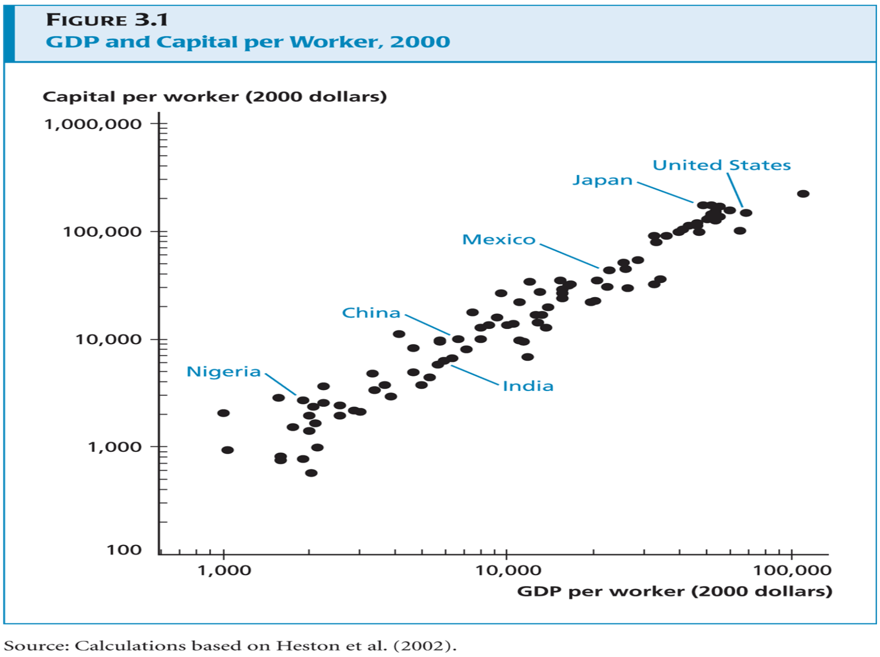


Fig. 22. Correlació positiva entre capital i producció per càpita
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

- Matemàticament parlant, la funció de productivitat marginal d'una funció de producció per càpita coincideix amb la derivada de la funció de producció respecte de k. Això vol dir que "productivitat marginal decreixent" vol dir "derivada de la funció de producció decreixent", la qual cosa vol dir que la derivada de la derivada pren valors negatius. En resum, la funció de producció és còncava: la derivada segona de la funció de producció és negativa.

- La Fig. 23 mostra el tipus de funció de producció que s'està considerant: una funció creixent però que creix cada cop menys (degut a la productivitat marginal decreixent). La funció indica, per a cada valor de k, quin és el valor corresponent $f(k)$ d'y.

- EXEMPLE. Una funció de producció per càpita f que satisfà les dues propietats anteriors és $f(k) = k^{1/2}$. Aquesta funció és creixent per a tot $k > 0$, ja que la derivada $\frac{\partial f}{\partial k}$ = ½·$k^{-1/2}$ de la funció f pren valors positius. La funció és còncava perquè la derivada segona $\frac{\partial^2 f}{\partial k^2}$ = –¼· $k^{-3/2}$ de la funció f pren valors negatius (fet que significa que la derivada primera és una funció decreixent).

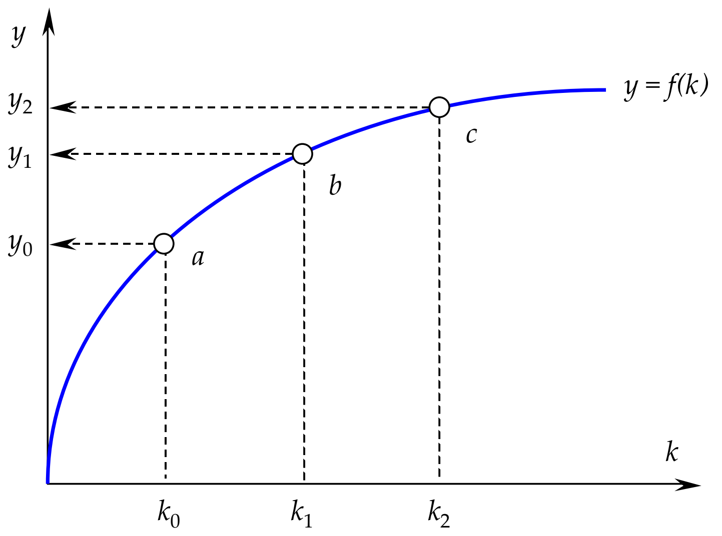


Fig. 23. Funció de producció per càpita

La segona equació del model representa el procés d'acumulació de capital per càpita k. La hipòtesi és que l'estalvi per càpita és una fracció fixa $0 < \sigma < 1$ de la producció per càpita. Això significa que, com a mitjana, cada individu estalvia la proporció σ de la producció que genera. La proporció σ s'anomena taxa d'estalvi i s'expressa en tant per u; multiplicant-la per 100, s'expressaria en tant per cent. Matemàticament, $s = \sigma \cdot y$. Atès que, per la primera equació, $y = f(k)$, la segona equació estableix que $s = \sigma \cdot f(k)$. La Fig. 24 mostra un exemple. La gràfica d'$s = \sigma \cdot f(k)$ queda sempre per sota de la gràfica d'$y = f(k)$, ja que $\sigma < 1$.

- L'equació $s = \sigma \cdot f(k)$ representa l'acumulació de capital per càpita quan s'assumeix la condició d'equilibri macroeconòmic $S = I$. Dividint per L, resulta $S/L = I/L$; això és, $s = i$. D'aquesta manera, quan s'assumeix l'equilibri macroeconòmic, $s = \sigma \cdot f(k)$ és equivalent a $i = \sigma \cdot f(k)$. Atès que "inversió" vol dir "acumulació de capital", l'equació $i = \sigma \cdot f(k)$ indica quant capital per càpita i s'acumula quan es parteix del capital per càpita k.

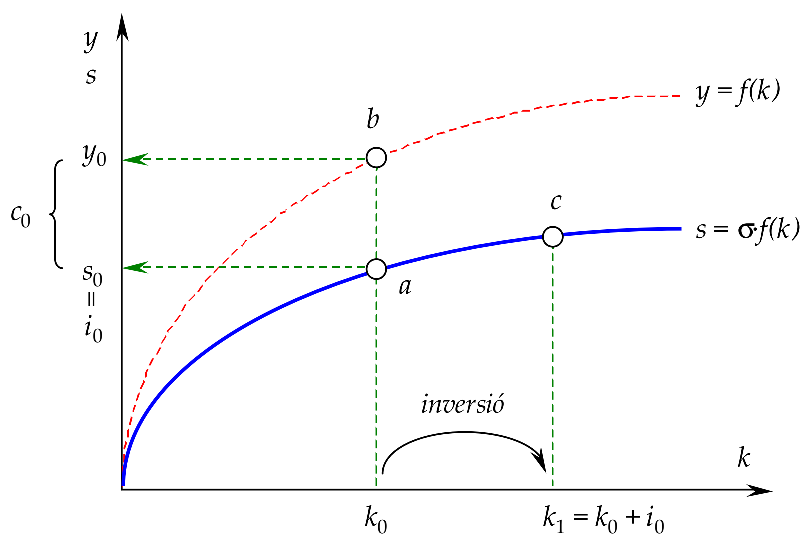


Fig. 24. Funció de estalvi per càpita

- EXEMPLE. Continuant amb la funció de producció $y = f(k) = k^{1/2}$, sigui $\sigma = ⅙$. Aquest valor indica que, al llarg de cada període, cada treballador estalvia la sisena part del que produeix. Expressat amb equacions, $s = ⅙\cdot y = ⅙\cdot k^{1/2}$. Sigui, per exemple, $k = 4$: cada treballador disposa de 4 unitats de capital per a produir. D'aquí que $s = ⅙\cdot 4^{1/2} = ⅙\cdot 2 = ⅓$. Per la condició d'equilibri macroeconòmic, $i = s = ⅓$. En conseqüència, quan $k = 4$, durant el període es realitza una inversió d'⅓. Si no hi hagués desacumulació de capital per càpita, resultaria que el capital per càpita per al següent període seria $k' = 4 + ⅓ = 13/3$. En tal cas, la inversió per càpita seria $i = ⅙\cdot f(13/3) = ⅙\cdot f(13/3) = ⅙\cdot 2'0816 \approx 0'347$ i el capital per càpita resultant (en absència de desacumulació) seria $k'' \approx k' + 0'347 \approx 13/3 + 0'347 \approx 4'68$.

<u>La tercera equació del model representa el procés de desacumulació de capital per càpita</u>. Atès que, al model SS_0, $n = 0$ se'n desprèn que <u>només hi ha una font de desacumulació (o pèrdua) de capital per càpita: la depreciació</u> (ja es veurà com $n > 0$ implica desacumulació).

- S'entén per depreciació la pèrdua de capital deguda a l'ús: fer servir el capital en el procés de producció implica perdre'n una part durant el procés de producció (ja que, durant el procés de producció, s'entén que el capital es "desgasta").

- La hipòtesi del model en relació amb la depreciació és que <u>cada període es deprecia una fracció fixa $0 < \delta < 1$ del capital per càpita</u>. La fracció δ s'anomena <u>taxa de depreciació</u> i, de la mateixa manera que la taxa d'estalvi σ, s'expressa en tant per u. La desacumulació d de capital per càpita vindrà donada per l'equació <u>$d = \delta\cdot k$</u>, que <u>és la tercera equació del model</u> (Fig. 25). Aquesta equació vol dir que començar el període amb l'estoc k de capital per càpita implica, per motiu de la depreciació, acabar-lo amb l'estoc $k - d$, que és igual a $k - \delta\cdot k$, que és igual a $(1 - \delta)k$. Per exemple, si $\delta = 0'1$ aleshores d'un període a un altre es perd un 10% del capital: amb $k = 4$, $d = \delta\cdot k = 0'1\cdot 4 = 0'4$ i, com a resultat, a l'inici del període següent, les 4 unitats de capital per càpita s'ha reduït a $(1 - \delta)k = 0'9\cdot 4 = 3'6$ (el 4 inicial menys el 0'4 depreciat).

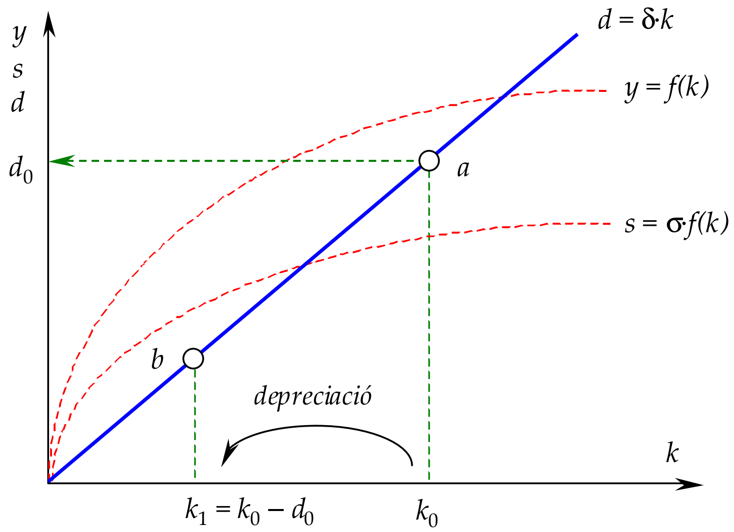


Fig. 25. Funció de desacumulació (depreciació) de capital per càpita

9. DEFINICIÓ: VARIACIÓ DEL CAPITAL PER CÀPITA DE L'ECONOMIA

La variació Δk del capital per càpita de l'economia del model de SS_0 és $\Delta k = i - d$, això és, la diferència entre l'acumulació de capital per càpita (la font de la qual és la inversió per càpita) i la desacumulació de capital per càpita (la font de la qual és la depreciació). Així doncs, Δk és la diferència entre la segona i la tercera equacions del model: $\Delta k = \sigma \cdot f(k) - \delta \cdot k$.

- Totes les variables del model estan referides a un període de temps t, motiu pel qual realment s'hauria d'escriure y_t, k_t, i_t, d_t, etcètera. Atès que totes les variables s'han referit fins ara al mateix període, no s'ha indicat t. En el cas de Δk es manté la convenció de no indicar t malgrat que, per definició, $\Delta k_t = k_{t+1} - k_t$: la variació de capital per càpita al període t és el capital per càpita al període següent $t + 1$ i el període inicial t.

- Si $\sigma \cdot f(k) > \delta \cdot k$, la inversió per càpita és superior a la depreciació per càpita durant el període t al qual es refereix k i, per tant, $\Delta k > 0$. Atès que $\Delta k > 0$ significa una variació positiva (augment) del capital per càpita, resulta que, durant el període t on l'estoc de capital per càpita és k, es genera una acumulació de capital per càpita que provoca que hi hagi més capital per càpita per al període següent $t + 1$.

- Si $\sigma \cdot f(k) < \delta \cdot k$, la inversió per càpita és inferior a la depreciació per càpita i, per tant, $\Delta k < 0$. Atès que $\Delta k < 0$ significa una variació negativa (disminució) del capital per càpita, resulta que, durant el període t on l'estoc de capital per càpita és k, té lloc una desacumulació de capital per càpita que provoca que hi hagi menys capital per càpita per al període següent $t + 1$.

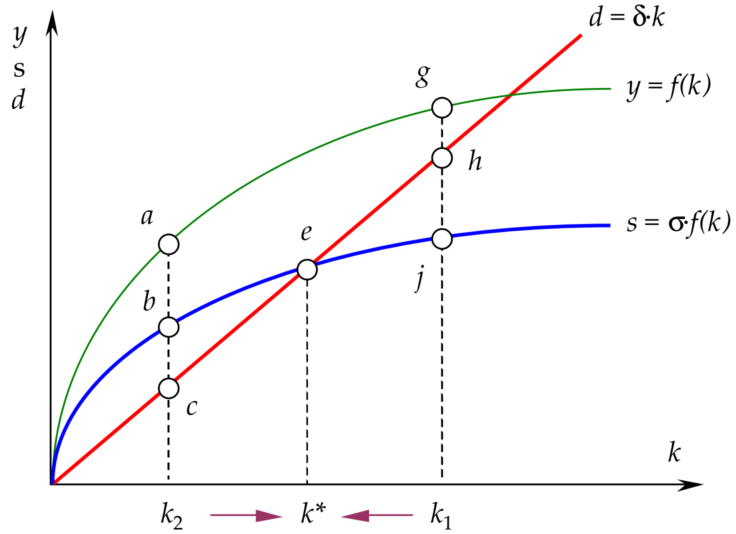


Fig. 26. Representació gràfica del model SS_0 i identificació de l'estat estacionari

La solució del model de SS_0 consisteix en tot valor $k \neq 0$ del capital per càpita que faci que $\Delta k = 0$. El valor $k \neq 0$ és una solució del model si, quan l'economia disposa de l'estoc de capital per càpita k, no es produeix ni acumulació ni desacumulació de capital per càpita. En tal cas, l'economia es troba en un "punt de repòs" anomenat "estat estacionari".

10. DEFINICIÓ: ESTAT ESTACIONARI DE L'ECONOMIA

Un estat estacionari de l'economia al model SS_0 és un estat de l'economia on $\Delta k = 0$: l'economia ni acumula ni desacumula capital per càpita.

- Quan $\Delta k > 0$, k creix i, per la primera equació del model, y també creix. Per contra, quan $\Delta k < 0$, k decreix i, per tant, y també decreix. Quan $\Delta k = 0$ no hi ha canvi de k ni d'y: la inversió coincideix amb la depreciació i ni s'acumula ni es desacumula capital per càpita.

- En sentit estricte, l'estat on $k = 0$ defineix un estat estacionari: aquell on no hi ha producció (i, per tant, no hi ha estalvi ni inversió) i no hi ha depreciació (perquè no hi ha capital). Aquest estat estacionari "degenerat" no és té en compte i, així, quan es parli d'estat estacionari s'entendrà que es tracta d'un estat estacionari on $k \neq 0$.

11. DEFINICIÓ: CONDICIÓ D'EQUILIBRI DEL PROCÉS D'ACUMULACIÓ DE CAPITAL

La condició d'equilibri del procés d'acumulació de capital per càpita al model SS_0 és la condició d'estat estacionari $\Delta k = 0$.

- Atès que $\Delta k = \sigma \cdot f(k) - \delta \cdot k$, la condició d'equilibri del procés d'acumulació de capital diu que $\sigma \cdot f(k) = \delta \cdot k$. Per tant, aquesta condició estableix que l'equilibri del procés d'acumulació de capital té lloc per a tot valor de k que iguala la segona i tercera equacions del model.

La solució del model SS_0 consisteix en el conjunt d'estats estacionaris de l'economia. Aquests estats es troben solucionant l'equació $\Delta k = 0$.

12. SOLUCIÓ ANALÍTICA DEL MODEL DE SOLOW I SWAN

El model SS_0 es resumeix en les tres equacions següents (representades a la Fig. 26).

- Equació que representa el procés de producció per càpita $y = f(k)$
- Equació que representa el procés d'acumulació de capital per càpita $s = \sigma \cdot f(k)$
- Equació que representa el procés de desacumulació de capital per càpita $d = \delta \cdot k$

Solucionar el model vol dir trobar els estats estacionaris de l'economia. Aquests estats es troben aplicant la condició d'equilibri $\Delta k = 0$ del procés d'acumulació de capital. Segons aquesta condició, $s = d$ i, per tant, $\sigma \cdot f(k) = \delta \cdot k$. L'equació $\sigma \cdot f(k) = \delta \cdot k$ només té una incògnita: k. D'una banda, les taxes σ i δ són paràmetres donats. D'una altra, la funció de producció f també es coneix. Així que tot es redueix a trobar tot valor k^* de k que satisfà $\sigma \cdot f(k^*) = \delta \cdot k^*$.

- EXEMPLE. Sigui una economia amb funció de producció per càpita $f(k) = 2k^{1/2}$, amb taxa d'estalvi σ = 0'4 i amb taxa de depreciació δ = 0'2. L'estat estacionari s'obté resolent l'equació $s \cdot f(k) = \delta \cdot k$. Així, $0'4 \cdot 2k^{1/2} = 0'2k$. Per tant, $4 = k^{1/2}$ i, d'aquí, $k^* = 16$. Això vol dir que, a l'únic estat estacionari (no degenerat) d'aquesta economia, $k^* = 16$.

- <u>Coneixent el valor de *k* a un estat estacionari, es pot determinar el valor de la resta de variables de l'estat estacionari</u>. Primer, la producció per càpita és $y^* = f(k^*) = 2 \cdot (16)^{1/2}$ = 8. Segon, la desacumulació per càpita és $d = \delta \cdot k^*$ = 0'2·16 = 3'2. Tercer, l'estalvi per càpita és $s^* = \sigma \cdot f(k^*)$ = 0'4·8 = 3'2. Quart, per la igualtat entre estalvi per càpita i la inversió per càpita, la inversió per càpita és i^* = 3'2. Cinquè, atès que la producció per càpita és la suma del consum per càpita i l'estalvi per càpita, el consum per càpita és $c^* = y^* - s^*$ = 8 – 3'2 = 4'8. Atès que s'està assumint la condició d'equilibri macroeconòmic, $i^* = s^*$ i, en conseqüència, també és cert que $c^* = y^* - i^*$.

- La Fig. 27 il·lustra numèricament la convergència de l'economia a l'estat estacionari quan es parteix inicialment d'un estoc de capital per càpita igual a 9. Sabent aquest valor, el model permet traçar l'evolució de totes les variables del model: capital per càpita, producció per càpita, inversió per càpita, estalvi per càpita, consum per càpita, desacumulació (per depreciació) de capital per càpita i variació del capital per càpita. La darrera fila mostra els valors als quals convergeix l'economia: els valors de l'únic estat estacionari d'aquesta economia calculats anteriorment.

període	*k*	*y*	*c*	*i*	$\delta \cdot k$	Δk
1	9	6	3'6	2'4	1'8	0'6
2	9'6	6'196	3'718	2'478	1'92	0'558
3	10'158	6'374	3'824	2'549	2'031	0'518
4	10'676	6'535	3'921	2'614	2'135	0'478
5	11'155	6'679	4'007	2'671	2'231	0'440
15	14'200	7'536	4'521	3'014	2'840	0'174
30	15'619	7'904	4'742	3'161	3'123	0'037
70	15'994	7'998	4'799	3'199	3'198	0'0005
100	15'999	7'999	4'799	3'199	3'199	0'00002
∞	16	8	4'8	3'2	3'2	0

Fig. 27. Convergència a l'estat estacionari amb $y = 2 \cdot k^{1/2}$, s = 0'4, δ = 0'2 i k_1 = 9

13. SOLUCIÓ GRÀFICA DEL MODEL DE SOLOW I SWAN (VERSIÓ SIMPLE)

A la Fig. 26, l'estat estacionari el determina la <u>intersecció</u> entre la funció d'inversió (i estalvi) per càpita $s = \sigma \cdot f(k)$ i la funció de desacumulació (depreciació) per càpita $d = \delta \cdot k$. El valor k^* és el capital per càpita de l'estat estacionari.

- <u>L'economia convergeix al capital per càpita k^* de l'estat estacionari</u>. D'una banda, si $k < k^*$ aleshores $\Delta k > 0$ i k augmenta; i si $k > k^*$ aleshores $\Delta k < 0$ i k disminueix.

- Per exemple, sigui $k_2 < k^*$ a la Fig. 26 el capital per càpita de l'economia. En aquest cas, l'alçada fins al punt *b* és la inversió per càpita i l'alçada fins al punt *c* és la depreciació per càpita. Per tant, si el capital per càpita de l'economia a un determinat període és k_2, al període següent serà superior a k_2 perquè s'acumula capital per càpita. <u>La distància entre *b* i *c* indica quant de capital per càpita s'ha acumulat</u>.

- A la inversa, sigui $k_1 > k^*$ a la Fig. 26 el capital per càpita de l'economia. L'alçada fins al punt *j* és la inversió per càpita i l'alçada fins al punt *h* és la depreciació per càpita. Així doncs, si el capital per càpita de l'economia a un determinat període és k_1, al període següent serà inferior a k_1 perquè es desacumula capital per càpita. <u>La distància entre *h* i *j* indica quant de capital per càpita s'ha desacumulat</u>.

A la Fig. 26, <u>cada valor de *k* identifica un possible estat de l'economia</u>. Quan, per exemple, $k = k_2$, la producció per càpita la dóna l'alçada fins al punt *a*: quan el capital per càpita és k_2, <u>el punt *a* determina quina és la producció per càpita a l'economia</u>. A la mateixa Fig. 26, <u>l'alçada fins al punt *c* és la depreciació per càpita</u> quan el capital per càpita és k_2. <u>L'alçada fins al punt *b* és l'estalvi per càpita</u> quan el capital per càpita és k_2. Per la igualtat entre estalvi per càpita i inversió per càpita, <u>l'alçada fins al punt *b* també és la inversió per càpita</u> quan el capital per càpita és k_2.

Atès que el consum per càpita és la producció per càpita menys l'estalvi per càpita, la diferència vertical entre les funcions $f(k)$ i $\sigma \cdot f(k)$ és el consum per càpita. Així, quan el capital per càpita és k_2, <u>la distància entre *a* i *b* és el consum per càpita</u>. Finalment, <u>la distància entre *b* i *c* representa l'acumulació de capital per càpita</u> que té lloc a l'economia quan es parteix del nivell k_2 de capital per càpita.

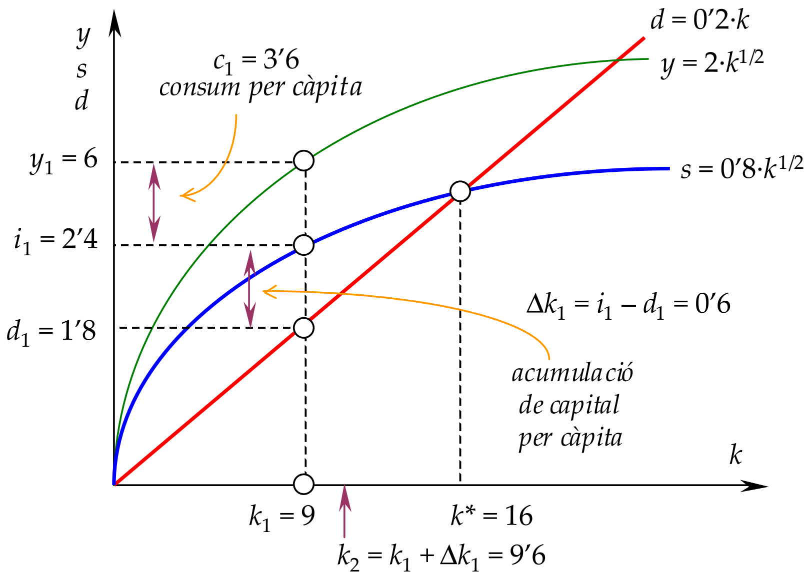


Fig. 28. Representació gràfica del model de Solow amb $y = 2\,k^{1/2}$, $s = 0'4$, $\delta = 0'2$ i $k_1 = 9$

La Fig. 28 il·lustra com identificar gràficament els valors de les variables al període inicial $t = 1$ al model SS_0 de l'apartat anterior, amb $y = 2k^{1/2}$, $\sigma = 0'4$ i $\delta = 0'2$. Les dades per a $t = 1$ impliquen una acumulació de capital per càpita $\Delta k_1 = 0'6$, de forma que $k_2 = k_1 + \Delta k_1 = 9'6$. Gràficament, s'observa que l'acumulació Δk_2 al període $t = 2$ (la diferència entre les funcions d'estalvi i depreciació) és més petita que l'acumulació Δk_1, de forma que l'acumulació s'esmorteeix fins a anul·lar-se quan s'assoleix l'estat estacionari.

14. LLIÇONS DEL MODEL DE SOLOW I SWAN

Totes les lliçons del model es redueixen a una: a la llarga, quan s'arriba a l'estat estacionari, l'economia deixa de créixer. La raó és que, a l'estat estacionari, k és constant i, com a resultat, totes les variables per càpita que només depenen de k també són constants: (i) la producció per càpita $y = f(k)$; (ii) l'estalvi per càpita $s = \sigma \cdot f(k)$; (iii) la inversió per càpita, $i = s = \sigma \cdot f(k)$; (iv) el consum per càpita $c = y - s = f(k) - \sigma \cdot f(k) = (1 - \sigma) \cdot f(k)$; i (v) la desacumulació (depreciació) per càpita $d = \delta \cdot k$.

Però, a més, per la hipòtesi que la població L no creix, les variables agregades tampoc no creixen a l'estat estacionari. Si tant L com y són constants a l'estat estacionari, aleshores la producció agregada $Y = y \cdot L$ també és constant. I el mateix succeeix amb l'estalvi agregat $S = s \cdot L$, la inversió agregada $I = i \cdot L$ i el consum agregat $C = c \cdot L$. Finalment, atès que tant L com k són constants a l'estat estacionari, l'estoc de capital $K = k \cdot L$ de l'economia també és constant, cosa que fa que la depreciació del capital de l'economia $D = \delta \cdot K$ també sigui constant. En resum, a l'estat estacionari cap variable no creix.

15. IL·LUSTRACIÓ: EL MÓN ENTRE –1000 I –1

Quina mena de model de creixement és un que prediu que, a la llarga, no hi ha creixement? Implica aquesta predicció que el model SS_0 és inútil o irreal? A continuació es justifica que aquest model permet explicar l'evolució de l'economia mundial durant el miler d'anys *ante Christum*.

- Sigui l'economia mundial entre els anys –1000 i –1. Sigui cada període t un període de 25 anys, de manera que el mil·lenni considerat cobreix 40 períodes (a la Fig. 27, val la pena observar com de propers són els valors al període 30 als valors de l'estat estacionari).

- El creixement de la població durant cada 25 anys era tan baix, que assumir-lo 0 és una aproximació raonable. També sembla una relativament bona aproximació considerar que el progrés tecnològic durant tot el mil·lenni no va ser significativament important, raó per la qual es pot assumir fixada una funció de producció per càpita durant tot el mil·leni. A més, el fet que gairebé tota la producció la generés l'activitat agrícola, fa molt plausible que la productivitat marginal del capital fos decreixent. Això justifica considerar una funció de producció $y = f(k)$ còncava (com la representada a la Fig. 23).

- D'altra banda, atès que el consum per càpita estaria no gaire per damunt del nivell de subsistència, la taxa d'estalvi seria aproximadament constant (i baixa). Per últim, el fet que pràcticament tot el capital consistís en terres de conreu, animals domèstics i eines rudimentàries, suggereix que la taxa de depreciació seria relativament constant (i reduïda). Si s'adopten aquestes hipòtesis, el model SS_0 és una representació versemblant de l'economia (o, com a mínim, una aproximació raonable).

- Durant aquest mil·lenni, el creixement de tant la producció per càpita com del consum per càpita van ser gairebé menyspreables, la qual cosa és consistent amb el que prediu el model SS_0: convergència a un estat on no hi ha creixement apreciable. S'ha de remarcar que aquest resultat depèn del fet que cap paràmetre (variable exògena) del model no canviï; això és, funció f i taxes σ, δ i n constants.

- Algunes economies (des de la Revolució Industrial) i l'economia mundial (almenys des de mitjans del segle XIX) han experimentat creixement, ja sigui de magnituds absolutes (com la producció agregada) o de magnituds relatives (com la producció per càpita). Què pot explicar aquest canvi de panorama? Segons el model SS_0, una modificació dels paràmetres de les economies. La qüestió és si aquests canvis són susceptibles d'evitar el destí de l'estagnació permanentment o només transitòriament.

16. DEFINICIÓ: ESTÀTICA COMPARATIVA

L'estàtica comparativa és una metodologia d'anàlisi d'un model que s'aplica amb l'objectiu de determinar com canvia la solució d'un model quan es modifiquen els elements exògens del model (aquelles variables que el model no explica sinó que pren com a elements donats).

- Per exemple, a Microeconomia, un exercici d'estàtica comparativa consisteix en determinar com varia l'equilibri de mercat si augmenta la renda dels consumidors o si es redueix el nombre de productors.

- Al model SS_0, com ja s'ha indicat, els elements exògens (o paràmetres del model) són tres: la funció de producció per càpita f, la taxa d'estalvi σ i la taxa de depreciació δ. Per tant, els exercicis d'estàtica comparativa consisteixen en esbrinar com la solució del model (l'estat estacionari de l'economia) es veu afectada per canvis en algun(s) d'aquests tres elements exògens.

- Per què no comptar com a element exogen el valor inicial del capital per càpita? De fet ho és, però tots els valors inicials possibles porten al mateix estat estacionari. I atès que el que interessa és la solució del model (l'estat estacionari), és irrelevant quin valor inicial del capital per càpita es prengui. La situació és anàloga a la que es produeix al mercat competitiu: interessa l'equilibri de mercat, no d'on parteix inicialment el mercat, perquè sigui quin sigui el preu de mercat inicial, s'acabava convergint al preu d'equilibri. És identificar aquest preu d'equilibri el que interessa. Al model SS_0 el que interessa és identificar el capital per càpita de l'estat estacionari (ja que k determina totes les altres variables del model)

17. EFECTES D'UN CANVI EN LA TAXA D'ESTALVI

Sigui el model SS_0 de la Fig. 29. L'anàlisi feta fins ara porta a la conclusió que l'economia, comenci amb el capital per càpita k que comenci, acabarà amb el capital per càpita k^*_1 (determinat pel punt a), amb la producció per càpita y^*_1 (determinada pel punt c) i amb un consum per càpita igual a la distància entre a i c. Si la taxa d'estalvi augmenta, de σ a σ′, la funció d'estalvi per càpita es desplaça cap amunt, com il·lustra la Fig. 29.

- El desplaçament no pot superar la funció de producció per càpita perquè la taxa d'estalvi és inferior a 1: no es pot estalviar més del que es produeix. Produït el canvi en la taxa d'estalvi, l'economia continua inicialment amb un estoc de capital per càpita igual a k^*_1. Però, amb la nova taxa d'estalvi, l'estalvi per càpita que correspon a k^*_1 és l'alçada fins a e, en tant que la depreciació és inferior, l'alçada fins a a. Així que, al període on es produeix el canvi de la taxa d'estalvi, s'acumula capital per càpita i k^*_1 augmenta per al següent període.

- El procés d'acumulació de capital per càpita s'aturarà al nou estat estacionari, que el determina el punt b. L'estoc de capital per càpita al nou estat estacionari és $k^*_2 > k^*_1$. La producció per càpita al nou estat estacionari és $y^*_2 > y^*_1$.

Per tant, l'augment de la taxa d'estalvi engega un procés de creixement de la producció per càpita, en tant que l'economia és desplaça al llarg de la funció $y = f(k)$, des de c fins a d. Inconvenients? Com a resultat de l'augment de la taxa d'estalvi, el consum per càpita al nou estat estacionari (la distància entre b i d) és més petit que el consum per càpita a l'estat estacionari inicial (la distància entre a i c). A més, el procés de creixement no és sostingut sinó que és merament transitori: quan s'arriba al nou estat estacionari que correspon al punt b, l'economia torna al repòs, perquè cap variable no creix.

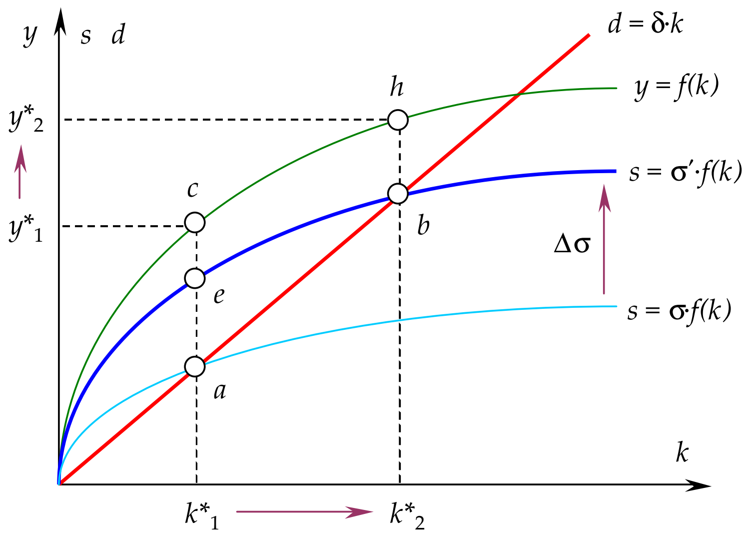


Fig. 29. Efectes sobre l'estat estacionari d'un augment de la taxa d'estalvi

La conclusió és que l'augment de la taxa d'estalvi pot fer créixer l'economia només transitòriament i que el cost que es paga és una reducció permanent del consum per càpita:

l'augment de la inversió per càpita necessari per a sostenir un nivell de capital per càpita més elevat obliga a una reducció en el consum per càpita. Així que cada treballador produeix amb més capital però al preu d'haver de consumir menys permanentment.

18. EFECTES D'UN CANVI EN LA TAXA DE DEPRECIACIÓ

Sigui el model SS_0 de la Fig. 30. L'economia es troba a l'estat estacionari determinat pel punt *a*, amb capital per càpita k^*_1 i producció per càpita y^*_1. Si la taxa de depreciació augmenta, de δ a δ', la funció de depreciació roda sobre l'origen i cap amunt, com il·lustra la Fig. 30. El nou estat estacionari el determina el punt *b*. Al nou estat estacionari, $k^*_2 < k^*_1$ i $y^*_2 < y^*_1$ (què passa amb *c*?).

L'augment de la taxa de depreciació genera un procés de decreixement temporal. El decreixement s'atura quan s'assoleix el nou estat estacionari. Arribada a aquest estat, l'economia s'estagna i res no creix ni decreix.

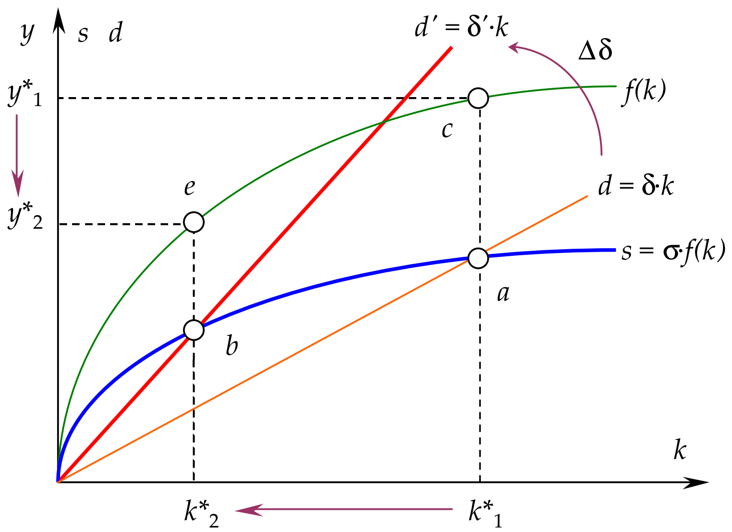


Fig. 30. Efectes sobre l'estat estacionari d'un augment de la taxa de depreciació

19. EFECTES DEL PROGRÉS TECNOLÒGIC

Sigui el model SS_0 de la Fig. 31. L'economia es troba inicialment a l'estat estacionari determinat pel punt *a*, amb capital per càpita k^*_1 i producció per càpita y^*_1. Si té lloc un progrés tecnològic puntual (que té lloc només a un únic període), la funció de producció per càpita es desplaça cap amunt, des d'$f(k)$ fins a $f'(k)$. Com a conseqüència, la funció d'estalvi també es desplaça cap amunt, des de $\sigma{\cdot}f(k)$ fins a $\sigma{\cdot}f'(k)$.

El nou estat estacionari el determina el punt *b*. Al nou estat estacionari, $k^*_2 > k^*_1$ i $y^*_2 > y^*_1$. Així, el progrés tecnològic que ocorre en un únic període engega un procés temporal de creixement. El creixement té lloc mentre l'economia es desplaça de l'estat estacionari inicial fins a l'estat final. A canvi, hi ha efectes d'aquest creixement temporal que són permanents: la producció per càpita i el capital per càpita són superiors als que hi havia a l'anterior estat estacionari.

20. EFECTES DE LA RECUPERACIÓ DE CAPITAL PER CÀPITA DESTRUÏT

El model SS_0 també prediu un procés de creixement temporal en casos on l'economia perd, de manera relativament sobtada, capital per càpita (com succeeix durant els conflictes bèl·lics). Per exemple, sigui la Fig. 26 la representació d'una economia que inicialment disposa del capital per càpita k^* de l'estat estacionari. Si, per algun motiu, el capital per càpita es redueix al següent període fins a k^*_2 (mantenint-se la funció de producció i les taxes d'estalvi i depreciació), l'economia entrarà en una dinàmica de creixement que la portarà de nou a assolir k^*.

- L'experiència d'Alemanya i del Japó la dècada posterior a la finalització de la 2a Guerra Mundial és consistent amb aquesta predicció. Atès que el Japó tenia més capital per càpita a recuperar que, per exemple, els EUA, el model suggereix que l'economia japonesa hauria de créixer més ràpidament que l'estatunidenca. Les dades confirmen aquesta predicció: la taxa mitjana de creixement del la producció per càpita al Japó entre 1951 i 1961 està al voltant del 8%; l'estatunidenca, al voltant del 2'5% (font: PWT 6.2).

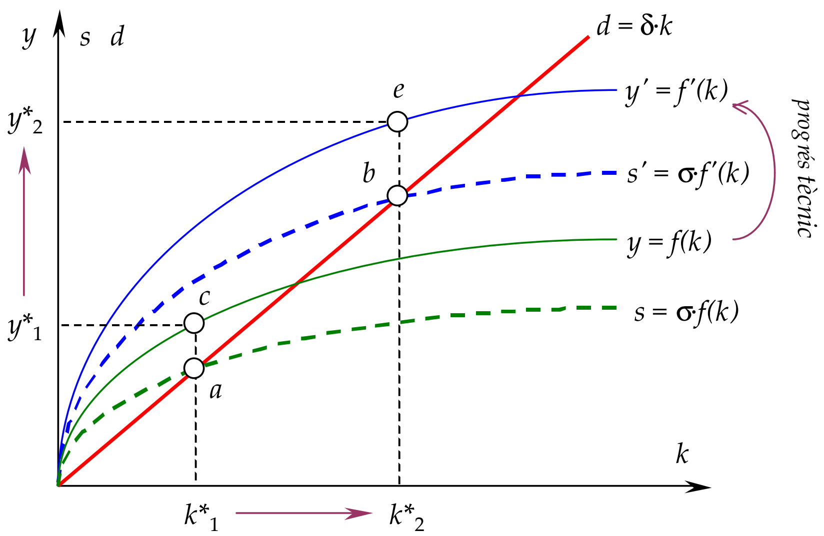
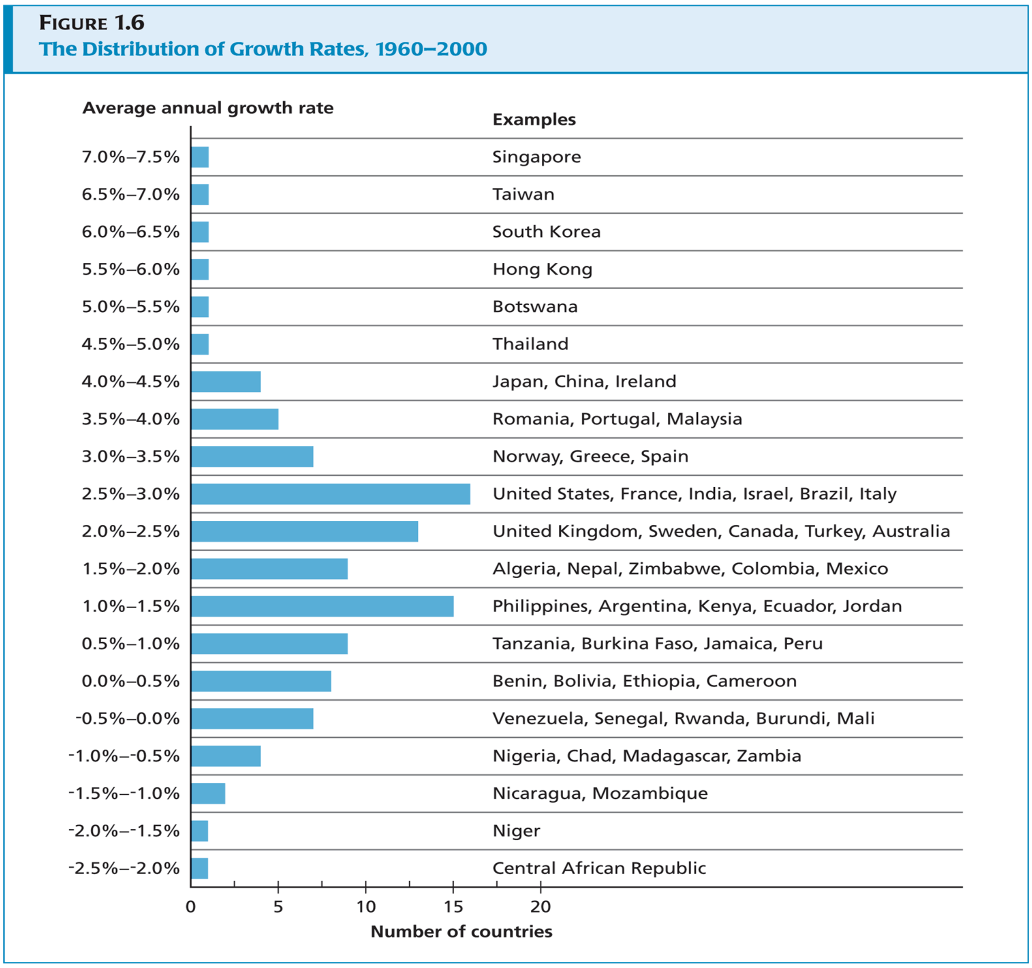


Fig. 31. Efecte sobre l'estat estacionari del progrés tecnològic no continuat

21. ES POT CRÉIXER INDEFINIDAMENT SI NO CREIX LA POBLACIÓ?

L'evidència empírica mostra que les economies són susceptibles de créixer indefinidament. Lla Fig. 32 il·lustra la magnitud del creixement (creixen més ràpidament els països més pobres?).

El model de SS_0 estableix que variacions només a un període de la taxa d'estalvi, de la taxa de depreciació o de la funció de producció són susceptibles d'induir creixement en la producció per càpita. Però el procés de creixement és temporal (en el cas de la taxa de depreciació, cal una reducció de la taxa per a generar creixement) i és un efecte secundari del pas d'un estat estacionari a un altre. La qüestió interessant és si canvis continuats de la taxa d'estalvi, la taxa de depreciació o la funció de producció podrien sostenir un creixement indefinit de la producció per càpita.



Source: Heston, Summers, and Aten (2002).

Fig. 32. Taxes de creixement, 1960-2000

http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

En el cas de la taxa d'estalvi, la resposta és no: la funció d'estalvi no pot ultrapassar la funció de producció. Per tant, l'estratègia de créixer basada en la frugalitat és incapaç d'engegar un procés de creixement continuat i sostingut.

La Fig. 33 il·lustra el cas de la reducció de la taxa de depreciació. En principi, una reducció continuada de la taxa de depreciació pot fer créixer sense límit immediat el capital per càpita (seguint el valor de k als punts a, b, c, d…) i, per consegüent, la producció per càpita.

- Aquest creixement aparentment indefinit té dues limitacions. Una, atès que la funció de producció per càpita és còncava, el creixement de la producció per càpita s'esmorteeix. És d'esperar que, a partir d'un cert valor de k, la productivitat marginal sigui 0. Això vol dir que $f(k)$ es tornaria plana a partir d'aquest valor de k, de forma que unitats addicionals de k no aconseguirien augmentar la producció per càpita.

- I dues, la reducció de la taxa de depreciació és difícil d'aconseguir perquè la depreciació respon, en gran mesura, a la naturalesa física del capital: és versemblant no poder reduir la depreciació del capital per sota un cert nivell. Tot (capital inclòs) desapareix almenys a un ritme mínim que no pot ser reduït més.

Resta, per últim, el cas del progrés tecnològic. De fet, és previsible que calgui progrés tecnològic per a reduir de manera continuada la taxa de depreciació. La Fig. 31 suggereix que un progrés tecnològic continuat (i no merament puntual com és el cas de la pròpia Fig. 31) és capaç de provocar un creixement continuat i indefinit de la producció per càpita, perquè la funció de producció per càpita es desplaçaria contínuament cap amunt.

- La història de la humanitat és expressió d'un progrés tecnològic (aplicat a les activitats productives) continuat. El que és novedós des de la Revolució Industrial és el ritme al qual es produeix aquest progrés. L'evolució de la producció per càpita i del capital per càpita a l'economia mundial en els últims 3 segles és consistent amb la predicció que fa el model SS_0 quan el progrés tecnològic és continu.

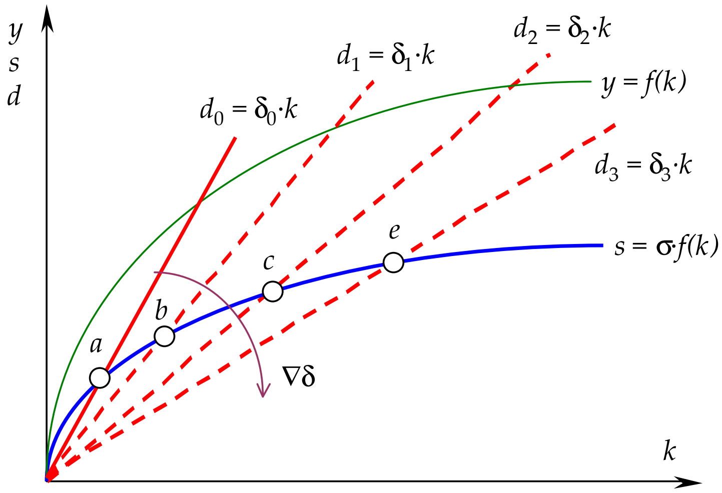


Fig. 33. Reducció continuada de la taxa de depreciació

22. EL CONSUM PER CÀPITA A L'ESTAT ESTACIONARI

La producció per càpita y d'una economia s'ha pres fins ara com a indicador del nivell de vida (*standard of living*) a una economia. Aquesta elecció és justificable si el que interessa és traçar l'augment o disminució del nivell de vida, ja que la variació d'aquest nivell està correlacionat positivament amb la variació de la producció per càpita.

Però si el que interessa és una mesura del benestar dels membres d'una economia, i no tant de la variació d'aquest benestar, el consum per càpita sembla una variable més apropiada que la producció per càpita. Després de tot, no tota la producció per càpita és fruïda pels membres d'una economia: la part de la producció que s'inverteix retorna al procés productiu i no atén directament les necessitats dels individus (que és el que defineix la part de la producció que es consumeix).

En vista que l'economia tendeix a un estat estacionari, el consum per càpita rellevant és el de l'estat estacionari. Per definició, a l'estat estacionari la inversió per càpita i coincedeix amb la desacumulació per càpita d. D'altra banda, en equilibri macroeconòmic, $c = y - i$. Per tant, sabent que $i = d = \delta \cdot k$ i que $y = f(k)$, el consum per càpita a l'estat estacionari és

$$c = f(k) - \delta \cdot k. \quad (1)$$

L'equació (1) s'ha construït suposant que no canvia ni la funció de producció f ni la taxa de depreciació δ. Atès que el valor de k a (1) és un valor d'estat estacionari, l'únic que pot causar una variació de l'estat estacionari és la variació de la taxa d'estalvi σ. Per tant, (1) assenyala quin és el capital per càpita de l'economia que resulta a mesura que varia la taxa d'estalvi.

- L'equació (1) mostra que una variació del capital per càpita d'un estat estacionari genera dos efectes oposats sobre el consum per càpita d'aquell estat estacionari. Per exemple, si el capital per càpita de l'estat estacionari augmenta (fet que requereix que la taxa d'estalvi augmenti), es produeix un efecte negatiu sobre c degut a què un augment de k comporta un augment de la depreciació per càpita $d = \delta \cdot k$ i, com a conseqüència, cal augmentar la inversió per càpita i per a mantenir k constant (perquè k a un estat estacionari és constant). Aquesta inversió només pot augmentar si augmenta l'estalvi per càpita, fet que implica una reducció del consum per càpita.

- Però simultàniament hi ha un efecte positiu sobre c degut a què un augment de k provoca un augment de la producció per càpita $f(k)$ i aquest augment, per la relació $c = (1 - \sigma)y$, causa un augment del consum per càpita: si es produeix més, aleshores, amb una taxa d'estalvi donada, també es consumeix més.

La Fig. 34 il·lustra l'equació (1). Si la taxa d'estalvi de l'economia és σ, el punt a determina l'estat estacionari, amb capital per càpita igual a k^*_1. L'equació (1) estableix quin és el consum per càpita c^*_1 corresponent a k^*_1, això és, $c^*_1 = f(k^*_1) - \delta \cdot k^*_1$. El punt b determina $f(k^*_1)$, mentre que el punt a determina $\delta \cdot k^*_1$. Per tant, la distància entre a i b és c^*_1. Així que l'equació (1) diu quina és la distància entre a i b.

Si la taxa d'estalvi augmenta de σ a σ', el punt c indica el nou estat estacionari de l'economia c, en el qual el capital per càpita és k^*_2. L'equació (1) torna a establir quin és el consum per càpita c^*_2 corresponent a k^*_2, això és, $c^* = f(k^*_2) - \delta \cdot k^*_2$. El punt e determina $f(k^*_2)$, mentre el punt c determina $\delta \cdot k^*_2$. Per tant, el valor que (1) atribueix a c^*_2 quan $k = k^*_2$ és la distància entre e i c.

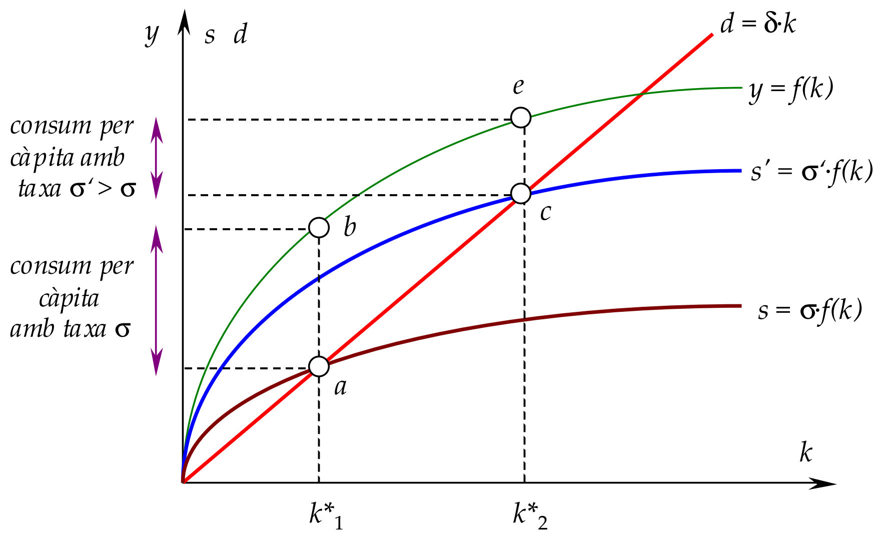


Fig. 34. Il·lustració de l'equació (1): consum per càpita a un estat estacionari

23. LA REGLA D'OR DEL CREIXEMENT ECONÒMIC AL MODEL DE SOLOW I SWAN

En ètica, la regla d'or és el principi moral que fonamenta l'ètica de la reciprocitat: tracta els demés com tu mateix vols ser tractat. Aquest principi es trasllada al context econòmic quan es considera el creixement a llarg termini perquè els fonaments per al creixement de què gaudiran les generacions futures són establerts per les generacions passades.

- En particular, el model SS_0 posa de relleu la connexió entre estalvi i creixement de la producció per càpita: un augment de la taxa d'estalvi permet augmentar la producció per càpita. Però l'augment de l'estalvi ara per a augmentar la producció per càpita en el futur porta associat un sacrifici: reduir el consum ara.

- Així que el creixement a llarg termini implica una mena de benevolència intergeneracional: les generacions presents se sacrifiquen augmentant l'estalvi (i, així, la inversió) per a què les generacions futures puguin, pretesament, beneficiar-se d'una producció per càpita (i un consum per càpita superiors).

- El problema és que una taxa d'estalvi superior no implica un consum per càpita superior. Per exemple, a la Fig. 34, si la generació present incrementa la taxa d'estalvi de σ a σ', la generació futura patirà una reducció del consum per càpita, que passaria de ser la distància entre a i b a ser la distància entre c i e. Això indica que la taxa d'estalvi σ' és excessiva: una taxa inferior permetria augmentar el consum per càpita.

Aplicant l'ètica de la reciprocitat intergeneracionalment, sorgeix la qüestió de a quin estat estacionari el consum per càpita és màxim. La taxa d'estalvi que satisfà la regla d'or del creixement econòmic (*golden rule savings rate*) és la que maximitza el consum per càpita.

La taxa d'estalvi que satisfà la regla d'or (o, simplement, la taxa d'estalvi de la regla d'or) s'obté maximitzant (1) respecte de k. Geomètricament, es tracta de trobar el valor de k on és màxima la distància vertical entre la funció $y = f(k)$ i la recta $d = \delta \cdot k$.

- Derivant (1) respecte de k resulta $\frac{\partial c}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial k} - \delta$. La condició de 1r ordre d'un màxim de la funció d'(1) estableix que $\frac{\partial c}{\partial k} = 0$; això és, (2) se satisfà. Atès que f és còncava, la condició de 2n ordre es compleix automàticament. En resum, el capital per càpita de l'estat estacionari a què s'arriba amb la taxa d'estalvi de la regla d'or satisfà (11).

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \delta \tag{2}$$

La derivada $\frac{\partial f}{\partial k}$ és la productivitat marginal del capital per càpita: diu quant varia la producció per càpita quan varia el capital per càpita. Geomètricament, $\frac{\partial f}{\partial k}$ és el pendent de la funció de producció $y = f(k)$ i δ és el pendent de la recta $d = \delta \cdot k$ que representa la depreciació per càpita. Així que (2) diu que el capital per càpita que permet maximitzar el consum per càpita el determina el punt de la funció de producció on el pendent és δ, això és, el punt de la funció de producció que és tangent a una recta amb pendent δ.

- La Fig. 35 il·lustra geomètricament el procediment de càlcul de la taxa d'estalvi de la regla d'or. Primer, es desplaça la recta $d = \delta \cdot k$ paral·lelament a l'esquerra fins que la recta és tangent a la corba $y = f(k)$. El punt de tangència (*b* a la Fig. 35) determina el valor k^*_{or} del capital per càpita de la regla d'or. Donat aquest valor, la desacumulació serà $d_{or} = \delta \cdot k^*_{or}$. Aquesta haurà de ser també la inversió per càpita i^*_{or} (punt *a*) de l'estat estacionari on el capital per càpita és k^*_{or}. Per últim, la taxa d'estalvi σ_{or} de la regla d'or serà aquella que faci que la funció d'estalvi $s_{or} = \sigma_{or} \cdot f(k)$ resultant intersecti la recta $d = \delta \cdot k$ justament al punt *a*. La distància entre *a* i *b* és el màxim capital per càpita assolible amb funció *f* i taxa δ quan l'únic paràmetre que es pot modificar és la taxa σ.

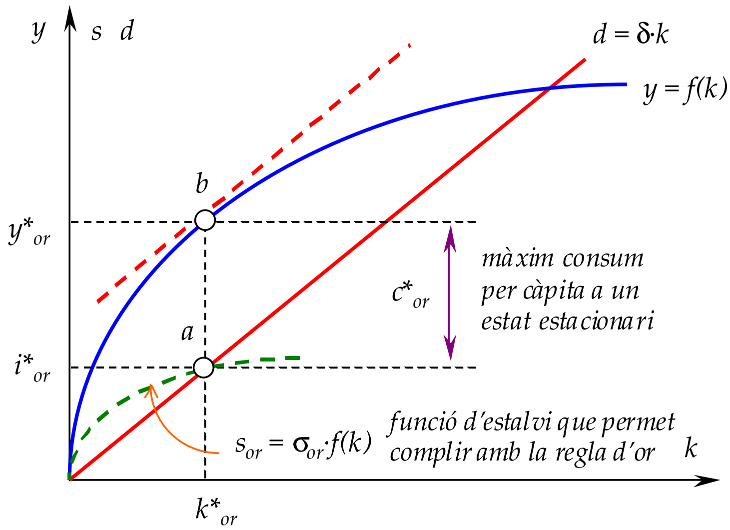


Fig. 35. Obtenció de l'estat estacionari que satisfà la regla d'or (màxim consum per càpita)

24. EXEMPLE DE CÀLCUL DE L'ESTAT ESTACIONARI DE LA REGLA D'OR

Sigui una economia amb funció de producció $y = f(k) = 2k^{1/2}$, taxa d'estalvi $\sigma = 0'4$ i taxa de depreciació $\delta = 0'2$. El capital per càpita de l'estat estacionari s'ha calculat anteriorment: $k^* = 16$. Per a obtenir el capital per càpita la regla d'or, n'hi ha prou amb aplicar la condició (2), ja que la funció de producció és còncava. Aleshores, $\frac{\partial f}{\partial k} = 2\frac{1}{2}k^{-1/2} = \frac{1}{k^{1/2}}$.

- Com era d'esperar (per això la funció de producció és còncava), la productivitat marginal del capital per càpita és decreixent: cada unitat addicional de capital que té un treballador fa que el treballador augmenti cada cop menys la seva producció.

Així doncs, el capital per càpita d'aquell estat estacionari que satisfà la regla d'or s'obté resolent l'equació $\frac{1}{k^{1/2}} = \delta$. D'aquí resulta que $k^*_{or} = \frac{1}{\delta^2}$. En concret, $k^*_{or} = 25$. Aquest resultat indica que, amb la taxa d'estalvi inicial $\sigma = 0'4$, no s'està maximitzant el consum per càpita, ja que la taxa $\sigma = 0'4$ condueix l'economia a un estat estacionari on $k = 16 < k^*_{\text{or}}$. D'aquí es conclou que la taxa d'estalvi de la regla d'or ha de ser superior a 0'4: cal una taxa d'estalvi superior a 0'4 per a portar l'economia de $k = 16$ a $k = 25$.

Quina és la taxa d'estalvi que condueix l'economia a l'estat estacionari de la regla d'or? Primer, se sap que a aquest estat estacionari $k^*_{or} = 25$. Segon, se sap que a tot estat estacionari se satisfà $\sigma \cdot f(k) = \delta \cdot k$. Per tant, en particular, $\sigma_{or} \cdot f(k^*_{or}) = \delta \cdot k^*_{or}$. I tercer, se sap que $\delta = 0'2$ i que $f(k) = 2k^{1/2}$. Així, $f(k^*_{or}) = 2(k^*_{or})^{1/2} = 2(25)^{1/2} = 10$, de forma que la condició $\sigma_{or} \cdot f(k^*_{\text{or}}) = \delta \cdot k^*_{\text{or}}$ esdevé $\sigma_{or} \cdot 10 = 0'2 \cdot 25$. D'aquí s'obté $\sigma_{or} = 0'5$. El consum per càpita corresponent el determina (1): $c_{or} = f(k^*_{or}) - \delta \cdot k^*_{or} = 10 - 5 = 5$.

25. EL MODEL DE SOLOW I SWAN AMB CREIXEMENT DE LA POBLACIÓ

Permetre que $n > 0$ al model de Solow i Swan implica incorporar un paràmetre més al model. L'estat estacionari és ara determinat per la funció de producció per càpita f, la taxa d'estalvi σ, la taxa de depreciació δ i la taxa de creixement de la població n.

Quan $n = 0$, per definició, $k_{t+1} = k_t + i_t - d_t$: el capital per càpita en el període $t + 1$ és el capital per càpita k_t en el període t anterior, més l'acumulació i_t de capital per càpita (inversió) realitzada durant t, menys la desacumulació d_t de capital per càpita (depreciació) que ha tingut lloc durant t. Aquesta fórmula continua essent vàlida quan $n \neq 0$, amb l'única diferència que la desacumulació d_t inclou un segon factor: la <u>desacumulació deguda al creixement de la població</u>.

- El creixement de la població provoca una desacumulació de capital per càpita perquè, si l'estoc agregat K de capital no augmenta, cal repartir el mateix estoc de capital entre més treballadors, de forma que a cada treballador li correspon menys. De fet, essent $k = K/L$, si K es manté constant i L augmenta, k disminueix.

Quan $n \neq 0$ (i $n \neq -1$), $k_{t+1} = \frac{1}{1+n} k_t + \frac{1}{1+n} i_t - \frac{1}{1+n} \delta \cdot k_t$ (la demostració es deixa com a exercici per a qui estigui interessat). Des d'aquí, no és difícil comprovar que $\Delta k = \frac{\sigma}{1+n} f(k) - \frac{\delta + n}{1+n} k$.

- Per a poder comparar els dos casos, $n = 0$ i $n \neq 0$, val la pena repassar el cas $n = 0$. Atès que, per definició, $\Delta k_t = k_{t+1} - k_t$, la fórmula $k_{t+1} = k_t + i_t - d_t$ es redueix a $\Delta k_t = i_t - d_t$. Com la inversió per càpita s'assumeix igual a l'estalvi per càpita i com l'única font de desacumulació de capital per càpita és la depreciació, $\Delta k_t = i_t - d_t$ es transforma en $\Delta k_t = \sigma \cdot f(k_t) - \delta \cdot k_t$. Després d'eliminar el subíndex t, resulta la fórmula $\Delta k = \sigma \cdot f(k) - \delta \cdot k$ prèviament obtinguda amb què es troba l'estat estacionari.

- Amb $n \neq 0$, continua essent cert que $\Delta k_t = k_{t+1} - k_t$. Sabent que, quan $n \neq 0$, $k_{t+1} = \frac{1}{1+n} k_t + \frac{1}{1+n} i_t - \frac{1}{1+n}\,\delta \cdot k_t$, resulta que $\Delta k_t = k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n} k_t + \frac{1}{1+n} i_t - \frac{1}{1+n}\,\delta \cdot k_t - k_t = \left(\frac{1}{1+n} - 1\right) k_t + \frac{1}{1+n} i_t - \frac{1}{1+n}\,\delta \cdot k_t = \frac{-n}{1+n} k_t + \frac{1}{1+n} i_t - \frac{1}{1+n}\,\delta \cdot k_t = \frac{1}{1+n} i_t - \frac{\delta + n}{1+n}\, k_t$. Després d'eliminar el subíndex t, resulta la fórmula $\Delta k = \frac{\sigma}{1+n} f(k) - \frac{\delta + n}{1+n}\, k$.

Com al cas $n = 0$, els estats estacionaris amb $n \neq 0$ s'obtenen trobant els valors $k \neq 0$ tals que $\Delta k = 0$. Atès que, quan $n \neq 0$ (i $n \neq -1$), $\Delta k = \frac{\sigma}{1+n} f(k) - \frac{\delta + n}{1+n}\, k$ és l'equació que descriu l'acumulació neta de capital per càpita, la condició $\Delta k = 0$ es redueix a $\frac{\sigma}{1+n} f(k) = \frac{\delta + n}{1+n}\, k$. Assumint $n \neq -1$ (la població no es veu reduïda en un 100%), el terme $1 + n$ es pot cancel·lar. Així doncs, els estats estacionaris resulten de solucionar l'equació (3).

$$\sigma \cdot f(k) = (\delta + n)k \tag{3}$$

- La condició (3) serveix per a tot $n \neq -1$. En particular, quan $n = 0$, (3) es transforma en la ja familiar equació $\sigma \cdot f(k) = \delta \cdot k$ que determina l'estat estacionari quan $n = 0$. La Fig. 36 mostra les diferències entre el cas $n = 0$ i el cas $n \neq 0$ (indicat com a "$n > 0$").

- La part esquerra de (3) representa la inversió per càpita (inversió desitjada) a l'estat estacionari i la part dreta és la inversió necessària per a mantenir constant el capital per càpita de l'estat estacionari (inversió de manteniment). Això fa que n actuï sobre k com la depreciació: si K no augmenta, un augment del nombre de treballadors implica que a cada treballador li correspon menys capital (reducció de k). Així que, a un estat estacionari, la inversió ha de compensar dues forces que redueixen k: la depreciació i l'augment de la població.

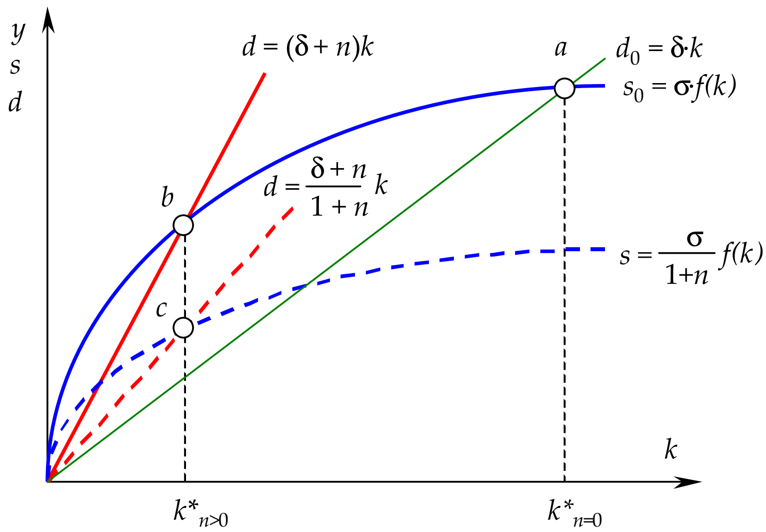


Fig. 36. Representació gràfica de l'estat estacionari amb $n > 0$ i comparació amb el cas $n = 0$

26. LLIÇONS DEL MODEL DE SOLOW I SWAN AMB CREIXEMENT DE LA POBLACIÓ

Com al cas $n = 0$, l'economia acaba arribant a l'estat estacionari on les magnituds per capita (producció per càpita, capital per càpita, consum per càpita, inversió per càpita) deixen de créixer. Però a diferència del cas $n = 0$, les magnituds absolutes (producció, capital, treball, consum, inversió) sí creixen a l'estat estacionari.

- A l'estat estacionari, k és constant; atès que $k = K/L$ és constant i atès que L creix a la taxa n, K creix a la taxa n; atès que $y = Y/L$ és constant i atès que L creix a la taxa n, Y creix a la taxa n; amb Y creixent a la taxa n, l'estalvi agregat $S = \sigma \cdot Y$ també creix a la taxa n; amb S creixent a la taxa n, i donat que $I = S$, la inversió agregada I també creix a la taxa n; atès que $c = C/L$ és constant i atès que L creix a la taxa n, C creix a la taxa n.

En resum, si la població creix a la taxa n, a l'estat estacionari tota l'economia creix (en termes absoluts) a la taxa n: producció, consum, inversió, estalvi, depreciació i capital (com a variables agregades, no per càpita). D'altra banda, el creixement de la població afecta negativament a la producció per càpita de l'estat estacionari. Aquesta observació la il·lustra la Fig. 36.

- A la Fig. 36, se suposa inicialment que $n = 0$: la població no creix. El capital per càpita $k^*_{n=0}$ de l'estat estacionari el determina el punt a, on s'interesecten les funcions d'estalvi $s = \sigma \cdot f(k)$ i depreciació $d = \delta \cdot k$. Si ara la població comença a créixer a la taxa $n > 0$, per (3), b determina l'estat estacionari, amb capital per càpita igual a $k^*_{n>0}$. Clarament, $k^*_{n>0}$ és inferior a $k^*_{n=0}$ i, per consegüent, $y^*_{n>0}$ és superior a $y^*_{n=0}$.

Aquest resultat contribueix a explicar perquè algunes economies són més riques (tenen una producció per càpita superior) que d'altres: si a l'economia 1 la població creix més que a l'economia 2 i la resta de paràmetres són iguals a les dues economies (taxa d'estalvi, funció de producció i taxa de depreciació), l'economia 1 tindrà una producció per càpita inferior.

27. ESTÀTICA COMPARATIVA AL MODEL SS AMB VARIACIÓ DE LA POBLACIÓ

L'anàlisi amb $n \neq 0$ és molt similar a l'anàlisi amb $n = 0$: per a determinar com varia el capital per càpita de l'estat estacionari quan es modifica algun paràmetre exogen (la taxa de creixement de la població, la taxa d'estalvi, la taxa de deprecicació i la funció de producció), n'hi ha prou amb interpretar la recta $d = \delta \cdot k$ com si fos la recta $d = (\delta + n)k$.

- Per exemple, reemplaçant sempre $d = \delta \cdot k$ per $d = (\delta + n)k$, la Fig. 29 presenta l'efecte sobre l'estat estacionari d'un augment de la taxa d'estalvi; la Fig. 30 presenta l'efecte sobre l'estat estacionari d'un augment de la taxa de depreciació; i la Fig. 31 presenta l'efecte sobre l'estat estacionari del progrés tecnològic no continuat.

Quin és l'efecte d'una variació de la taxa de creixement n de la població? Atès que n apareix a la recta $d = (\delta + n)k$, un augment d'n tindrà el mateix efecte qualitatiu sobre l'estat estacionari que un augment de la taxa de depreciació δ.

- Hi ha un element diferenciador en el cas $n \neq 0$: per bé que les funcions $d = (\delta + n)k$ i $s = \sigma \cdot f(k)$ permeten calcular el capital per càpita de l'estat estacionari, ni $s = \sigma \cdot f(k)$ dóna la inversió (i l'estalvi) per càpita quan el capital per càpita és k ni $d = (\delta + n)k$ dóna la inversió en manteniment necessària per a què k sigui constant (i neutralitzar la reducció de k que causen la depreciació i el creixement de la població). A diferència del que succeïa quan $n = 0$, $\sigma \cdot f(k) - (\delta + n)k$ no és la variació de capital per càpita, sinó que és $\frac{\sigma}{1+n} f(k) - \frac{\delta+n}{1+n} k$, on el primer terme seria la inversió per càpita feta a partir de l'estalvi i el segon terme seria la inversió de manteniment necessària per a què el capital per càpita sigui k.

28. REGLA D'OR AL MODEL DE SOLOW I SWAN AMB CREIXEMENT DE LA POBLACIÓ

El consum per càpita c satisfà sempre $c = y - i$. A l'estat estacionari, la inversió desitjada i coincideix amb la inversió en manteniment $d = (\delta + n)k$. Per tant, a tot estat estacionari, el consum per càpita és (4), on k és el capital per càpita de l'estat estacionari corresponent.

$$c = f(k) - (\delta + n)k \tag{4}$$

L'estat estacionari de la regla d'or s'obté maximitzant (4) respecte de k. Com al cas $n = 0$, la condició de 1r ordre és suficient per a determinar la solució. En aquest cas, la derivada de c és $\frac{\partial c}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial k} - (\delta + n)$. La condició de 1r ordre implica que $\frac{\partial c}{\partial k} = 0$. D'aquí que (5) sigui la condició que permet determinar el capital per càpita de la regla d'or i, a partir d'ell, la taxa d'estalvi, el consum per càpita i la producció per càpita de la regla d'or.

$$\frac{\partial f}{\partial k} = \delta + n \tag{5}$$

29. LA HIPÒTESI DE LA CONVERGÈNCIA ECONÒMICA

El model SS té una important implicació sobre la convergència d'economies: economies amb similars paràmetres (similars funcions de producció per càpita i similars taxes d'estalvi, depreciació i creixement de la població) tendiran a estats estacionaris similars (similars consum, producció, estalvi i inversió per càpita).

- Específicament, siguin A i B dues economies estructuralment similars, tal que A parteix d'un nivell de capital per càpita (i, per tant, una producció per càpita) inferior a la de B. Atès que totes dues acabaran a un estat estacionari similar, la conclusió és que l'economia "endarrerida" A haurà de créixer més ràpidament si el resultat final és que ha de situar-se al nivell de l'economia "avançada" B.

Basant-se en aquesta implicació del model SS, la hipòtesi de la convergència (també anomenada efecte *catch-up*) estableix que les economies més pobres tendiran a créixer més ràpidament que les economies més riques, de forma que totes les economies convergiran en termes de producció per càpita.

Avalen les dades la hipòtesi de la convergència? A nivell mundial, l'evidència sembla més aviat negativa, tot i que alguns indicis poden apuntar cap a un inici de la convergència. La Fig. 37 mostra l'evidència negativa: de produir-se l'efecte *catch-up*, hauria de resultar una relació negativa (que no s'evidencia a la Fig. 37) entre la taxa de creixement de la producció per càpita durant el període considerat i la producció per càpita a l'inici del període (menys producció per càpita inicial, més taxa de creixement).

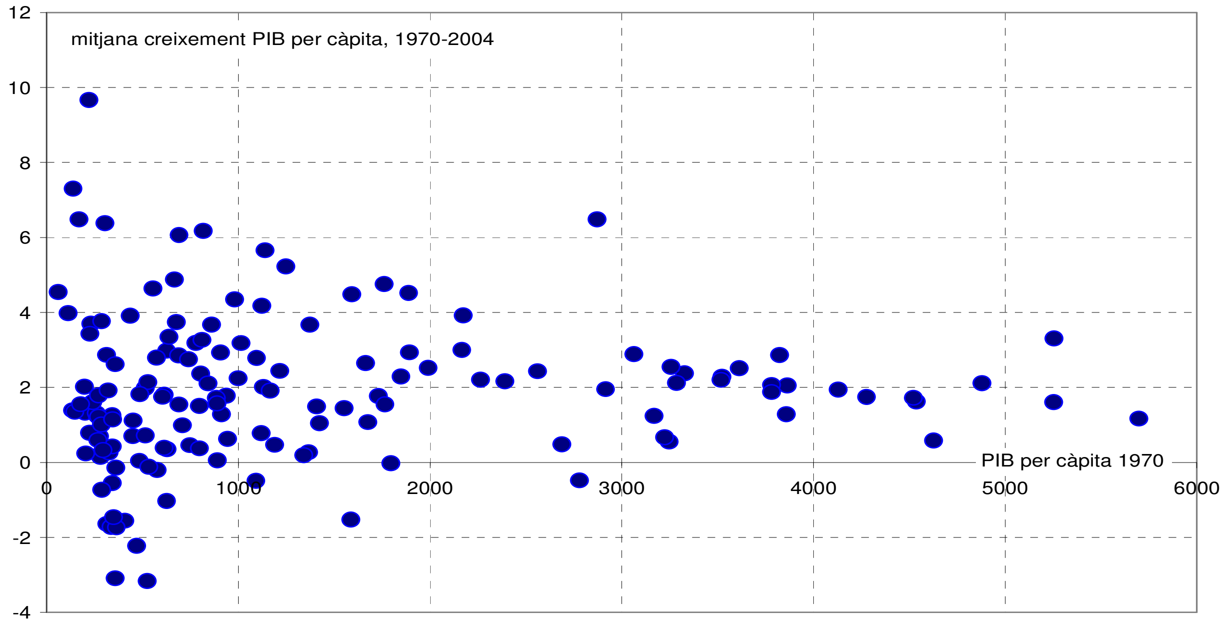


Fig. 37. No convergència a escala mundial, 1970-2004, prop de 150 països, excepte els creats des del 1970
Dades: http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt62/pwt62_form.php

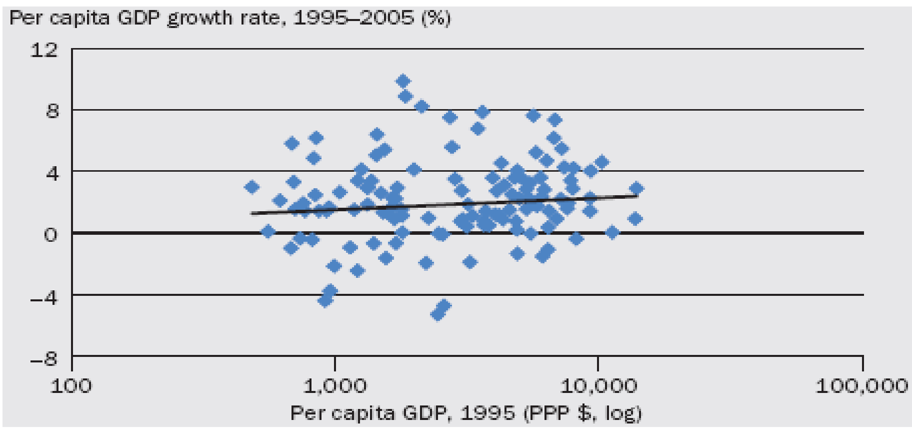


Fig. 38. No convergència de les economies en vies de desenvolupament cap a les riques (125 casos)
http://siteresources.worldbank.org/DATASTATISTICS/Resources/WDI07section1-intro.pdf

La Fig. 38 es refereix exclusivament a economies en desenvolupament i tampoc no evidencia una correlació negativa entre producció per càpita inicial i taxa de creixement posterior. La Fig. 39 és l'indici que el procés de convergència pot estar engegant-se, ja que mostra que, a la darrera dècada, per a 100 observacions, les economies en desenvolupament han tendit a augmentar la seva taxa de creixement i a reduir la dispersió de les taxes. La part final de la gràfica de la Fig. 40 pot ser indicativa de l'inici de la convergència de les economies en desevolupament cap a les economies avançades.

- Hi ha exemples de compliment de la convergència. Un està associat amb els anomenats 4 tigres asiàtics: Singapur, Hong Kong, Taiwan i Corea del Sud. Aquestes economies eren economies pobres, en pràcticament tots els sentits, a mitjans del segle XX. Però van desenvolupar un procés de ràpid creixement entre les dècades de 1960 i 1990 que les ha portades en l'actualitat al grup d'economies riques.

- Les economies de l'OCDE, l'Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic (http://www.oecd.org, http://www.oecd.org/dataoecd/29/6/2398191.ppt), constitueixen un segon exemple. Les Figs. 41 i 42 mostren certa evidència favorable al *catch-up*: les economies de l'OCDE estan en procés de convergència.

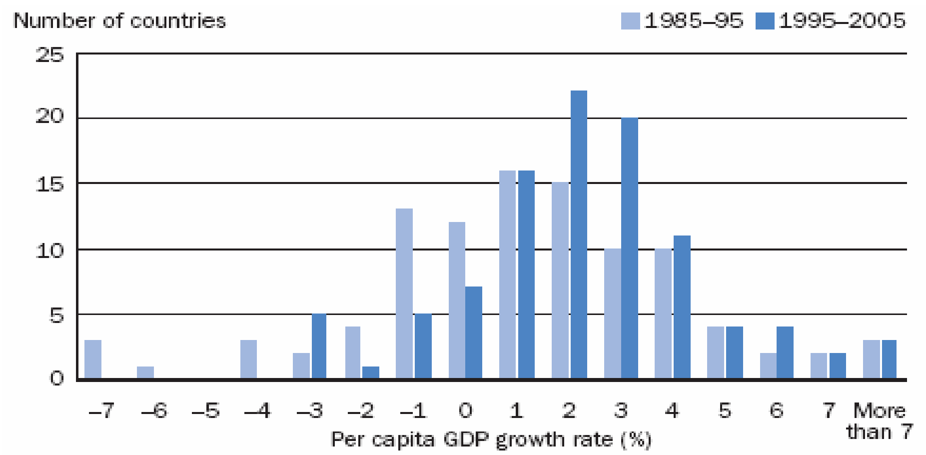


Fig. 39. Creixement més ràpid i menys dispers de les economies en vies de desenvolupament
http://siteresources.worldbank.org/DATASTATISTICS/Resources/WDI07section1-intro.pdf

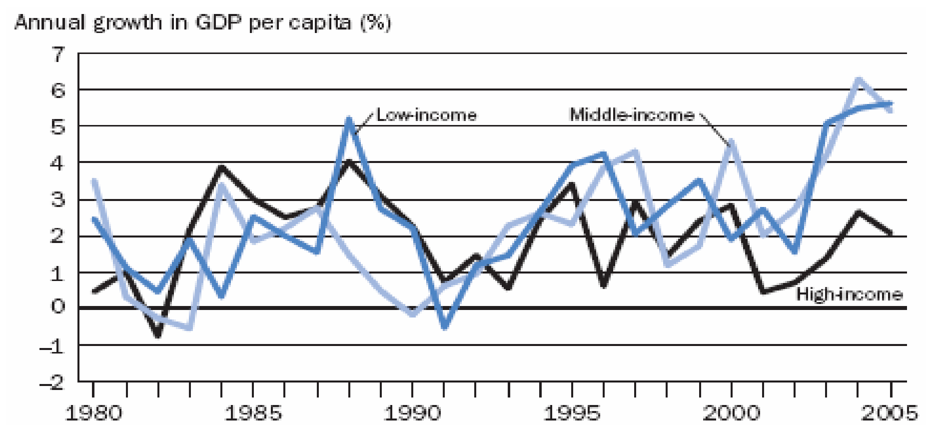


Fig. 40. Creixement més ràpid de les economies en vies de desenvolupament (Font: Fig. 39)

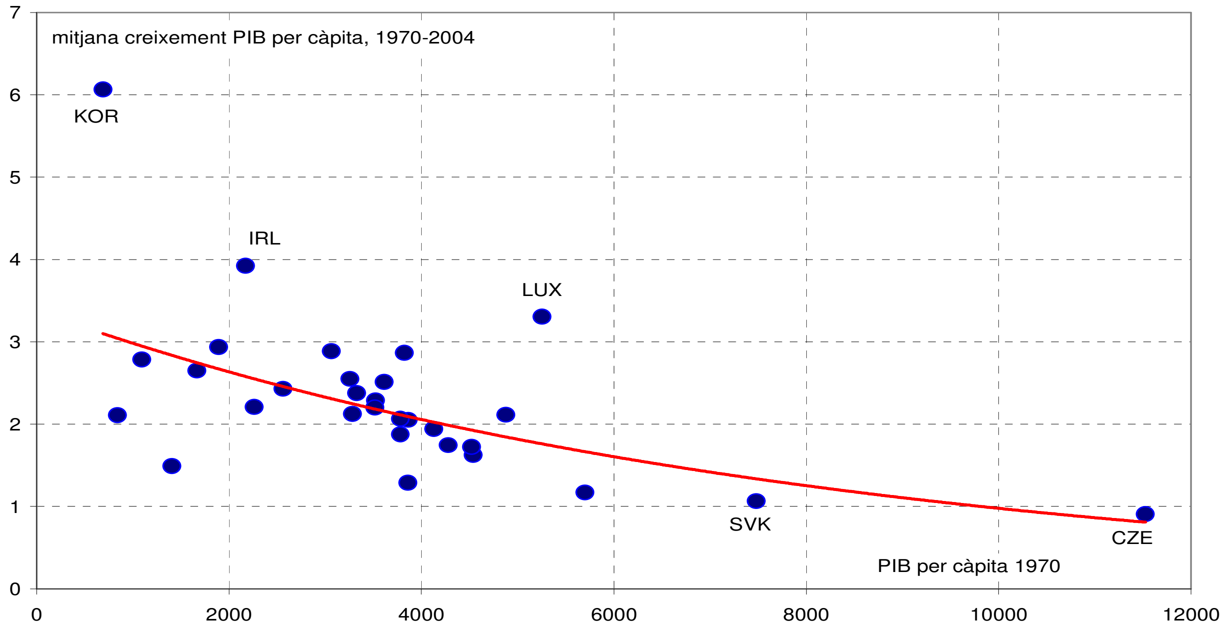


Fig. 41. Convergència de les 30 economies de l'OCDE, 1970-2004 (CZE, 1990; SVK, 1987)
http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt62/pwt62_form.php

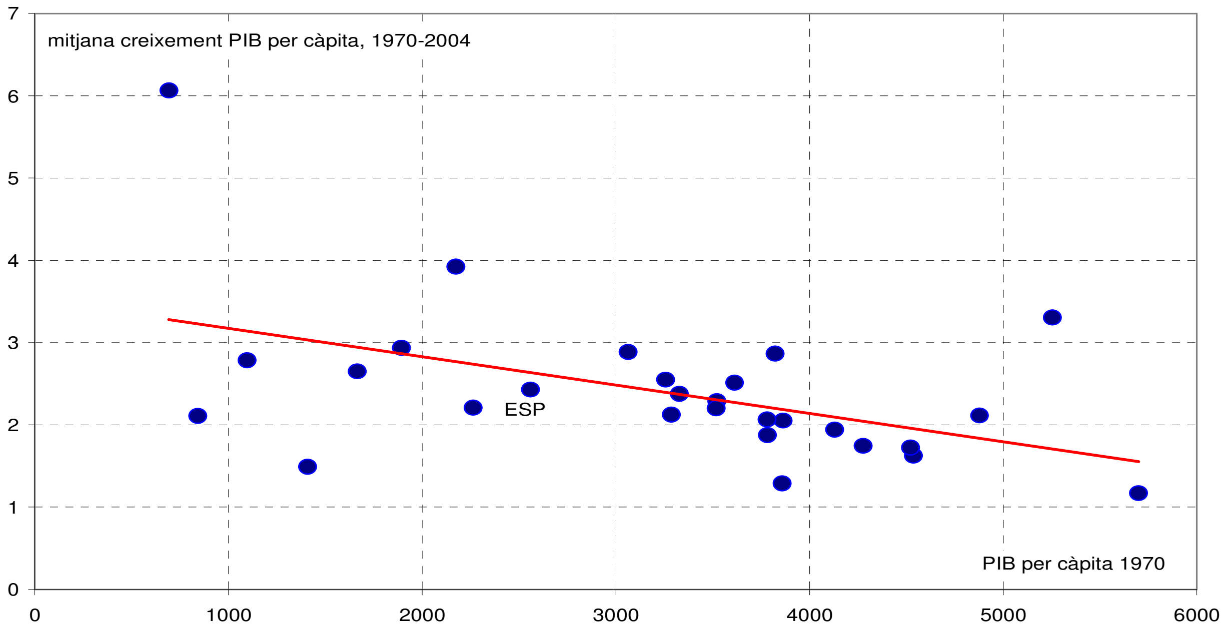


Fig. 42. Convergència de 28 les 30 economies de l'OCDE, 1970-2004 (tret de CZE i SVK)
http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt62/pwt62_form.php

30. CREIXEMENT ECONÒMIC ENDOGEN

Al model SS, un cop l'economia arriba a un estat estacionari, el creixement de la producció per càpita només es pot produir per causes exògenes, això és, factors que el model no explica (per exemple, progrés tecnològic). Endogeneitzar una variable vol dir que el model explica com es determina.

- Per exemple, si s'incorpora al model SS una teoria que expliqui com es determina la taxa de creixement de la població i el resultat és una reducció continuada de la taxa (com la projecció mostrada a la Fig. 43), el model predirà un creixement continuat endogen (perquè la dinàmica del model, i no un factor exogen, causa el creixement).

Models posteriors al model SS han tractat el fenomen del creixement endogen, això és, un creixement sostingut per la pròpia dinàmica i estructura de l'economia. La Fig. 44 il·lustra com modificar el model SS (quan $n = 0$) per a què una economia creixi sense empentes externes.

- La causa del creixement perpetu és que que la producció per càpita no està sotmesa a productivitats marginals decreixents. En aquets cas, s'ha suposat que, a partir del valor k^*_4, la productivitat marginal és constant. A l'economia de la Fig. 44, a defineix un estat estacionari però b no. Si l'economia no supera k^*_2, el seu destí és el punt a, que actua de centre de gravetat de l'economia. Però si l'economia supera k^*_2, el capital per càpita s'acumula indefinidament (perquè a la dreta de b la inversió supera la depreciació) i, per tant, la produccció per càpita creix sense fi endògenament.

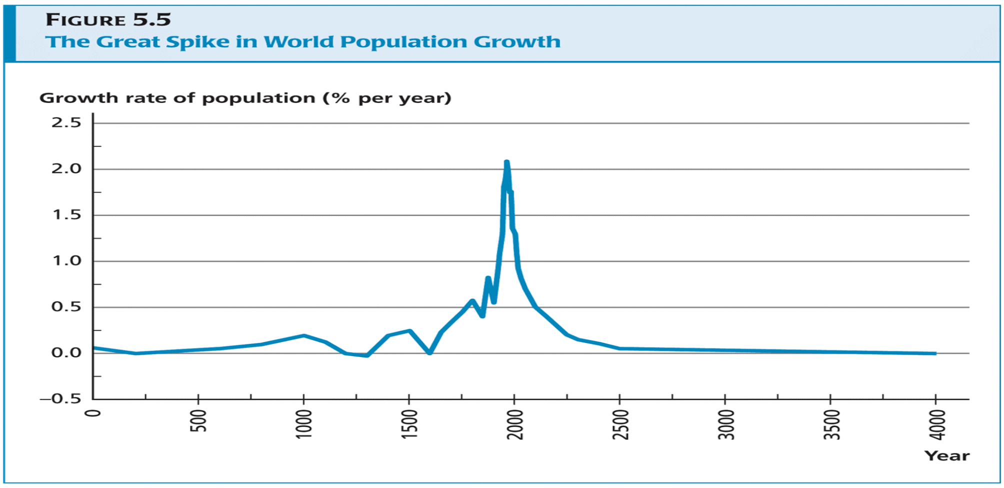


Fig. 43. El gran pic del creixement de la població (projecció de W. W. Rostow; font: com la Fig. 13)

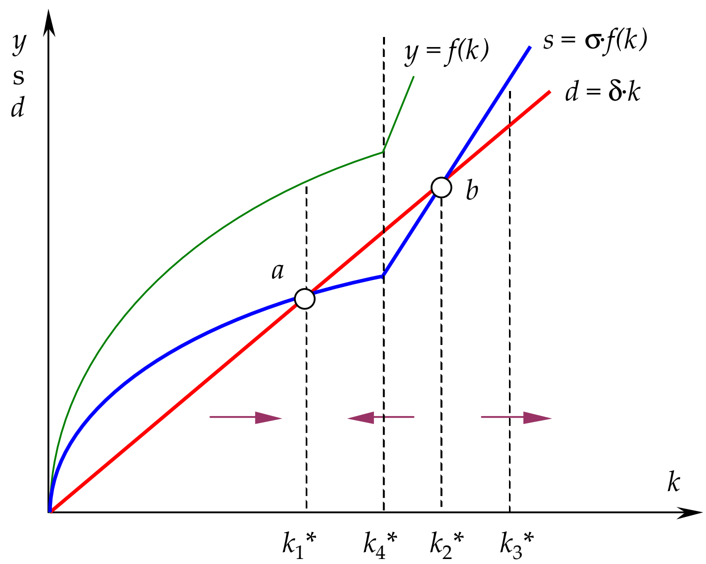


Fig. 44. Creixement endogen

31. CONCLUSIÓ: QUÈ FA QUE UNS PAÏSOS SIGUIN MÉS RICS QUE D'ALTRES?

El model SS permet avançar respostes a la gran pregunta de perquè alguns països són més rics que d'altres. Totes les respostes deriven dels 4 elements exògens del model (o de combinacions d'aquests elements).

- La tecnologia de producció. Siguin A i B dos països idèntics excepte pel fet que els treballadors d'A són més productius que els de B. Això vol dir que, amb el mateix capital, un treballador d'A produeix més que un de B. Aleshores, A serà més ric que B, en el sentit que a l'estat estacionari d'A la producció per càpita serà superior a la de B. Aquest resultat es pot comprovar a la Fig. 31 suposant que $y' = f'(k)$ és la funció de producció per càpita d'A i que $y = f(k)$ és la de B. En tal cas, a l'estat estacionari, A arriba al punt e, en tant que, a l'estat estacionari, B arriba a c.

- La taxa d'estalvi. Siguin A i B dos països idèntics excepte pel fet que la taxa d'estalvi σ' a A és superior a la taxa d'estalvi σ a B. Aleshores, A serà més ric que B. Això es pot comprovar a la Fig. 34 suposant que $s' = \sigma' \cdot f(k)$ és la funció d'estalvi per càpita d'A i que $s = \sigma \cdot f(k)$ és la de B. A l'estat estacionari, A arriba al punt e, en tant que, a l'estat estacionari, B arriba a b.

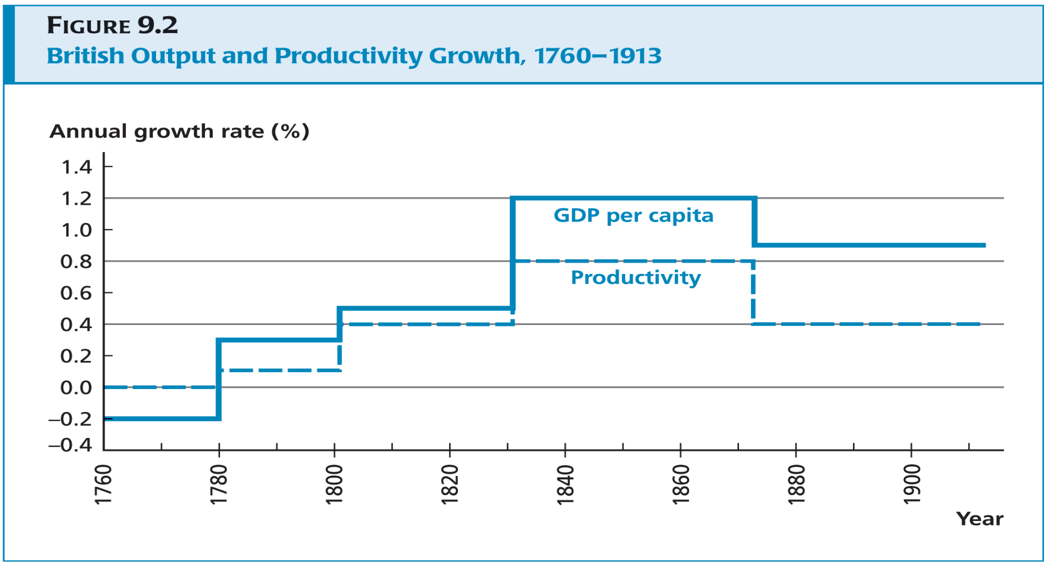
- La taxa de depreciació. Siguin A i B dos països idèntics excepte pel fet que la taxa de depreciació δ' a B és superior a la taxa de depreciació δ a A. En tal cas, A serà més ric que B. La Fig. 30 il·lustra aquest resultat suposant que $d' = \delta' \cdot k$ és la funció de depreciació de B i que $d = \delta \cdot k$ és la d'A. A l'estat estacionari, A arriba al punt c, en tant que, a l'estat estacionari, B arriba només a e.

- La taxa de creixement de la població. Siguin A i B dos països idèntics excepte pel fet que la taxa n' de creixement de la població a B és superior a la taxa n a A. Com a resultat, A serà més ric que B.

Donat el fet que hi ha països més rics que d'altres, la qüestió realment interessant és si aquesta situació és permanent: tenen els països més pobres la possibilitat d'atrapar els més rics?

- El model SS dóna un missatge positiu en el sentit que, si la producció per càpita està eventualment limitada per una productivitat marginal decreixent, totes les economies tenen el potencial de convergir: si una economia pobre adopta els paràmetres estructurals d'una rica (essencialment en relació amb la productivitat, la taxa d'estalvi i la taxa de creixement de la població), aleshores l'economia pobre s'apropara a la rica.

- Aquests tres paràmetres defineixen les principals fonts de creixement (de la producció agregada). Una és el progrés tecnològic, que vol dir poder produir més amb el mateix (o produir el mateix amb menys). El progrés tecnològic en gran mesura es manifesta en augments de la productivitat dels factors de producció. La Fig. 45 mostra com el creixement de la producció per càpita a la Gran Bretanya durant la Revolució Industrial va estar lligat a augments de la productivitat.



Source: Crafts (1996).

Fig. 45. Relació entre la producció per càpita i la productivitat a la Gran Bretanya
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

- Una segona font és l'<u>acumulació de capital</u> (això és, de mitjans productius). El capital s'acumula gràcies a la inversió i aquesta és possible gràcies a l'estalvi. La Fig. 46 mostra evidència empírica a favor de la idea que <u>més inversió comporta més riquesa</u>.

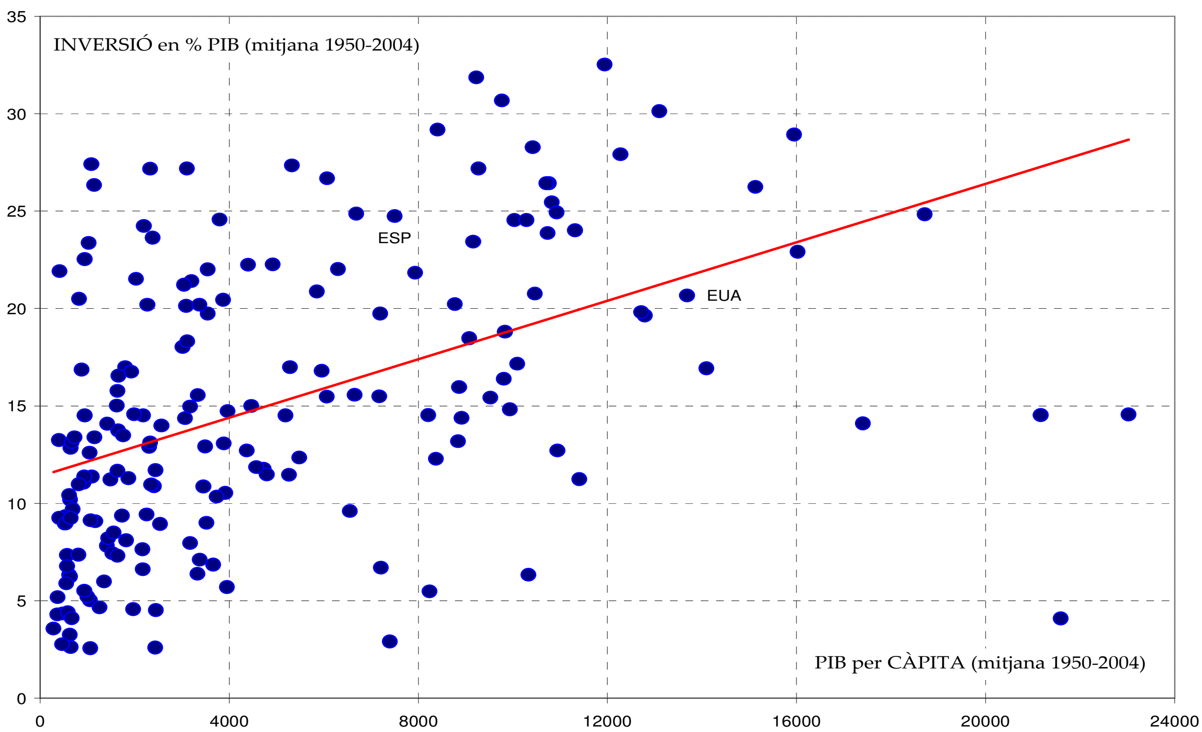


Fig. 46. Relació entre la inversió (en % sobre la producció agregada) i la producció agregada per càpita per a gairebé tots els 188 països presents a la *Penn World Table*, PWT 6.2
http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt62/pwt62_form.php

- La tercera font és el creixement de la població: més persones significa poder produir més. Les altres dues fonts de creixement de la producció agregada tendeixen també a ser fonts de creixement de la producció per càpita. En canvi, el creixement de la població tendeix a reduir la producció per càpita (sobretot, quan la producció per càpita està sotmesa a productivitats marginals decreixents).

- De fet, en principi sembla més probable que un país amb molta població sigui més pobre que un país amb menys població. La Fig. 47 sembla avalar aquesta tesi: més n, menys riquesa. La Fig. 47 és consistent amb la predicció del model SS segons la qual un augment d'n tendeix a reduir la producció per càpita.

FIGURE 2.4
Relationship Between Income per Capita and Population Growth

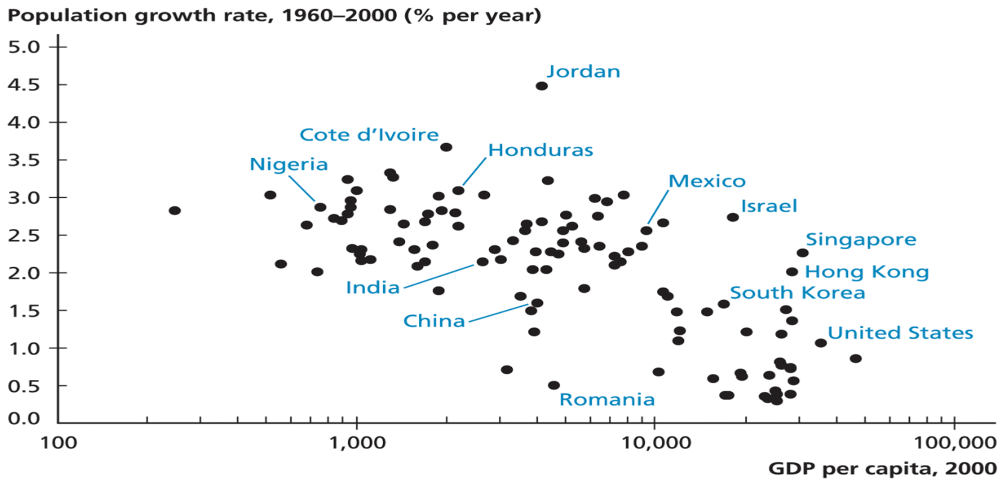
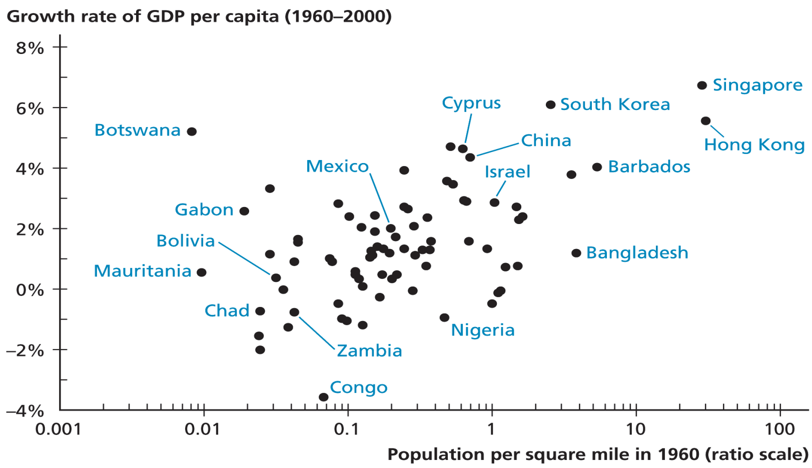


Fig. 47. Correlació negativa entre la taxa de creixement de la població i la producció per càpita
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

FIGURE 14.6
Population Density Versus Economic Growth



Source: Burkett, Humblet, and Putterman (1999).

Fig. 48. Correlació positiva entre la taxa de creixement de la producció per càpita i la densitat de població
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

➤ El creixement també depèn d'altres trets relatius a la població a més de la seva taxa de creixement. Per exemple, la Fig. 48 suggereix que la densitat de població afavoreix el creixement, però no queda tan clar si també afavoreix la riquesa: els mapes de densitat de població de les Figs. 49 i 50 no semblen coincidir amb els mapes de riquesa. Per exemple, Índia és un país molt densament poblat, però no és pas un país ric.

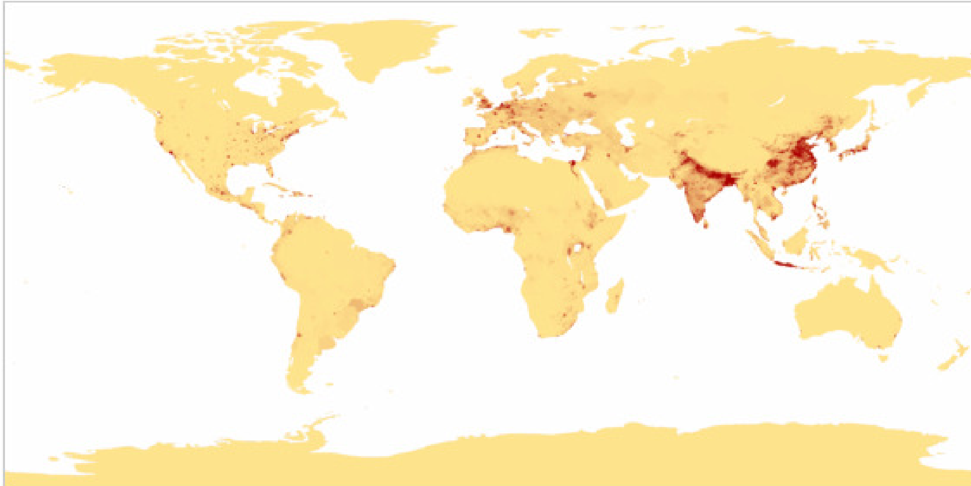


Fig. 49. Densitat de població al món, 1994, http://en.wikipedia.org/wiki/World_population

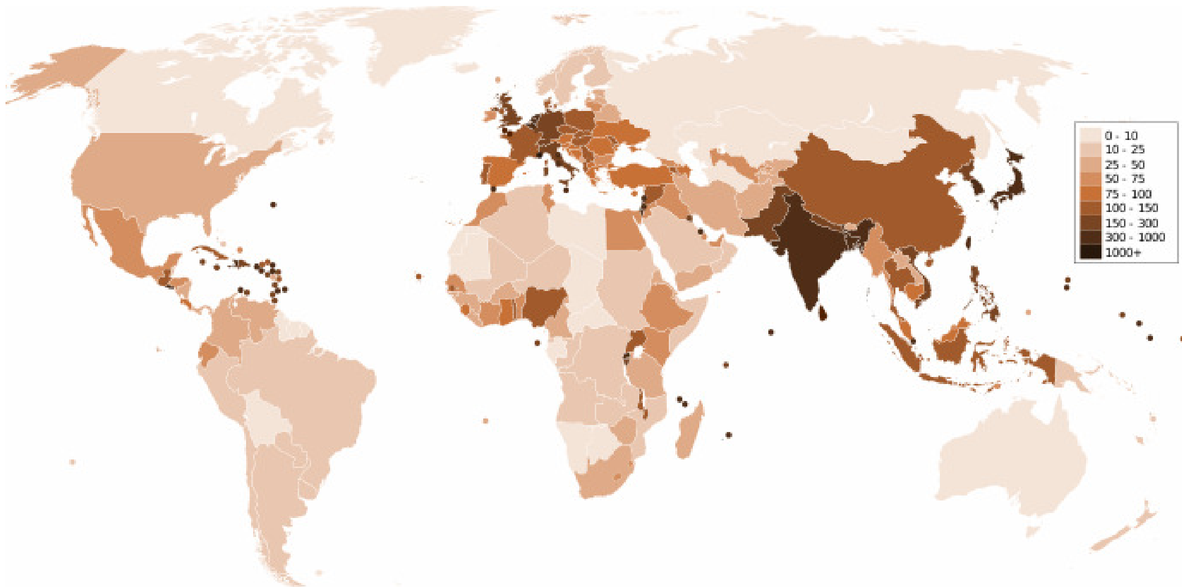
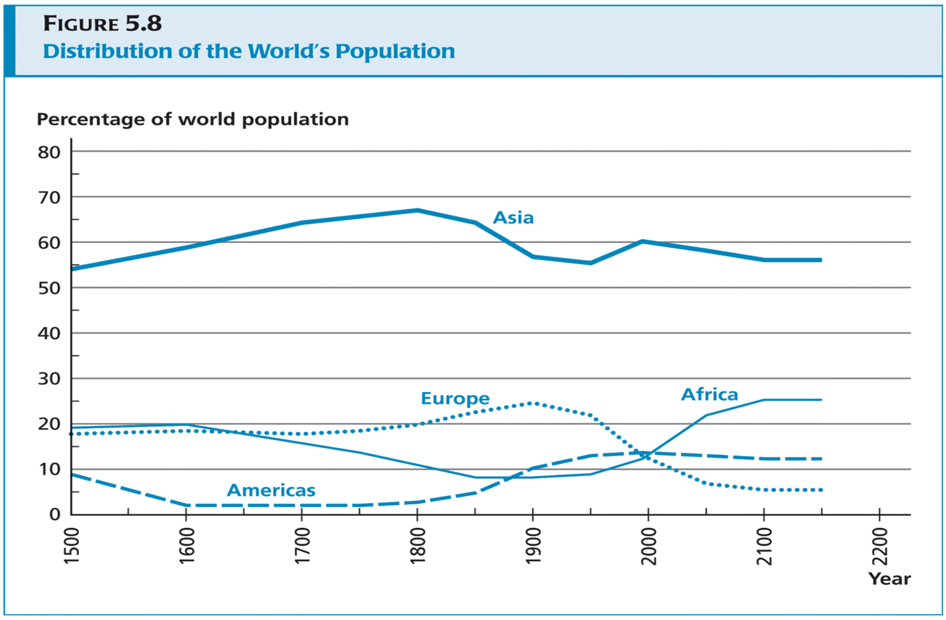


Fig. 50. Densitat de població al 2006 per països (persones per km^2)
http://en.wikipedia.org/wiki/Population_density

➤ Sobre la base del model SS, les Figs. 51 i 52 permeten fer dues reflexions. Primer, que Àfrica i les Amèriques augmentin la seva proporció de població, indica que, amb la resta de coses iguals, aquests continents tindran més dificultats que Europa i Àsia per a incrementar la seva riquesa (per què?). I segon, la reducció progressiva de la taxa de creixement de la població mundial suggereix que el món ho té més fàcil per a incrementar la seva riquesa (per què?). Nota: s'estima que la població creix a un ritme d'unes 200.000 persones per dia, http://www.xist.org/earth/population1.aspx.



Sources: Livi-Bacci (1997), United Nations Population Division (2000).

Fig. 51. Distribució passada i estimada de la població mundial
http://wps.aw.com/aw_weil_econgrowth_1/24/6169/1579312.cw/content/index.html

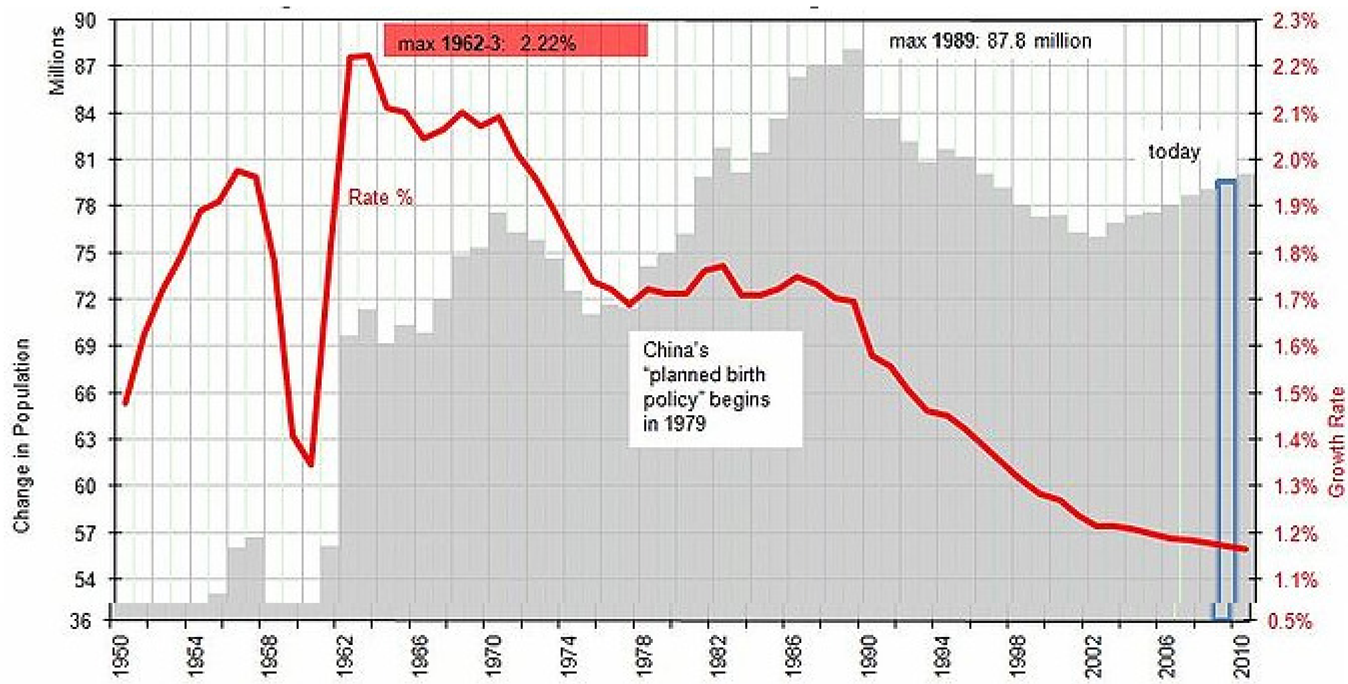


Fig. 52. Canvis i taxa de creixement de la població mundial
http://en.wikipedia.org/wiki/World_population

- Resumint, el model SS identifica el progrés tecnològic, la taxa d'estalvi i la taxa de creixement de l'economia com a instruments que permeten incrementar la riquesa d'un país. Què hi ha de la depreciació? Entesa en un sentit físic, és difícil reduir-la per a augmentar la riquesa. Ara bé: es pot interpretar el paràmetre δ com un paràmetre d'eficiència en l'ús del capital (o de qualitat del propi capital). Economies on les empreses fan servir capital de més qualitat o gestionen més bé l'ús del capital durant el procés productiu (degut, per exemple, a millores organitzatives i de gestió) es poden considerar com economies amb una taxa de depreciació δ més baixa. Per tant, δ pot capturar millores organitzatives del procés de produccció. L'adopció d'aquestes millores pot interpretar-se com (a través d'una reducció de δ) una font addicional de creixement.

Dos apunts finals. Primer, el model SS no incorpora governs. Què poden fer aquests per a estimular el creixement? Força, de fet. Els governs tenen més capacitat que ningú d'influenciar els paràmetres estructurals d'una economia. Les anomenades "polítiques d'oferta" defineixen el conjunt de mesures que els governs apliquen per a estimular el creixement (a llarg) de les economies.

- Es parla de "polítiques d'oferta" en oposició a "polítiques de demanda" perquè són mesures que afecten, principalment, al sector de la producció (les polítiques de demanda incideixen més aviat sobre el sector de la despesa).

- Les polítiques d'oferta inclouen subvencions o reduccions d'imposts per a les activitats de recerca, desenvolupament i innovació (font del progrés tecnològic); mesures de foment de la productivitat; incentius a l'estalvi; i, menys típicament, incentius a les famílies per a incrementar el nombre de fills. Les polítiques d'oferta es fonamenten en la percepció (formalitzada pel model SS) que és el sector de la producció (la capacitat productiva d'un país) el que determina la riquesa d'un país i les seves possibilitats de creixement sostingut.

El segon apunt es refereix a l'existència d'altres determinants del creixement. Al model SS, l'element central que vertebra la comprensió del creixement econòmic és el capital per càpita: només incrementant el capital per càpita és possible incrementar la producció per càpita (la Fig. 22 mostra evidència empírica a favor de la relació positiva entre capital per càpita i producció per càpita). Amb tot, és clar que el model deixa fora factors que incideixen significativament sobre el creixement econòmic. Entre els factors més destacats no presents al model hi ha els factors institucionals, socials i culturals (http://en.wikipedia.org/wiki/Economic_growth). Factors institucionals (per exemple, manca de propietat privada i de mercats lliures) s'assenyalen com a explicacions del fracàs en el llarg termini de les economies comunistes del segle XX. Però parlar d'aquests factors és part d'una altra història que no correspon tractar aquí.

APÈNDIX

A. Creixement acumulat d'una variable que creix a una taxa fixa

Amb t designant el temps, sigui x_t una variable que creix a la taxa n, taxa expressada en tant per u. Si t = 0 és el període inicial, el valor d'x al període t = 1 serà $x_1 = x_0 + n\, x_0 = (1 + n)\, x_0$. Per exemple, si x_0 = 100 i n = 0'1 (taxa de creixement del 10%), x_1 = 100 + 0'1·100 = 100 + 10 = 110.

Al període $t = 2$ es tindrà $x_2 = x_1 + n\, x_1 = (1 + n)\, x_1$. Atès que $x_1 = (1 + n)\, x_0$, resulta que $x_2 = (1 + n)(1 + n)\, x_0 = (1 + n)^2\, x_0$. De manera similar, per al període $t = 3$, $x_3 = (1 + n)^3\, x_0$. Per inducció matemàtica, es pot demostrar que, per al període t, el valor d'x al període t serà $x_t = (1 + n)^t\, x_0$. Per exemple, al període $t = 10$, $x_t = (1 + n)^t\, x_0 = (1 + 0'1)^{10}\, 100 \approx 259'37$ i al període $t = 20$, $x_{20} = (1 + 0'1)^{20}\, 100 \approx 672'74$.

B. Les regles del 70, del 71 i del 72

La regla del 70 és un mètode per a determinar el temps aproximat que triga a duplicar-se una variable que creix a una determinada taxa. Segons la regla del 70, una variable que creix a la taxa n (expressada en tant per cent), triga aproximadament $70/n$ períodes a duplicar el seu valor. Per exemple, una variable que creix a una taxa anual $n = 10\%$, necessita aproximadament $70/10 = 7$ anys per a duplicar-se (el valor exacte és 7'27 anys).

Les regles del 71 i del 72 són anàlogues: la regla del 71 fa servir l'aproximació $71/n$ per a determinar el nombre de períodes que permeten duplicar el valor d'una variable que creix a l'n% i la regla del 72 fa servir l'aproximació $72/n$. La Fig. 32 mostra la relació entre els valors subministrats per les regles del 70, 71 i 72 i el valor real de duplicació.

Taxa	Períodes per a què es dupliqui el valor inicial	Estimació de la regla del 72	Estimació de la regla del 71	Estimació de la regla del 70
0,25%	277,61	288	284	280
0,50%	138,98	144	142	140
1%	69,66	72	71	70
2%	35	36	35,5	35
3%	23,45	24	23,67	23,33
4%	17,67	18	17,75	17,5
5%	14,21	14,4	14,2	14
6%	11,9	12	11,83	11,67
7%	10,25	10,29	10,14	10
8%	9,01	9	8,88	8,75
9%	8,04	8	7,89	7,78
10%	7,27	7,2	7,1	7
11%	6,67	6,55	6,45	6,36
12%	6,12	6	5,92	5,83
15%	4,96	4,8	4,73	4,67
18%	4,19	4	3,94	3,89

Fig. 32. Relació entre una taxa de creixement i el nombre de períodes que cal per a duplicar el seu valor (ombrejada, la millor estimació) · http://en.wikipedia.org/wiki/Rule_of_72

- La justificació de les regles del 70, 71 i 72 és la següent. Sigui x una variable que creix a la taxa n. Sigui x_0 el valor inicial que ens interessa duplicar. Per tant, $x_t = x_0(1 + n)^t$. Si busquem el valor τ de t que fa que $x_\tau = 2x_0$, es tindrà $2x_0 = x_0(1 + n)^\tau$. D'aquí resulta 2 =

$(1 + n)^{\tau}$. Prenent el logaritme neperià a tots dos costats, $ln\ 2 = ln\ [(1 + n)^{\tau}]$. Per les propietats dels logaritmes, $ln\ [(1 + n)^{\tau}] = \tau\ ln\ (1 + n)$.

➤ Com a conclusió, el valor τ que fa que el valor x_0 es dupliqui la variable x quan la seva taxa de creixement és n satisfà $\tau = \frac{ln\ 2}{ln\,(1+n)}$. Per a valors petits d'$n$, $ln\ (1 + n) \approx n$ i $ln\ 2 \approx$ 0'693. Així que $\tau \approx \frac{0'693}{n}$ (on n s'expressa en tant per u), que justifica les regles del 70, 71 i 72 (que s'obtenen de l'aproximació anterior multiplicant i dividint per 100 per tal que n s'expressi en tant per cent).

C. Regles de càlcul aproximat d'una taxa de variació

Per a una variable α, sigui $\tilde{\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ la taxa de variació d'α entre 2 períodes de temps.

• Regla 1: si $x = y{\cdot}z$, aleshores $\tilde{x} \approx \tilde{y} + \tilde{z}$. Per a valors petits de les taxes de variació, la taxa de variació d'una variable x que és el producte de dues altres y i z és aproximadament igual a la suma de les taxes de variació d'y i z.

• Regla 2: si $x = y/z$, aleshores $\tilde{x} \approx \tilde{y} - \tilde{z}$. Per a valors petits de les taxes de variació, la taxa de variació d'una variable x que és el quocient de dues altres y i z és aproximadament igual a la taxa de variació d'y menys la taxa de variació de z.

• Regla 3: si $x = y^a$, on a és una constant positiva, aleshores $\tilde{x} \approx a{\cdot}\tilde{y}$. Per a valors petits de les taxes de variació, la taxa de variació d'una variable x que és igual a una base y elevada a un exponent a és aproximadament igual a l'exponent a per la taxa de variació de la base y.

D. Créixer molt durant menys temps o créixer menys durant més temps?

Quina política de creixement és preferible? Política 1: combinar períodes on el creixement és molt alt amb d'altres on el creixement és molt baix. Política 2: mantenir permanentment un creixement moderat. Per exemple, sigui l'elecció de polítiques una entre créixer a una determinada taxa durant la meitat d'un interval o créixer a la meitat de la taxa durant tot l'interval. En aquest cas, la política de creixement moderat permanent és superior a la política de creixement intermitent o espasmòdic.

La demostració és la següent. Sigui x la variable que creix, z el nombre total de període (on z és un nombre parell) i n la taxa de creixement d'x (expressada en tant per u). Per a simplificar, se suposa que $x_0 = 1$.

• Política 1: créixer a la taxa n durant els $\frac{z}{2}$ primers períodes i no créixer durant els $\frac{z}{2}$ períodes restants. En aquest cas, x creix al període $t = 1$, al $t = 2$, al $t = 3$… fins arribar al període $t = \frac{z}{2}$, que és l'últim període on creix. Per als períodes $t = \frac{z}{2} + 1$, $t = \frac{z}{2} + 2$, $t = \frac{z}{2} + 3$… fins al $t = z$, la variable x

no creix, de forma que el valor d'x al període z serà $x_Z = x_{Z/2}$, ja que $t = \frac{z}{2}$ és l'últim període on hi ha creixement. En resum, $x_Z = x_{Z/2} = (1 + n)^{z/2}\, x_0 = (1 + n)^{z/2}$.

• <u>Política 2</u>: créixer a la taxa $\frac{n}{2}$ durant els z períodes. En aquest cas, x sempre a la taxa $\frac{n}{2}$, de forma que $x_Z = (1 + \frac{n}{2})^z\, x_0 = (1 + \frac{n}{2})^z$.

Es tracta de demostrar que el resultat $(1 + \frac{n}{2})^z$ de la política 2 és un valor més gran que el resultat $(1 + n)^{z/2}$ de la política 1. Atès que el logaritme neperià és una funció creixent, prendre logaritmes preserva desigualtats. Així, $(1 + \frac{n}{2})^z > (1 + n)^{z/2}$ si, i només si, $ln\ (1 + \frac{n}{2})^z > ln\ (1 + n)^{z/2}$. Aplicant les propietats dels logaritmes, $ln\ (1 + \frac{n}{2})^z = z\cdot ln\ (1 + \frac{n}{2})$ i $ln\ (1 + n)^{z/2} = \frac{z}{2} ln\ (1 + n)$. Per tant, $(1 + \frac{n}{2})^z > (1 + n)^{z/2}$ si, i només si, $z\cdot ln\ (1 + \frac{n}{2}) > \frac{z}{2} ln\ (1 + n)$. Cancel·lant z, aquesta darrera desigualtat és equivalent a $2\cdot ln\ (1 + \frac{n}{2}) - ln\ (1 + n) > 0$, que és equivalent a

$$ln\ (1 + \frac{n}{2}) + ln\ (1 + \frac{n}{2}) - ln\ (1 + n) > 0. \tag{6}$$

Per les propietats dels logaritmes, $ln\ (1 + \frac{n}{2}) - ln\ (1 + n) = ln \left(\frac{1+\frac{n}{2}}{1+n}\right)$. Així que (6) és equivalent a

$$ln\ (1 + \frac{n}{2}) + ln \left(\frac{1+\frac{n}{2}}{1+n}\right) > 0. \tag{7}$$

Per les propietats dels logaritmes, (7) és equivalent a

$$ln \left(\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1+\frac{n}{2}}{1+n}\right)\right) > 0. \tag{8}$$

Atès que $ln\ x > 0$ si, i només si, $x > 1$, (8) se satisfà si, i només si, $\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1+\frac{n}{2}}{1+n}\right) > 1$. Aquesta condició equival a $\frac{\left(1+\frac{n}{2}\right)^2}{1+n} > 1$, que equival a $\left(1+\frac{n}{2}\right)^2 > 1 + n$, que equival a $1 + n + \left(\frac{n}{2}\right)^2 > 1 + n$. Donat que aquesta desigualtat és compleix, queda demostrat que la política 2 dóna un valor més gran d'x al període z que la política 1.

➤ Per exemple, sigui $n = 0'04$ i $z = 50$. Si x és la producció per càpita d'una economia, suposem que la política 1 consisteix en créixer al 4% durant 25 anys, mentre la política 2 consisteix en créixer al 2% durant 50 anys. Amb $x_0 = 1$, la política 1 produirà, al període 50, una producció per càpita igual a $x_{50} = (1 + 0'04)^{50/2} = 1'04^{25} \approx 2'66$. En canvi, la política 2 produirà, al període 50, una producció per càpita igual a $x_{50} = (1 + 0'02)^{50} = 1'02^{50} \approx 2'69$. Si $z = 100$, els valors són 7'10 i 7'24.

Exercicis del Tema 1

1. Expressa cadascuna de les següents funcions de producció agregada com a funció de producció per càpita que relaciona la producció per càpita $y = Y/L$ i el capital per càpita $k = K/L$: (i) $Y = 2K^{1/2}L^{1/2}$; (ii) $Y = K^{1/2}L^{1/2}$; (iii) $Y = KL^2$; (iv) $Y = K^{1/2}L$; (v) $Y = 5KL$; (vi) $Y = K + L$; (vii) $Y = \frac{1}{3}K^{1/3}L^{1/3}$; (viii) $Y = K^{1/4}L^{3/4}$; i (ix) $Y =$ mínim $\{K, L\}$.

2. Representa gràficament cadascuna de les funcions de producció obtingudes a l'Exercici 1.

3. (i) Troba i representa gràficament el capital per càpita de l'estat estacionari al model de creixement de Solow i Swan on $y = k^{1/3}$, $\delta = 0'1$, $\sigma = 0'4$ i $n = 0$. (ii) Calcula els valors de la producció per càpita, el consum per càpita, la inversió per càpita i la depreciació per càpita a l'estat estacionari i indica'ls a la representació gràfica del model. (iii) Quina és la taxa d'estalvi i el consum per càpita de la regla d'or?

4. (i) Troba i representa gràficament el capital per càpita de l'estat estacionari al model de creixement de Solow i Swan on $y = 2k^{1/2}$, $\delta = 0'1$, $\sigma = 0'2$ i $n = 0$. (ii) Calcula els valors de la producció per càpita, el consum per càpita, la inversió per càpita i la depreciació per càpita a l'estat estacionari i indica'ls a la representació gràfica del model. (iii) Quina és la taxa d'estalvi de la regla d'or? I el consum per càpita de la regla d'or? (iv) Assumint que les dades inicials descriuen les característiques presents de l'economia, què cal per a assolir el capital per càpita de la regla d'or, augmentar o disminuir el capital per càpita?

5. Al model de l'Exercici 4, determina gràficament què succeeix amb la producció per càpita i el capital per càpita de l'estat estacionari si: (i) disminueix la taxa d'estalvi; (ii) disminueix la taxa depreciació; (iii) disminueixen simultàniament la taxa d'estalvi i la taxa de depreciació.

6. Al model de l'Exercici 4, determina gràficament què succeeix amb la producció per càpita i el capital per càpita de l'estat estacionari si la funció de producció passa de ser $y = 2k^{1/2}$ a ser la funció $Y = k^{1/2}$. Què pot causar aquest canvi a la funció de producció?

7. Al model de l'Exercici 4, quina variació de la taxa de depreciació fa que la producció per càpita sigui 4 a l'estat estacionari?

8. (i) Troba i representa gràficament el capital per càpita de l'estat estacionari al model de creixement de Solow i Swan on $y = 2k^{1/2}$, $\delta = 0'1$, $\sigma = 0'2$ i $n = 0'1$. (ii) Calcula els valors de la producció per càpita, el consum per càpita, la inversió per càpita i la depreciació per càpita a l'estat estacionari i indica'ls a la representació gràfica del model. (iii) Quina és la taxa d'estalvi de la regla d'or? I el consum per càpita de la regla d'or? (iv) Quina seria la taxa d'estalvi de la regla d'or si la taxa d'estalvi de l'economia fos 0'3 en comptes de 0'2?

9. Amb taxa de creixement de la població positiva, analitza gràficament al model de Solow i Swan l'efecte sobre el capital per càpita de l'estat estacionari i sobre la producció per càpita de l'estat estacionari de: (i) una reducció de la taxa de creixement de la població; (ii) un regrés tecnològic combinat amb un augment de la taxa de creixement de la població; (iii) una disminució de la taxa d'estalvi combinada amb un augment de la taxa de creixement de la població; (iv) un augment de la taxa de depreciació combinada a una disminució de la taxa de creixement de la població; i (v) un avenç tecnològic combinat amb una reducció de la taxa d'estalvi.

10. Segons la regla del 70, a quina taxa hauria de créixer una variable per a què es dupliqui en 3 períodes? I segons la regla del 71? I segons la regla del 72? I per a què es dupliqui en 20 períodes?

11. Una variable que creix al 20% anual, quan anys trigaria, aproximadament, a duplicar-se segons les regles del 70, 71 i 72?

12. A mesura que el temps avança, una variable creix a l'n% anual. A quina taxa decreix la variable si el temps retrocedeix? Aplica la fórmula obtinguda quan $n = 10\%$.

13. Si una variable decreix al –n% anual, a quina taxa creixeria si el temps retrocedís? Aplica la fórmula obtinguda si la variable decreix al –10%.

14. Tendeix l'economia a assolir espontàniament el capital per càpita de la regla d'or? Per què?

15. Considera el model de Solow i Swan on la taxa de creixement de la població és zero. La funció de producció per càpita és $y = 3k^{1/3}$. La taxa d'estalvi és 0'1. La taxa de depreciació és 0'3. (i) Calcula el capital per càpita, la producció per càpita, el consum per càpita i l'estalvi per càpita a l'estat estacionari. (ii) Identifica a una representació gràfica els valors obtinguts a l'apartat (i). (iii) Quina hauria de ser la taxa de creixement de la població, en tant per cent, per a què el capital per càpita de l'estat estacionari que satisfà la regla d'or sigui $k = 1$? Quina seria la taxa d'estalvi de la regla d'or en aquest cas?

16. (i) Al model de Solow i Swan, analitza gràficament què succeeix amb el capital per càpita i la producció per càpita d'estat estacionari si es produeix un augment de la taxa de creixement de la població i, a la vegada, un augment de la taxa d'estalvi. (ii) Seria possible, al cas anterior, que el capital per càpita d'estat estacionari no es modifiqués? Explica la resposta.

17. Suggereixen les dades de les Figs. 3 i 5 que els països més poblats són els més rics? O suggereixen el contrari? Per què?

18. Demostra gràficament que, si A i B són dos països idèntics excepte pel fet que la taxa n' de creixement de la població a B és superior a la taxa n a A, aleshores A serà més ric que B.

19. Hi ha dos països, A i B. Amb el model de Solow i Swan, determina gràficament, a cada cas, a quin país la producció per càpita de l'estat estacionari és més gran. (i) A i B són iguals excepte pel fet que $n_A > n_B$ i $\delta_A > \delta_B$. (ii) A i B són iguals excepte pel fet que $n_A > n_B$ i $\delta_A < \delta_B$. (iii) A i B són iguals excepte pel fet que $n_A > n_B$ i $\sigma_A < \sigma_B$. (iv) A i B són iguals excepte pel fet que, per a tot $k > 0$, $f_A(k) > f_B(k)$ i que les taxes d'estalvi són tals que les funcions d'estalvi per càpita són iguals a A i a B. (v) A i B són iguals excepte pel fet que $n_A = 2 \cdot n_B$ i $\delta_B = 2 \cdot \delta_A$. (vi) A i B són iguals excepte pel fet que $n_A > n_B$ i que, per a tot $k > 0$, $f_A(k) > f_B(k)$.

20. Respon a les dues preguntes que es formulen en el paràgraf que hi ha immediatament després de la Fig. 50.

21. A l'estat estacionari del model Solow i Swan quan la taxa de creixement de la població és positiva, la taxa de creixement
(a) de la producció agregada és positiva
(b) de la producció agregada per càpita és positiva
(c) del consum per càpita és positiva
(d) Res de l'anterior

22. Al model de Solow i Swan sense creixement de la població, hi ha desacumulació de capital per càpita quan la inversió per càpita
(a) és superior a la depreciació per càpita
(b) és inferior a la depreciació per càpita
(c) és igual a la inversió per càpita
(d) assoleix el nivell corresponent a la regla d'or

23. La regla del 70 diu que el
(a) consum per càpita es maximitza en menys de 70 períodes
(b) a l'estat estacionari el consum per càpita és del 70%
(c) nombre de períodes que triga a duplicar-se el valor d'una variable que creix a l'n% és, aproximadament, n/70
(d) Res de l'anterior

24. La hipotèsi de la convergència parla
(a) de la regla del 72
(b) d'estats estacionaris
(c) de taxes de creixement de la població
(d) de la taxa d'estalvi de la regla d'or

25. Al model de Solow i Swan s'ha observat una disminució del capital per càpita de l'estat estacionari. Una possible explicació és la disminució de la taxa
(a) d'estalvi (b) de creixement de la població
(c) de depreciació (d) Res de l'anterior

26. Quina afirmació no és falsa al model de Solow i Swan?
(a) Tot estat estacionari satisfà la regla d'or
(b) La regla d'or diu que l'estalvi per càpita és màxim
(c) El capital per càpita de l'estat estacionari que satisfà la regla d'or no depèn de la taxa d'estalvi
(d) La condició que permet calcular el capital per càpita de l'estat estacionari que satisfà la regla d'or diu que l'estalvi per càpita és igual a la depreciació per càpita

27. Al model de Solow i Swan, és possible un creixement indefinit de la producció per càpita si es produeix un
(a) regrés tecnològic indefinit
(b) augment perpetu de la taxa de depreciació
(c) augment continuat de la taxa de creixement de la població
(d) Res de l'anterior

28. Al model de creixement de Solow i Swan sense creixement de la població, el capital per càpita de l'estat estacionari resulta de la intersecció entre les funcions de
(a) producció i depreciació
(b) producció i estalvi
(c) consum i depreciació
(d) Res de l'anterior
